I. Quelques règles (axiomes d'incidence)

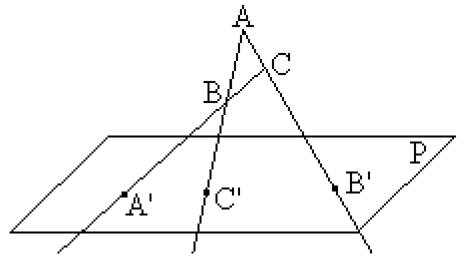
Axiome 1 : Par deux points distincts A et B passe une seule droite. Cette droite est notée (AB).

Axiome 2 : Par trois points non alignés A, B et C passe un seul plan. Ce plan est noté (ABC).

Axiome 3 : Si A et B sont deux points d'un plan P, tous les points de la droite (AB) appartiennent au plan P.

Axiome 4 : Si deux plans sont sécants, leur intersection est une droite.

Exercice : P est un plan ; A, B, C sont trois points non alignés qui n'appartiennent pas à P. On suppose que (AB) coupe P en C', que (AC) coupe P en B' et que (BC) coupe P en A'.
Montrer que les points A', B' et C' sont alignés.

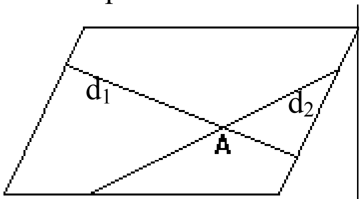


II. Position relative de droites et de plans

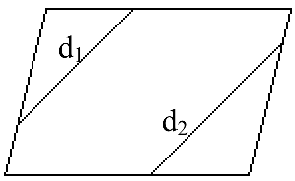
a) Position relative de deux droites

Deux droites de l'espace sont :

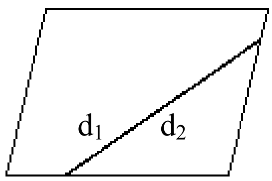
• soit coplanaires



d_1 et d_2 sont sécantes en A.

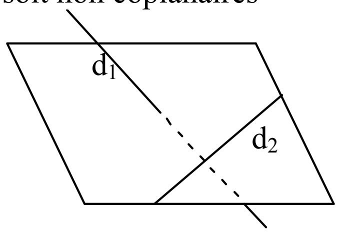


d_1 et d_2 sont strictement parallèles



d_1 et d_2 sont confondues

• soit non coplanaires

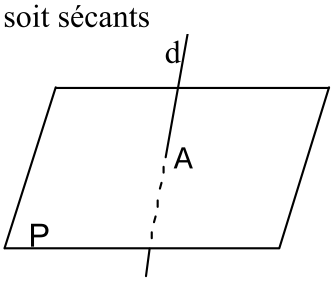


Aucun plan ne contient d_1 et d_2.

b) Position relative d'une droite et d'un plan

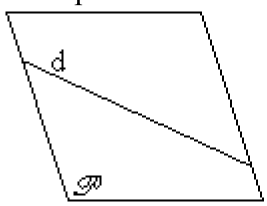
Une droite et un plan de l'espace sont :

• soit sécants

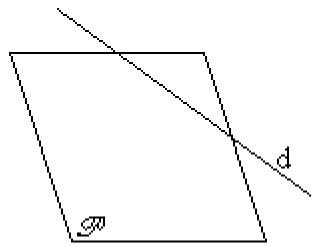


d et P ont un point d'intersection A

• soit parallèles



d est contenue dans P.

