

PRODUIT SCALAIRE

Exercice1 : Soit ABC un triangle rectangle et isocèle en A et $AB = 2cm$

Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CB}$

Solution :

On a $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AA}$ car :

A est le projeté orthogonale de C

sur (AB) et B est le projeté

orthogonale de B sur (AB)

et A est le projeté orthogonale de C sur (AB)

donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{AB} \times \vec{0} = 0$

de même On a $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BA} = 2 \times 2 = 4$

de même On a $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{AB} = -2 \times 2 = -4$

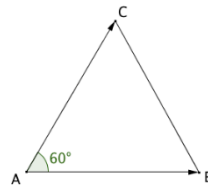
Exercice2 : Soit un triangle équilatéral ABC de côté a.

Calculer : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

Solution :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\| \times \cos BAC$$

$$= a \times a \times \cos \frac{\pi}{3} = a^2 \times \frac{1}{2} = \frac{a^2}{2}$$

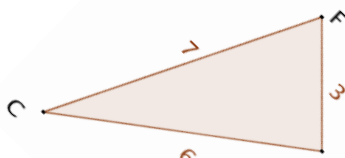


Exercice3 : Soit CFG un triangle tel que $CF = 7$ et $CG = 6$ et $FG = 3$

Calculer : $\overrightarrow{CG} \cdot \overrightarrow{CF}$

Solution :

$$\overrightarrow{CG} \cdot \overrightarrow{CF} = \frac{1}{2} (CG^2 + CF^2 - GF^2) = \frac{1}{2} (6^2 + 7^2 - 3^2) = 38$$



Exercice4 : soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs tels que :

$$\|\vec{u}\| = \frac{5}{2}\sqrt{2} \text{ et } \|\vec{v}\| = 4 \text{ et } (\vec{u}; \vec{v}) = \frac{\pi}{4} [2\pi]$$

Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$

Solution :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{5}{2} \times 4 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2}$$

Exercice5 : Soit EFG un triangle tel que : $EF = 5$

$EG = 3$ et $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{EG} = -6$ calculer : $\cos(FEG)$

Solution : $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{EG} = \|\overrightarrow{EF}\| \times \|\overrightarrow{EG}\| \cos(FEG) = -6$

$$\text{Ssi } EF \times EG \cos(FEG) = -6 \quad \text{Ssi } 5 \times 3 \cos(FEG) = -6$$

$$\text{Ssi } \cos(FEG) = -\frac{6}{15} = -\frac{2}{5}$$

Exercice6 : Soit ABC un triangle tel que : $AB = 3$

$AC = 4$ et $BAC = \frac{2\pi}{3}$

Calculer : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

Solution : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\| \times \cos \hat{A} = AB \times AC \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 3 \times 4 \cos\left(\frac{3\pi - \pi}{3}\right) = 12 \cos\left(\frac{3\pi}{3} - \frac{\pi}{3}\right) = 12 \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 3 \times 4 \cos\left(\frac{3\pi - \pi}{3}\right) = 12 \cos\left(\frac{3\pi}{3} - \frac{\pi}{3}\right) = -12 \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

Car : $\cos(\pi - x) = -\cos x$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -6$$

Exercice7 : 1) Soit ABC un triangle tel que $AB = 7$ et

$AC = 5$ et $BC = 6$

a) Calculer $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC}$ et en déduire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

b) Soit H le projeté orthogonal de C sur la droite (AB)

Calculer AH

2) sachant que $\|\vec{u}\| = 4$ et $\|\vec{v}\| = 2$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = -\frac{1}{2}$

$$\text{a) Calculer : } A = (2\vec{u} - 3\vec{v}) \cdot (\vec{u} + 2\vec{v}) \text{ et } B = \left(\frac{\vec{u}}{2} - \vec{v}\right) \cdot \left(\vec{u} + \frac{\vec{v}}{2}\right)$$

$$C = (\vec{u} - \vec{v})^2 \text{ et } D = (2\vec{u} + 3\vec{v})^2$$

b) en déduire $E = \|\vec{u} - \vec{v}\|$ et $F = \|2\vec{u} + 3\vec{v}\|$

Solution :

1) Calcul de $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC}$

$$\text{On a } \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2} (\|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\|^2 - \|\overrightarrow{BA}\|^2 - \|\overrightarrow{AC}\|^2)$$

