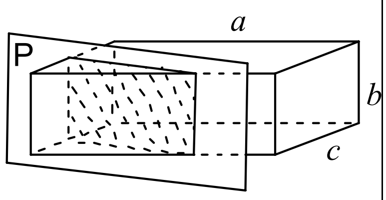
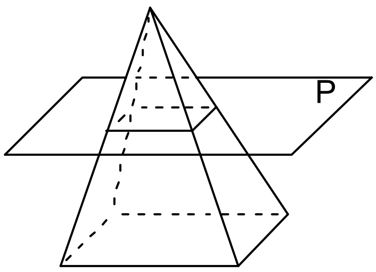
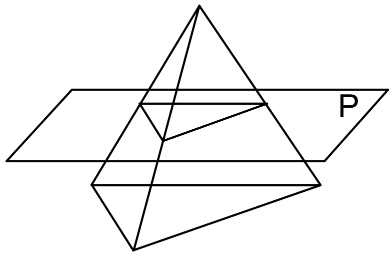
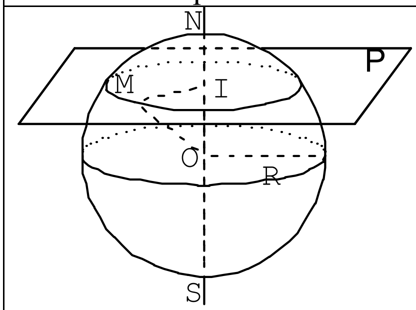
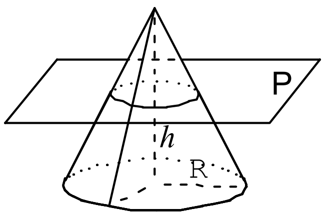
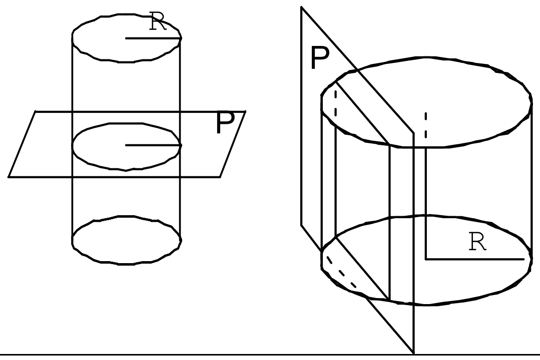
GEOMETRIE DANS L'ESPACE

I. Solides usuels : volume et section par un plan

Pavé droit	Pyramide	Tétraèdre
		 Un tétraèdre est une pyramide à base triangulaire
$V = abc$ Si le plan P est parallèle à une arête, la section est un rectangle.	$V = \frac{1}{3}$ Base $\times$ hauteur Si P est parallèle à la base, la section est un polygone dont les côtés sont parallèles à ceux de la base.	$V = \frac{1}{3}$ Base $\times$ hauteur Si P est parallèle à l'une des faces, la section est un triangle dont les côtés sont parallèles à ceux de la base

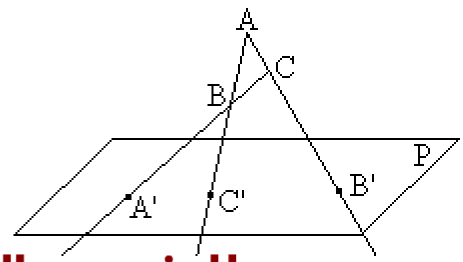
Sphère	cône de révolution	cylindre de révolution
		
$V = \frac{4}{3}\pi R^3$ La section est un cercle. Si [NS] est le diamètre de la sphère, orthogonal au plan P en I, alors I est le centre du cercle.	$V = \frac{1}{3}(\pi R^2) \times h$ Si P est parallèle à la base, la section est un cercle dont le centre se trouve sur l'axe du cône.	$V = \pi R^2 \times$ hauteur • Si P est parallèle aux bases, la section est un cercle de même rayon que le cylindre et dont le centre se trouve sur l'axe du cylindre. • Si P est parallèle à l'axe, la section est un rectangle.

II. Quelques règles

règle 1 : Par trois points non alignés A, B et C passe un seul plan. Ce plan est noté (ABC).

règle 2 : Si A et B sont deux points d'un plan P, tous les points de la droite (AB) appartiennent au plan P.

règle 3 : Si deux plans sont sécants, leur intersection est une droite.