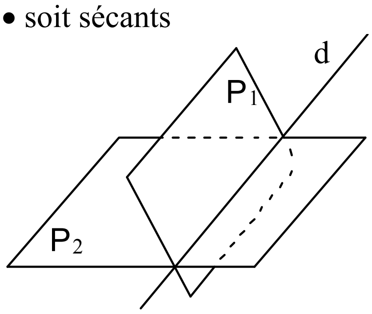


d et P sont strictement parallèles.

c) Position relative de deux plans

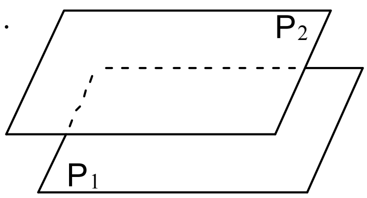
Deux plans sont :

• soit sécants



P_1 et P_2 ont une droite d'intersection d

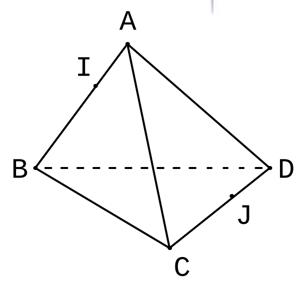
• soit parallèles



P_1 et P_2 sont strictement parallèles

P_1 et P_2 sont confondus

Exercice :
Déterminer l'intersection de plans sécants :
ABCD est un tétraèdre.
I et J sont des points des arêtes [AB] et [CD].
Déterminer l'intersection des plans (ABJ) et (CDI).

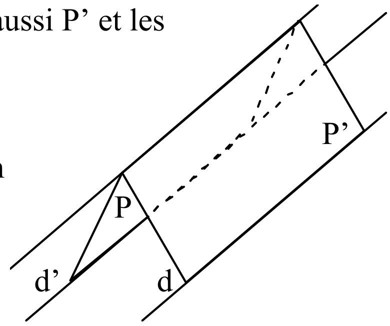


III. Le parallélisme dans l'espace

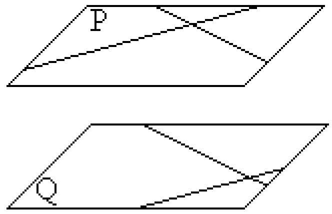
a) Parallélisme entre droites

Propriété 1 :
Si P et P' sont deux plans parallèles, alors tout plan Q qui coupe P coupe aussi P' et les droites d'intersection sont parallèles.

Propriété 2 : (théorème du toit)
d et *d'* sont deux droites parallèles. P est un plan contenant *d*, et P' un plan contenant *d'*. Si, en outre, les plans P et P' sont sécants, alors la droite Δ d'intersection de ces plans est parallèle à *d* et à *d'*.



b) Parallélisme entre plans



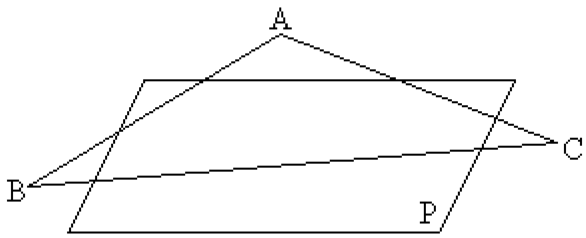
Propriété 3 :
Si deux droites sécantes d'un plan P sont respectivement parallèles à deux droites sécantes d'un plan Q, alors les plans P et Q sont parallèles.

c) Parallélisme entre droite et plan

Propriété 4 :
Si une droite *d* est parallèle à une droite *d'*, alors la droite *d* est parallèle à tout plan contenant la droite *d'*.

Propriété 5 :
Si deux plans sont parallèles, alors toute droite de l'un des plans est parallèle à l'autre plan.

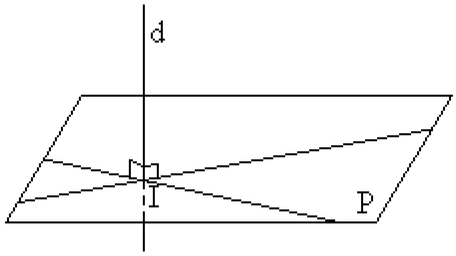
Exercice : Soit un plan P et un triangle ABC tels que (AB) et (AC) soient parallèles à P.
a) Montrer que (BC) est parallèle à P.
b) Montrer que la médiane du triangle ABC, issue de A, est parallèle à P.