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2} (\|\overrightarrow{BC}\|^2 - \|\overrightarrow{BA}\|^2 - \|\overrightarrow{AC}\|^2)$$

$$= \frac{1}{2} (BC^2 - AB^2 - AC^2) = \frac{1}{2} (6^2 - 7^2 - 5^2) = -19$$

donc : $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} = -19$

donc : On a $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} = 19$

a) Calcul de AH

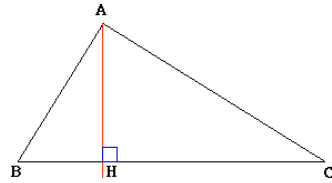
$$\text{On a } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AH \text{ donc : } AH = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{AB} = \frac{19}{7}$$

$$2) \text{ a) } A = (2\vec{u} - 3\vec{v}) \cdot (\vec{u} + 2\vec{v}) = 2\vec{u} \cdot \vec{u} + 4\vec{u} \cdot \vec{v} - 3\vec{u} \cdot \vec{v} - 6\vec{v} \cdot \vec{v}$$

$$A = (2\vec{u} - 3\vec{v}) \cdot (\vec{u} + 2\vec{v}) = 2\vec{u} \cdot \vec{u} + 4\vec{u} \cdot \vec{v} - 3\vec{u} \cdot \vec{v} - 6\vec{v} \cdot \vec{v}$$

$$A = 2\vec{u}^2 + \vec{u} \cdot \vec{v} - 6\vec{v}^2 = 2\|\vec{u}\|^2 + \vec{u} \cdot \vec{v} - 6\|\vec{v}\|^2 = 2 \times 4^2 + \frac{1}{2} - 6 \times 2^2$$

$$A = 32 + \frac{1}{2} - 24 = \frac{15}{2}$$



$$B = \left(\frac{\vec{u}}{2} - \vec{v} \right) \cdot \left(\frac{\vec{u}}{2} + \frac{\vec{v}}{2} \right) = \frac{1}{2} \vec{u} \cdot \vec{u} + \frac{1}{4} \vec{u} \cdot \vec{v} - \frac{1}{2} \vec{v} \cdot \vec{u} - \frac{1}{2} \vec{v} \cdot \vec{v}$$

$$B = \frac{1}{2} \times \|\vec{u}\|^2 - \frac{3}{4} \times \vec{u} \cdot \vec{v} - \frac{1}{2} \times \|\vec{v}\|^2 = \frac{1}{2} \times 4^2 - \frac{3}{4} \times \left(-\frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2} \times 2^2$$

$$B = 8 + \frac{3}{2} - 2 = \frac{51}{8}$$

$$C = (\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2 = 4^2 - 2 \left(-\frac{1}{2} \right) + 2^2$$

$$C = 16 + 1 + 4 = 21$$

$$D = (2\vec{u} + 3\vec{v})^2 = 4\vec{u}^2 + 12\vec{u} \cdot \vec{v} + 9\vec{v}^2 = 4\|\vec{u}\|^2 + 12\vec{u} \cdot \vec{v} + 9\|\vec{v}\|^2$$

$$D = 4 \times 4^2 + 12 \left(-\frac{1}{2} \right) + 9 \times 2^2 = 64 - 6 + 36 = 94$$

$$b) (\vec{u} - \vec{v})^2 = 21 \quad \text{donc} \quad \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = 94 \quad \text{donc} \quad \|\vec{u} - \vec{v}\| = \sqrt{94}$$

$$(2\vec{u} + 3\vec{v})^2 = 94 \quad \text{donc} \quad \|2\vec{u} + 3\vec{v}\|^2 = 94 \quad \text{donc}$$

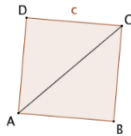
$$\|2\vec{u} + 3\vec{v}\| = \sqrt{94}$$

Exercice8 : Soit un carré ABCD de côté c.

Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

Solution :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \|\overrightarrow{AB}\|^2 = c^2$$



Exercice9 : Soit ABC un triangle rectangle en A et H est le projeté orthogonal du point A sur la droite (BC)

Montrer que :

$$1) AB^2 + AC^2 = BC^2$$

$$2) AC \times AB = AH \times BC$$

Solution :1)

$$BC^2 = \overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})^2 = \overrightarrow{BA}^2 + 2\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}^2$$

On a : $\overrightarrow{BA} \perp \overrightarrow{AC}$ car ABC un triangle rectangle en A

$$\text{Donc : } BC^2 = BA^2 + AC^2$$

$$2) \text{ on considère le triangle : } (ABC) \text{ donc : } \sin \hat{B} = \frac{AC}{BC}$$

$$\text{Et on considère le triangle : } (ABH) \text{ donc : } \sin \hat{B} = \frac{AH}{AB}$$

$$\text{Donc : } \frac{AC}{BC} = \frac{AH}{AB} \text{ donc : } AC \times AB = AH \times BC$$

Exercice10 : Soit ABC un triangle rectangle en A et H est le projeté orthogonal du point A sur la droite (BC)

$$\text{et } AH = 2\text{cm et } \angle ABC = \frac{\pi}{3}$$

Calculer AB et BH et BC

Réponse :

a) On a ABH un triangle rectangle en H

$$\text{donc : } \sin(\angle ABC) = \frac{AH}{AB}$$

$$\text{Donc : } AB = \frac{AH}{\sin(\angle ABC)} = \frac{2}{\sin(\frac{\pi}{3})} = \frac{2}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2 \times \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{4}{3}\sqrt{3}$$

b) On a $AB^2 = AH^2 + HB^2$ car ABH un triangle rectangle en H

$$\text{Donc : } AB^2 - AH^2 = HB^2 \quad \text{Donc : } \left(\frac{4}{3}\sqrt{3} \right)^2 - 2^2 = HB^2$$

$$\text{Donc : } \frac{16}{3} - 2^2 = HB^2 \quad \text{Donc : } HB^2 = \frac{4}{3}$$

$$HB = \sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{2}{3}\sqrt{3}$$

$$c) \text{ On a } BA^2 = BH \times BC \quad \text{Donc : } BC = \frac{BA^2}{BH}$$

$$\text{Donc : } BC = \frac{\left(\frac{4}{3}\sqrt{3} \right)^2}{\frac{2}{3}\sqrt{3}} = \frac{\left(\frac{4}{3}\sqrt{3} \right)^2}{\frac{2}{3}\sqrt{3}} = \frac{8}{3}\sqrt{3}$$

Exercice11 : Soit ABC un triangle tel que et $AB = 5$ et

$$AC = 8 \text{ et } \angle A = \frac{2\pi}{3} \quad \text{Calculer } BC \text{ et } \cos C$$

Réponse :

a) D'après le Théorème d'Al Kashi on a :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \cos A$$

$$BC^2 = 5^2 + 8^2 - 2 \times 5 \times 8 \cos \frac{2\pi}{3} \quad \text{donc}$$

$$BC^2 = 25 + 64 + 40 = 129 \quad \text{donc} \quad BC = \sqrt{129}$$

b) D'après le Théorème d'Al Kashi on a :

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2CA \times CB \cos C \quad \text{donc}$$

$$2CA \times CB \cos C = AC^2 + BC^2 - AB^2$$

$$\text{donc} \quad \cos C = \frac{AC^2 + BC^2 - AB^2}{2CA \times CB} \quad \text{donc}$$

$$\cos C = \frac{64 + 129 - 25}{2 \times 8 \times \sqrt{129}} = \frac{168}{16\sqrt{129}} = \frac{21\sqrt{129}}{258}$$

Exercice12 : Soit EFG un triangle tel que et $EF = 7$

$$\text{et } EG = 5 \text{ et } \angle FEG = \frac{\pi}{4}$$

Calculer FG et $\cos EGF$

Exercice13 : Soit ABC un triangle tel que et $BC = 4cm$
 $AC = 6cm$ et $AB = 3cm$ et I le milieu du segment $[BC]$

Calculer : AI

Réponse : D'après le théorème de la médiane dans le triangle ABC on a :

$$AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{1}{2} BC^2$$

$$\text{Donc : } 3^2 + 6^2 = 2AI^2 + \frac{1}{2} 4^2 \text{ donc : } 9 + 36 = 2AI^2 + \frac{16}{2}$$

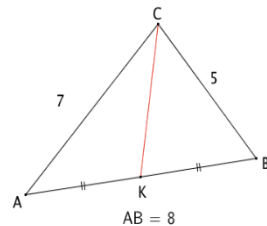
$$\text{Donc : } AI^2 = \frac{37}{2} \text{ par suite : } AI = \sqrt{\frac{37}{2}}$$

Exercice14 : Soit ABC un triangle tel que : $BC = 5$;
 $AC = 7$ Et $AB = 8$ et K le milieu du segment $[AB]$.
 calculer CK .