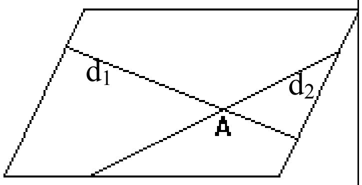
exercice : P est un plan ; A, B, C sont trois points non alignés qui n'appartiennent pas à P. On suppose que (AB) coupe P en C', que (AC) coupe P en B' et que (BC) coupe P en A'.
Montrer que les points A', B' et C' sont alignés.

III. Position relative de droites et de plans

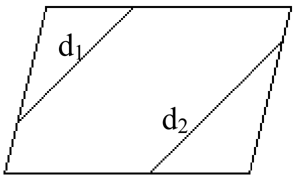
a) deux droites distinctes

Deux droites de l'espace sont :

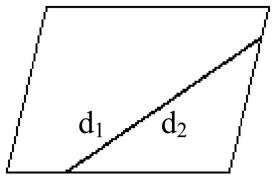
- soit coplanaires



d_1 et d_2 sont sécantes en A.

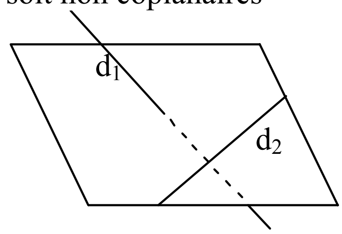


d_1 et d_2 sont strictement parallèles



d_1 et d_2 sont confondues

- soit non coplanaires

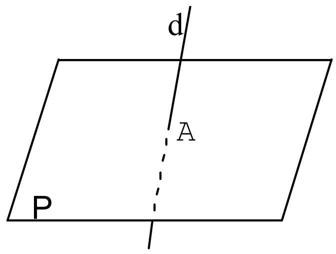


Aucun plan ne contient d_1 et d_2.

b) Une droite et un plan

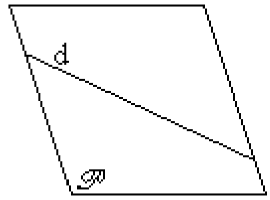
Une droite et un plan de l'espace sont :

- soit sécants

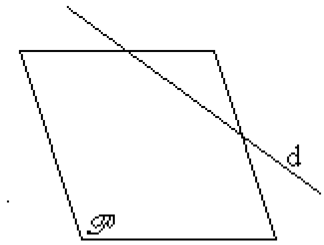


d et P ont un point d'intersection A

- soit parallèles



d est contenue dans P.

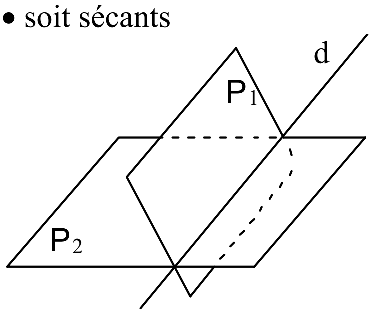


d et P sont strictement parallèles.

c) Position relative de deux plans

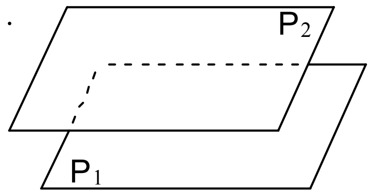
Deux plans sont :

- soit sécants



P_1 et P_2 ont une droite d'intersection d

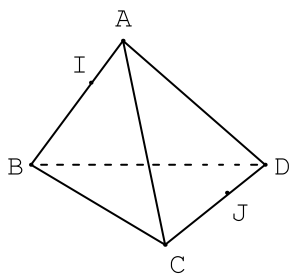
- soit parallèles



P_1 et P_2 sont strictement parallèles

P_1 et P_2 sont confondus

<u>exercice :</u> déterminer l'intersection de plans sécants :
ABCD est un tétraèdre.
I et J sont des points des arêtes [AB] et [CD].
Déterminer l'intersection des plans (ABJ) et (CDI).