IV. Orthogonalité

1) Orthogonalité d'une droite et d'un plan

Définition :
I est le point d'intersection d'une droite *d* et d'un plan P.
On dit que la droite *d* et le plan P sont **orthogonaux** si *d* est perpendiculaire à deux droites de P passant par I.



Propriété 1 :
- Deux plans orthogonaux à une même droite sont parallèles.
- Si deux plans sont parallèles, toute droite orthogonale à l'un est orthogonale à l'autre.

Propriété 2 :
- Si deux droites sont parallèles, tout plan orthogonal à l'une est orthogonal à l'autre.
- Deux droites orthogonales à un même plan sont parallèles.

2) Orthogonalité de deux droites du plan

Définition : Dire que deux droites *d* et Δ (non nécessairement coplanaires) sont **orthogonales** signifie que les parallèles à *d* et Δ menées par un point I quelconque sont perpendiculaires.

Propriété 3 :
Si une droite *d* et un plan P sont orthogonaux, alors *d* est orthogonale à toute droite Δ contenue dans P.

Propriété 4 :
Pour qu'une droite *d* et un plan P soient orthogonaux, il suffit que *d* soit orthogonale à deux droites sécantes de P.

3) Plan médiateur

Définition : Soient A et B deux points. Le plan médiateur de [AB] est le plan perpendiculaire à (AB) et passant par le milieu de [AB].

Propriété 5:
Le plan médiateur d'un segment [AB] est l'ensemble des points de l'espace équidistants de A et de B.

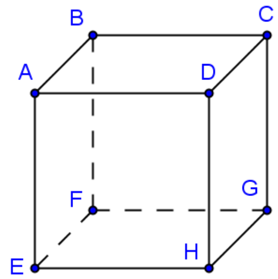
4) Orthogonalité de plans

Définition
Deux plans ***(P)*** et ***(Q)*** sont dits perpendiculaires lorsque l'un d'eux contient une droite orthogonale à l'autre plan.

Propriété 6
Si deux plans sécants ***(P)*** et ***(P')*** sont perpendiculaires à un plan***(Q)*** alors la droite d'intersection est perpendiculaire au plan (**Q**).

Exemples
Dans un cube *ABCDEFGH*

- Les plans (CBF) et (ABC) sont perpendiculaires



- Les plans (AED) et (HDB) sont perpendiculaires au plan (ABC) donc l'intersection des deux plans (AED) et (HDB) est la droite (HD), elle est perpendiculaire au plan (ABC).

Remarque
Lorsque deux plans sont perpendiculaires, il existe dans chacun d'eux, des droites non orthogonales à l'autre : par exemple, la droite (FC) qui est contenue dans le plan (BCF) n'est pas orthogonale au plan (ABC) mais (BCF) est perpendiculaire au plan (ABC).

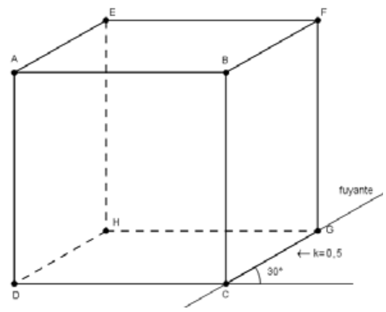
V. Surfaces et volumes de solide

1) Les polyèdres

a) Définition

Un solide est un corps indéformable.
Un polyèdre est un solide qui possède plusieurs faces.
Le nombre de faces minimum est de 4 : **le tétraèdre**.

Exemple :
Représentation d'un cube avec un angle pour les fuyante de 30°et un coefficient de réduction de 0,5.