Réponse : D'après le théorème de la médiane, on a :

$$CA^2 + CB^2 = 2CK^2 + \frac{AB^2}{2}$$

donc :



$$CK^2 = \frac{1}{2} \left(CA^2 + CB^2 - \frac{AB^2}{2} \right) = \frac{1}{2} \left(7^2 + 5^2 - \frac{8^2}{2} \right) = 21$$

$$\text{Donc : } CK = \sqrt{21}.$$

Exercice15 : soit ABM un triangle tel que : $AM = 3cm$
 Et $BM = 4cm$ et $AB = 4cm$

I le milieu du segment $[AB]$. Et J le milieu de $[AM]$

Et K le milieu du segment $[BM]$

Calculer : MI et AK et BJ

Réponse :1) calcul de MI

D'après le théorème de la médiane dans ABM on a :

$$MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2} AB^2 \text{ donc } 3^2 + 4^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2} 4^2$$

$$\text{Donc : } 9 + 16 = 2MI^2 + \frac{16}{2} \text{ donc : } MI^2 = \frac{17}{2} \text{ donc : } MI = \sqrt{\frac{17}{2}}$$

calcul de AK

D'après le théorème de la médiane dans ABM

$$\text{Donc : } AB^2 + AM^2 = 2AK^2 + \frac{1}{2} BM^2$$

$$\text{Donc : } 2^2 + 3^2 = 2AK^2 + \frac{1}{2} 4^2 \text{ donc : } AK^2 = \frac{17}{2} \text{ donc : } AK = \sqrt{\frac{17}{2}}$$

calcul de BJ

D'après le théorème de la médiane dans ABM

$$\text{Donc : } AB^2 + BM^2 = 2BJ^2 + \frac{1}{2} AM^2$$

$$\text{Donc : } 4^2 + 4^2 = 2BJ^2 + \frac{1}{2} 3^2$$

$$\text{Donc : } \frac{55}{2} = 2BJ^2 \text{ donc : } BJ^2 = \frac{55}{4} \text{ donc : } BJ = \frac{\sqrt{55}}{2}$$

Exercice16 : Soit $EFGH$ un parallélogramme tel que et

$$EF = 3 \text{ et } EH = 5 \text{ et } FEH = \frac{3\pi}{4}$$

Calculer la Surface du triangle EFH et la Surface du parallélogramme $EFGH$

Réponse : a)

$$S_{EFH} = \frac{1}{2} EF \times EH \sin E = \frac{1}{2} 3 \times 5 \sin \frac{3\pi}{4} = \frac{15}{2} \sin \left(\pi - \frac{\pi}{4} \right)$$

$$S_{EFH} = \frac{15}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{15}{4} \sqrt{2}$$

$$\text{b) } S_{EFGH} = 2 \times S_{EFH} = 2 \times \frac{15}{4} \sqrt{2} = \frac{15}{2} \sqrt{2}$$

Exercice17 :: Soit ABC

un triangle tel que :

$$a = BC = 6 \text{ et } A = 30^\circ \text{ et}$$

$$B = 73^\circ$$

Calculer b et c

Réponse

D'après la formule de sinus on a :

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} = \frac{2 \times S}{abc}$$

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin 30^\circ}{6} = \frac{1}{12} \text{ donc } \frac{\sin 73^\circ}{b} = \frac{1}{12} \text{ donc}$$

$$b = 12 \sin 73^\circ = 11.47$$

$$\frac{\sin 77^\circ}{c} = \frac{1}{12} \text{ donc } c = 12 \sin 77^\circ = 11.69$$

Exercice18 : soit ABC un triangle tel que : $AB = 1$

Et $AC = \sqrt{2}$ et $CB = 2$ et D un point tel que :

$$\overrightarrow{DB} + 2\overrightarrow{DC} = \vec{0}$$

1) Montrer que : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -\frac{1}{2}$ et en déduire : $\cos A$

2) Ecrire \overrightarrow{AD} en fonction de \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC}

3) Calculer $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB}$ et en déduire la nature du triangle ABD