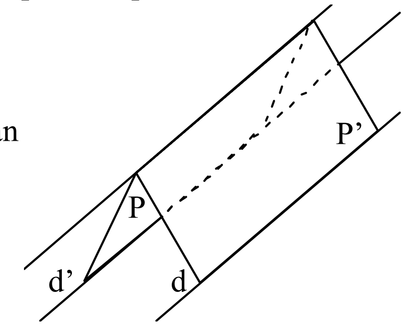


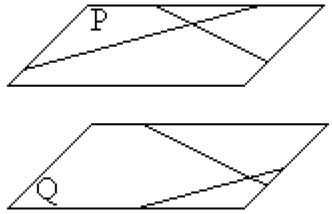
IV. Le parallélisme dans l'espace

a) parallélisme entre droites

<u>Propriété 1 :</u> Si P et P' sont deux plans parallèles, alors tout plan Q qui coupe P coupe aussi P' et les droites d'intersection sont parallèles.

<u>Propriété 2 :</u> (théorème du toit)
d et *d'* sont deux droites parallèles. P est un plan contenant *d*, et P' un plan contenant *d'*. Si, en outre, les plans P et P' sont sécants, alors la droite Δ d'intersection de ces plans est parallèle à *d* et à *d'*.





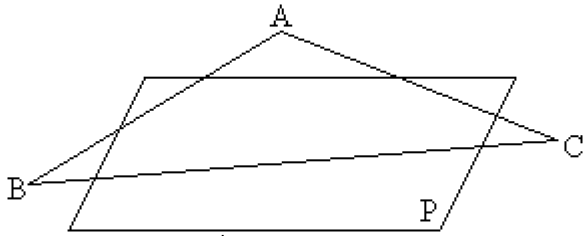
b) parallélisme entre plans

Propriété 3 : Si deux droites sécantes d'un plan P sont respectivement parallèles à deux droites sécantes d'un plan Q, alors les plans P et Q sont parallèles.

c) parallélisme entre droite et plan

Propriété 4 : Si une droite *d* est parallèle à une droite *d'*, alors la droite *d* est parallèle à tout plan contenant la droite *d'*.

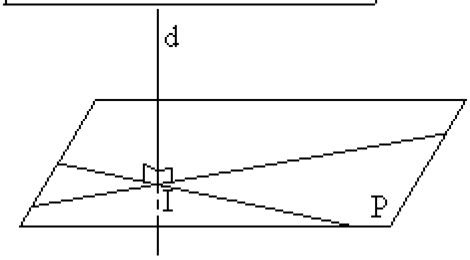
Propriété 5 : Si deux plans sont parallèles, alors toute droite de l'un des plans est parallèle à l'autre plan.



Exercice : Soit un plan P et un triangle ABC tels que (AB) et (AC) soient parallèles à P.
a) Montrer que (BC) est parallèle à P.
b) Montrer que la médiane du triangle ABC, issue de A, est parallèle à P.

V. Orthogonalité

a) orthogonalité d'une droite et d'un plan



Définition : I est le point d'intersection d'une droite *d* et d'un plan P.
On dit que la droite *d* et le plan P sont **orthogonaux** si *d* est perpendiculaire à deux droites de P passant par I.

Propriété 1 :
- Deux plans orthogonaux à une même droite sont parallèles.
- Si deux plans sont parallèles, toute droite orthogonale à l'un est orthogonale à l'autre.

Propriété 2 :
- Si deux droites sont parallèles, tout plan orthogonal à l'une est orthogonal à l'autre.
- Deux droites orthogonales à un même plan sont parallèles.

b) orthogonalité de deux droites du plan

Définition : Dire que deux droites *d* et Δ (non nécessairement coplanaires) sont **orthogonales** signifie que les parallèles à *d* et Δ menées par un point I quelconque sont perpendiculaires.

Propriété 3 : Si une droite *d* et un plan P sont orthogonaux, alors *d* est orthogonale à toute droite Δ contenue dans P.

Propriété 4 : Pour qu'une droite *d* et un plan P soient orthogonaux, il suffit que *d* soit orthogonale à deux droites sécantes de P.

c) plan médiateur

Définition : Soient A et B deux points. Le plan médiateur de [AB] est le plan perpendiculaire à (AB) et passant par le milieu de [AB].

Propriété : Le plan médiateur d'un segment [AB] est l'ensemble des points de l'espace équidistants de A et de B.