Remarque :
Dans cette représentation les distances ne sont plus conservées ainsi que les angles. Par contre le parallélisme est conservé.

b) Le prisme droit

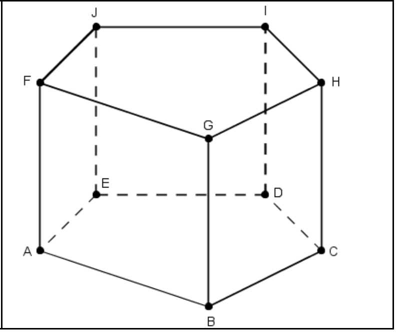
Définition
Un prisme droit est un polyèdre ayant pour bases 2 polygones isométriques parallèles dont les faces latérales sont des rectangles

Exemple

Si les bases ont n côtés alors le prisme droit a :

- n + 2 faces
- 2n sommets
- 3n arêtes

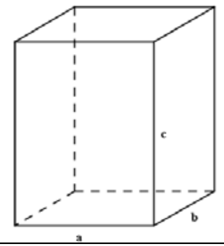
Volume =Aire de la base x hauteur
Surface =2x(Aire de la base)
(Fond et couvercle) + Somme des Aires des rectangles (Aire latérale)



Cas particulier: Parallélépipède rectangle ou pavé droit.

Lorsque le prisme a pour base un rectangle, le prisme est un **parallélépipède rectangle** ou **pavé** droit

Parallélépipède rectangle Volume = abc Surface = 2(ab + ac + bc)	**Cube** : si a = b = c Volume = a^3 Surface = $6a^2$



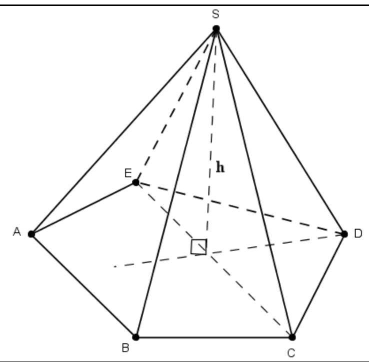
c) Pyramide

Définition
Une pyramide est un polyèdre dont les arêtes sont obtenues en joignant les sommets d'un polygone (base) à un point non situé dans le plan de ce polygone.
Exemple

Si la base a n côtés alors la pyramide a :

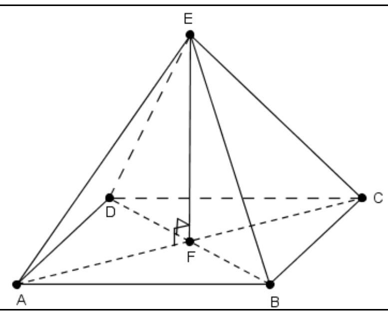
- n + 1 faces
- n + 1 sommets
- 2n arêtes

Volume =(Aire de la base x hauteur)/3
Surface = Aire la base+ Somme des Aires des triangles (Aire latérale)



Cas particulier

La pyramide à base carré et le tétraèdre sont des cas particulier de pyramide.

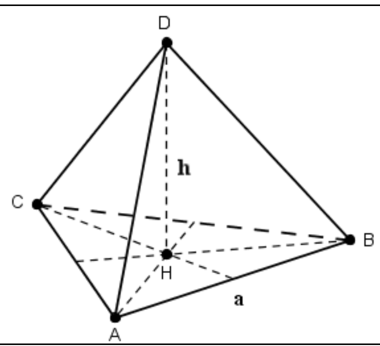


Un tétraèdre régulier a 4 triangles équilatéraux comme faces.

Hauteur $= a\sqrt{\dfrac{2}{3}}$

Volume = $\dfrac{\sqrt{2}a^3}{12}$

Surface = $4 \times Aire_{ABC} = \sqrt{3}a^2$



2) Solide de révolution

a) Le sylindre

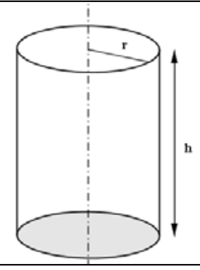
Définition

Un cylindre est obtenu par rotation d'une droite parallèle à l'axe de rotation

La droite qui engendre par rotation
le cylindre s'appelle une génératrice

Volume $= \pi r^2 h$

Surface $= \underbrace{2\pi rh}_{laterale} + \underbrace{2\pi r^2}_{fond\ \text{et couvercle}}$



b) Le cone

Définition:

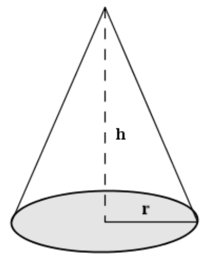
Un cône est obtenu par rotation d'une droite sécante à l'axe de rotation

La droite qui engendre par rotation le cône s'appelle une génératrice

Volume $= \dfrac{\pi r^2 h}{3}$

Surface $= \underbrace{\pi ra}_{laterale} + \underbrace{\pi r^2}_{fond}$

Avec $a = \sqrt{r^2 + h^2}$



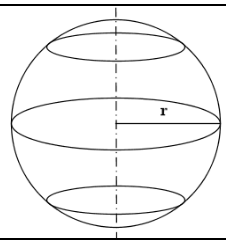
c) La sphére

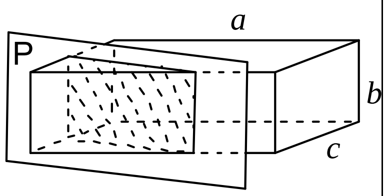
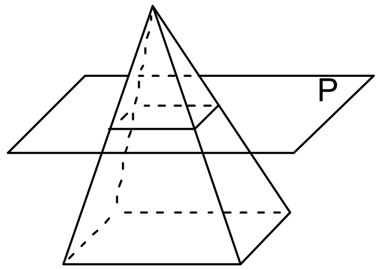
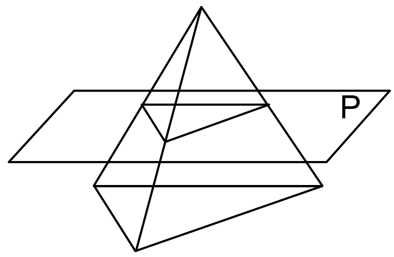
Définition:

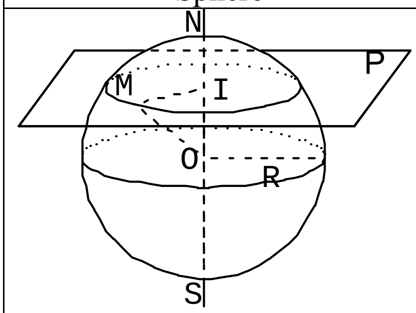
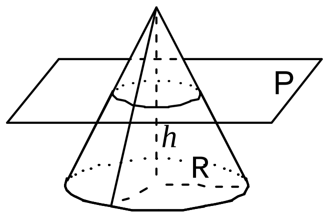
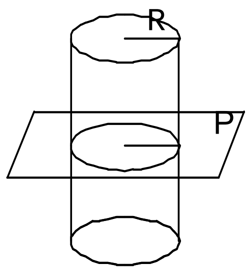
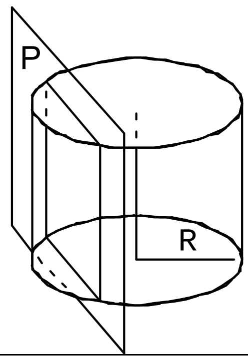
Une sphère est un ensemble de points de l'espace qui sont équidistants d'un centre.

Volume $= \dfrac{4}{3}\pi r^3$

Surface $= 4\pi r^2$

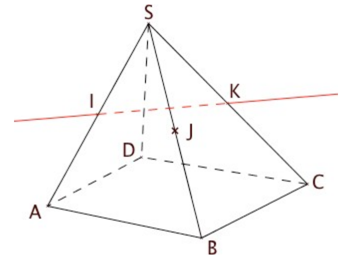


Pavé droit	Pyramide	Tétraèdre
		 Un tétraèdre est une pyramide à base triangulaire
$V = abc$ Si le plan P est parallèle à une arête, la section est un rectangle.	$V = \frac{1}{3}$ Base $\times$ hauteur Si P est parallèle à la base, la section est un polygone dont les côtés sont parallèles à ceux de la base.	$V = \frac{1}{3}$ Base $\times$ hauteur Si P est parallèle à l'une des faces, la section est un triangle dont les côtés sont parallèles à ceux de la base