4) Calculer : AD

5) Soit I le milieu du segment $[BC]$ et J le milieu du segment $[AC]$

Calculer : AI et BJ

Réponse :1) D'après le Théorème d'Al Kashi dans ABC

$$\text{on a : } BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \cos A$$

$$\text{Et on a : } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\| \times \cos \hat{A} = AB \times AC \times \cos \hat{A}$$

$$\text{Donc : } BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$$

$$\text{Donc : } 2^2 = 1^2 + \sqrt{2}^2 - 2\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$$

$$\text{Donc : } 4 = 1 + 2 - 2\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \text{ donc : } 1 = -2\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$$

Donc : $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = -\frac{1}{2}$

Déduction de $\cos A$: on a : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos \hat{A}$

Donc : $-\frac{1}{2} = AB \times AC \times \cos \hat{A}$ donc : $-\frac{1}{2} = 1 \times \sqrt{2} \times \cos \hat{A}$

Donc : $\cos \hat{A} = \frac{-\frac{1}{2}}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{2\sqrt{2}} = -\frac{1}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2(\sqrt{2})^2} = -\frac{\sqrt{2}}{4}$

2) $\overrightarrow{DB} + 2\overrightarrow{DC} = \vec{0}$ ssi $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} + 2(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC}) = \vec{0}$

$\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{DA} + 2\overrightarrow{AC} = \vec{0}$ ssi $\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{DA} + 2\overrightarrow{AC} = \vec{0}$

Ssi $\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AD}$ donc : $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC})$

3) $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB})$

$= \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}^2 + 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{3}(AB^2 + 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{3}\left(1 + 2\left(-\frac{1}{2}\right)\right) = 0$

Donc : $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ par suite : $\overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{AB}$

Et donc : ABD est un triangle rectangle en A

4) on a : $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC})$

donc : $\overrightarrow{AD}^2 = \left(\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC})\right)^2$ donc :

$AD^2 = \frac{1}{9}\left((\overrightarrow{AB})^2 + (2\overrightarrow{AC})^2 + 4\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}\right) = \frac{1}{9}(AB^2 + 4\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + 4AC^2)$

$AD^2 = \frac{1}{9}\left(1 + 4\left(-\frac{1}{2}\right) + 4 \times 2\right) = \frac{1}{9}(1 - 2 + 8) = \frac{7}{9}$

Donc : $AD = \sqrt{\frac{7}{9}} = \frac{\sqrt{7}}{3}$

5) a) D'après le théorème de la médiane dans ABC on a :

$AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{1}{2}BC^2$ donc $1^2 + \sqrt{2}^2 = 2AI^2 + \frac{1}{2}2^2$

Ssi $3 = 2AI^2 + 2$ ssi $1 = 2AI^2$ ssi $AI^2 = \frac{1}{2}$ ssi $AI = \sqrt{\frac{1}{2}}$

b) D'après le théorème de la médiane dans ABC on a :

$BA^2 + BC^2 = 2BJ^2 + \frac{1}{2}AC^2$

Donc : $1^2 + 2^2 = 2BJ^2 + \frac{1}{2}\sqrt{2}^2$ ssi $5 = 2BJ^2 + 1$

Ssi $BJ^2 = 2$ ssi $BJ = \sqrt{2}$

Exercice19: soit ABC un triangle tel que : $AB = \sqrt{7}$

Et $AC = 2$ et $BC = 3$

I le milieu du segment $[BC]$

• a) Calculer : $\cos(\hat{BAC})$

b) Montrer que : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 1$

c) Calculer AI

2) soit M un point tel que : $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$

a) Calculer : $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AC}$

b) montrer que : $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$

c) que peut-on déduire des droites : (MB) et (AC) ?

Réponse : 1) a)

D'après le Théorème d'Al Kashi dans ABC on a :

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \cos A$

Donc : $9 = 4 + 7 - 4\sqrt{7} \cos(A)$

Donc : $-2 = -4\sqrt{7} \cos(A)$ donc :

$\cos(A) = \frac{2}{4\sqrt{7}} = \frac{1}{2\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}}{2(\sqrt{7})^2} = \frac{\sqrt{7}}{14}$

1) b) on a $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos \hat{A}$

Donc : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2 \times \sqrt{7} \times \frac{\sqrt{7}}{14} = 2 \times \frac{(\sqrt{7})^2}{14} = \frac{14}{14} = 1$

1) c) D'après le théorème de la médiane dans ABC on a :

Donc : $AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{1}{2}BC^2$

Donc : $\sqrt{7}^2 + 2^2 = 2AI^2 + \frac{1}{2}3^2$

Donc : $11 = 2AI^2 + \frac{9}{2}$ donc $AI^2 = \frac{13}{4}$ Donc : $AI = \sqrt{\frac{13}{4}}$

2) a) $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AC} = \left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}\right) \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{6}\overrightarrow{AC}^2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}AC^2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \times 4 = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1$

2) b) $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{AC} = (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}) \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -1 + 1 = 0$

2) b) donc : $\overrightarrow{MB} \perp \overrightarrow{AC}$ par suite : $(MB) \perp (AC)$

Exercice20 : soit ABC un triangle tel que $AB = 1$

Et $BC = AC = \sqrt{2}$

I le milieu du segment $[AB]$ et D un point tel que :

$\overrightarrow{DB} - 2\overrightarrow{DC} = \vec{0}$

1) calculer CI

2) calculer \overrightarrow{AD} en fonction de \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC}

3) montrer que : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AI}$

4) en déduire que : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}$ et en déduire $\cos BAC$

5) calculer : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$ et en déduire la nature du

triangle BAD

6) soit le point M tel que : $-3\overrightarrow{MA} + 7\overrightarrow{MC} = \vec{0}$

a) calculer \overrightarrow{AD} en fonction de \overrightarrow{AC} et calculer $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}$

b) montrer que $(MD) \perp (AC)$

Réponse : 1) a) D'après le théorème de la médiane dans

$$ABC \text{ on a : } BC^2 + AC^2 = 2CI^2 + \frac{1}{2}AB^2$$

$$\text{Donc : } 4 = 2CI^2 + \frac{1}{2} \text{ donc : } \frac{7}{4} = CI^2 \text{ donc : } CI = \sqrt{\frac{7}{4}} = \frac{\sqrt{7}}{2}$$

$$2) \quad \overrightarrow{DB} - 2\overrightarrow{DC} = \vec{0} \text{ ssi } \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} - 2(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC}) = \vec{0}$$

$$\text{Ssi } \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{DA} - 2\overrightarrow{AC} = \vec{0} \text{ ssi } -\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC} = \vec{0}$$

$$\text{Ssi } \overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$$

$$3) \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IC}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IC}$$

On a : I le milieu du segment $[AB]$ et ABC isocèle en C

$$\text{Donc : } (IC) \perp (AB) \text{ cad } \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{IC} \text{ donc : } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IC} = 0$$

$$\text{Par suite : } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AI}$$

$$4) \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AI} = \|\overrightarrow{AB}\| \cdot \|\overrightarrow{AI}\| \cos 0 = AB \cdot AI \cdot 1 = AB \cdot \frac{AB}{2} \cdot \cos 0$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Calcul de : $\cos BAC$

$$\text{On a : } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2} \text{ donc : } AB \times AC \times \cos \hat{A} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Ssi } 1 \times \sqrt{2} \times \cos \hat{A} = \frac{1}{2} \text{ ssi } \cos \hat{A} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \text{ ssi } \cos \hat{A} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$5) \text{ on a : } \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} \text{ donc : } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} \cdot (2\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})$$

$$\text{Ssi } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB}$$

$$\text{Donc : } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}^2 = 2 \times \frac{1}{2} - AB^2 = 1 - 1 = 0$$

Donc : $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD}$ par suite BAD est un triangle rectangle en A

$$6) a) -3\overrightarrow{MA} + 7\overrightarrow{MC} = \vec{0} \text{ ssi } -3\overrightarrow{MA} + 7(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC}) = \vec{0}$$

$$\text{Ssi } -3\overrightarrow{MA} + 7\overrightarrow{MA} + 7\overrightarrow{AC} = \vec{0}$$

$$\text{Ssi } 3\overrightarrow{AM} - 7\overrightarrow{AM} + 7\overrightarrow{AC} = \vec{0} \text{ ssi } -4\overrightarrow{AM} = -7\overrightarrow{AC} \text{ ssi } \overrightarrow{AM} = \frac{7}{4}\overrightarrow{AC}$$

Calcul de : $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}$???