Sphère	cône de révolution	cylindre de révolution
		 
$V = \frac{4}{3}\pi R^3$ La section est un cercle. Si [NS] est le diamètre de la sphère, orthogonal au plan P en I, alors I est le centre du cercle.	$V = \frac{1}{3}(\pi R^2) \times h$ Si P est parallèle à la base, la section est un cercle dont le centre se trouve sur l'axe du cône.	$V = \pi R^2 \times$ hauteur • Si P est parallèle aux bases, la section est un cercle de même rayon que le cylindre et dont le centre se trouve sur l'axe du cylindre. • Si P est parallèle à l'axe, la section est un rectangle.

Exercice 1: Démontrer qu'une droite est parallèle à un plan

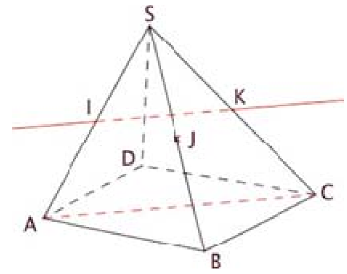
1. SABCD est une pyramide. I, J et K sont les milieux respectifs de [SA], [SB] et [SC]. Démontrer que la droite (IK) est parallèle au plan ABC.
2. Démontrer que les plans (IJK) et (ABC) sont parallèles.



1. Dans le plan (SAC), on applique le théorème des milieux : I et K sont les milieux respectifs de [SA] et [SC], donc la droite (IK) est parallèle à la droite (AC).

   Pour prouver qu'une droite est parallèle à un plan, il suffit de prouver que cette droite est parallèle à une droite de ce plan.

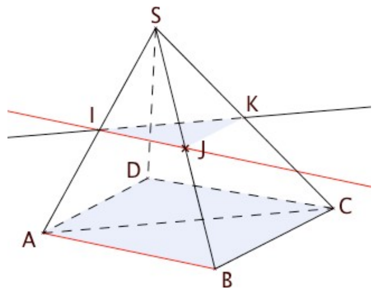
   Comme (AC) est une droite du plan (ABC) et que (IK) // (AC), on en déduit que (IK) est parallèle au plan (ABC).



2. On a démontré dans la question précédente que (IK) est parallèle au plan (ABC). On démontrerait de même que (IJ) est parallèle au plan (ABC).

   Les droites (IK) et (IJ), sécantes en I, sont parallèles au plan (ABC), d'après le théorème des plans parallèles, on en déduit que le plan (IJK) est parallèle au plan ABC).

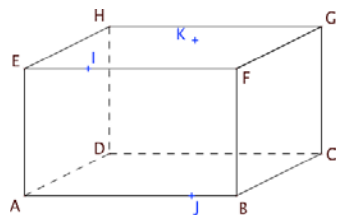
   Pour prouver que deux plans sont parallèles, il suffit de trouver deux droites sécantes d'un plan qui sont parallèles à l'autre plan (théorème des plans parallèles.



Exercice 2: Construire la section d'un solide par un plan

ABCDEFGH est un pavé droit. I est un point de l'arête [EF],

J est un point de l'arête [AB] et K est un point de la face EFGH. Construire la section du pavé par le plan (IJK).



- Le plan (IJK) coupe la face ABFE suivant la droite (IJ). On commence donc par tracer le segment [IJ].
- Le plan (IJK) coupe la face EFGH suivant la droite (IK). Soit L le point d'intersection de la droite (IK) avec l'arête [HG]. On trace le segment [IL].
- D'après le théorème des plans parallèles 2, les faces ABFE et DCGH étant parallèles, le plan (IJK) coupe la face DCGH suivant une droite parallèle à (IJ). Le plan (IJK) coupe donc la face DCGH suivant la droite parallèle à (IJ) et passant par L. On trace cette droite qui coupe l'arête [CG] en M.
- On justifie de même que le plan (IJK) coupe la face ABCD suivant la droite parallèle à (IK) passant par J. On trace cette droite qui coupe l'arête [BC] en N.
- Pour finir la section, on trace le segment [MN].