$$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC} = (2\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) \cdot \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AC}^2 - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC} = 2 \times 2 - \frac{1}{2} = 4 - \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$$

$$6) \overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{AC} =$$

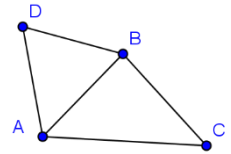
$$(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD}) \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AC} + \frac{7}{2} \text{ ssi } -\frac{7}{4} \cdot 2 + \frac{7}{2} = -\frac{7}{2} + \frac{7}{2} = 0$$

$$\overrightarrow{MD} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \text{ donc : } \overrightarrow{MD} \perp \overrightarrow{AC} \text{ par suite : } (MD) \perp (AC)$$

Exercice 21 : soit ABC un triangle isocèle en B tel que $AB = \sqrt{2}$

On construit à l'extérieur du triangle ABC le triangle équilatéral ABD (voir schéma)



1) calculer $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BD}$

2) calculer : AC et DC

3) montrer que : $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = 1 - \sqrt{3}$

4) vérifier que : $\angle DAC = \frac{7\pi}{12}$

5) en déduire : $\cos \frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$

Réponse : 1)

$$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BD} = \|\overrightarrow{BA}\| \cdot \|\overrightarrow{BD}\| \cos \hat{ABD} = AB \cdot BD \cdot \cos \frac{\pi}{3} = (\sqrt{2})^2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

$$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BD} = \|\overrightarrow{BC}\| \cdot \|\overrightarrow{BD}\| \cos \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} \right) = (\sqrt{2})^2 \times -\sin \left(\frac{\pi}{3} \right) = -2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3}$$

• D'après Pythagore on a : $AC^2 = BC^2 + AB^2$

$$AC^2 = \sqrt{2}^2 + \sqrt{2}^2 \text{ ssi } AC^2 = 4 \text{ ssi } AC = 2$$

D'après le Théorème d'Al Kashi dans BCD on a :

$$DC^2 = BC^2 + BD^2 - 2BC \times BD \cos \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} \right)$$

$$DC^2 = 2 + 2 - 2 \times 2 \times -\sin \left(\frac{\pi}{3} \right)$$

$$DC^2 = 4 + 4 \sin \left(\frac{\pi}{3} \right) = 4 + 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 4 + 2\sqrt{3}$$

$$DC = \sqrt{4 + 2\sqrt{3}}$$

• D'après le Théorème d'Al Kashi dans ACD on a :

$$DC^2 = AC^2 + AD^2 - 2AC \times AD \cos(\alpha)$$

$$DC^2 = AC^2 + AD^2 - 2\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD}$$

$$(\sqrt{4 + 2\sqrt{3}})^2 = 4 + 2 - 2\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD}$$

$$\text{Ssi } 4 + 2\sqrt{3} = 4 + 2 - 2\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD}$$

$$\text{Ssi } \overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD} = 1 - \sqrt{3}$$

$$4) \angle DAC = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} = \frac{7\pi}{12}$$

$$\text{On a : } \overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD} = 1 - \sqrt{3} \text{ donc : } AC \times AD \times \cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} \right) = 1 - \sqrt{3}$$

$$\text{Donc : } 2 \times \sqrt{2} \times \cos \left(\frac{7\pi}{12} \right) = 1 - \sqrt{3}$$

$$\text{Donc : } \cos \left(\frac{7\pi}{12} \right) = \frac{1 - \sqrt{3}}{2 \times \sqrt{2}} = \frac{(1 - \sqrt{3}) \times \sqrt{2}}{2 \times \sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$$

Exercice 22 : soit ABC un triangle isocèle en A tel que :

$$\cos(\hat{BAC}) = \frac{1}{4} \text{ et } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 16 \text{ et } I \text{ un point tel que :}$$

$\overrightarrow{BI} = \frac{3}{4} \overrightarrow{BA}$ et J le milieu du segment $[BC]$

Et soit la droite (Δ) qui passe par I et perpendiculaire à la droite (AB) et soit $E \in (\Delta)$

1) Construire une figure

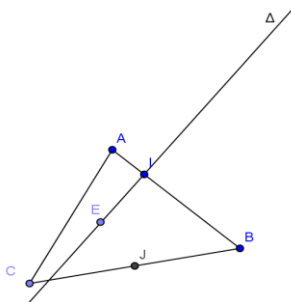
2) montrer que : $AB = 8$ et calculer BC

3) calculer : $\overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{BA}$

4) montrer que : $\overrightarrow{EB} \cdot \overrightarrow{AB} = 48$

5) calculer : AJ

Solution :1)



2) on a : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 16$ donc $AB \times AC \times \cos \hat{A} = 16$

Donc : $AB \times AB \times \cos \hat{A} = 16$ donc : $AB^2 \times \frac{1}{4} = 16$

Donc : $AB = 8$: donc $AB^2 = 64$

b) D'après le Théorème d'Al Kashi dans ABC on a :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \cos A$$

Donc : $BC^2 = 64 + 64 - 2 \times 64 \times \frac{1}{4}$

Donc : $BC^2 = 96$ donc : $BC = \sqrt{96}$

3) $\overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{BA} = \frac{3}{4} \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BA} = \frac{3}{4} \overrightarrow{BA}^2 = \frac{3}{4} BA^2 = \frac{3}{4} BA^2 = \frac{3}{4} \times 64 = 48$

4) $\overrightarrow{EB} \cdot \overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{EI} + \overrightarrow{IB}) \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EI} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{AB}$

On a : $\overrightarrow{EI} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ car $\overrightarrow{EI} \perp \overrightarrow{AB}$

Donc : $\overrightarrow{EB} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{AB} = (-\overrightarrow{BI}) \cdot (-\overrightarrow{BA}) = \overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{BA} = 48$

5) D'après le théorème de la médiane dans ABC on a :

$$AB^2 + AC^2 = 2AJ^2 + \frac{1}{2} BC^2$$

Donc : $8^2 + 8^2 = 2AJ^2 + \frac{1}{2} \sqrt{96}^2$

Donc : $128 = 2AJ^2 + 48$ donc : $40 = AJ^2$ donc : $AJ = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$

Exercice23 : soit ABC un triangle isocèle en B tel que :

$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 12$ et $\cos(\hat{ABC}) = \frac{1}{3}$ et J un point

tel que : $\overrightarrow{BJ} = \frac{5}{4} \overrightarrow{BA}$ et I le milieu du segment $[AC]$

Et soit la droite (Δ) qui passe par J et perpendiculaire à la droite (AB) et soit $E \in (\Delta)$

Et soit $M \in (\Delta)$

1) Construire une figure

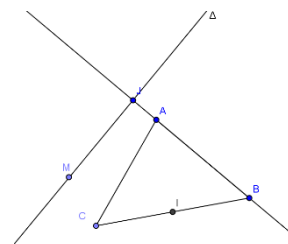
2) montrer que : $AB = 6$ et

calculer AC

3) calculer : $\overrightarrow{BJ} \cdot \overrightarrow{BA}$

4) montrer que : $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{AB} = 45$

5) calculer : BI



Solution :1) on a : $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 12$

Donc : $\|\overrightarrow{BA}\| \times \|\overrightarrow{BC}\| \times \cos \hat{B} = 12$

Donc : $BA \times BC \times \cos \hat{B} = 12$ donc : $AB^2 \times \frac{1}{3} = 12$

Donc : $AB^2 = 36$ donc : $AB = 6$

b) D'après le Théorème d'Al Kashi dans ABC on a :

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \times BC \cos B$$

Donc : $AC^2 = 36 + 36 - 2 \times 36 \times \frac{1}{3}$

Donc : $AC^2 = 54$ donc : $AC = \sqrt{54}$

3) $\overrightarrow{BJ} \cdot \overrightarrow{BA} = \frac{5}{4} \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BA} = \frac{5}{4} \overrightarrow{BA}^2 = \frac{5}{4} BA^2 = \frac{5}{4} \times 36 = 45$

4) $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{MJ} + \overrightarrow{JB}) \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MJ} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{JB} \cdot \overrightarrow{AB}$

On a : $\overrightarrow{MJ} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ car $\overrightarrow{MJ} \perp \overrightarrow{AB}$

Donc : $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{JB} \cdot \overrightarrow{AB} = (-\overrightarrow{BJ}) \cdot (-\overrightarrow{BA}) = \overrightarrow{BJ} \cdot \overrightarrow{BA} = 45$

5) D'après le théorème de la médiane dans ABC on a :

$$AB^2 + BC^2 = 2BI^2 + \frac{1}{2} AC^2$$

donc : $6^2 + 6^2 = 2BI^2 + \frac{1}{2} \sqrt{54}^2$

Donc : $72 = 2BI^2 + 27$ donc : $BI^2 = \frac{45}{2}$

Donc : $BI = \sqrt{\frac{45}{2}}$

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices
Que l'on devient un mathématicien

