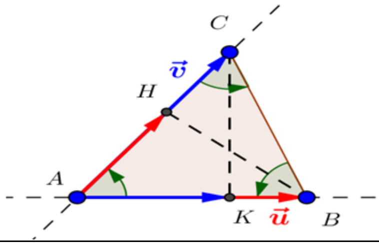
1. Définition du produit scalaire de deux vecteurs

☒ Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires alors : $\vec{u}.\vec{v} = \begin{cases} \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| & \text{si } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont de même sens} \\ -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| & \text{si } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont de sens contraires} \end{cases}$

☒ Dans le cas général:

Définition	Expression trigonométrique	Propriété
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AK}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{AC}$ 	$\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right)$ $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right)$	$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$ $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2 - BC^2\right)$

2. Propriétés du produit scalaire

❖ $\vec{u} \perp \vec{v}$ équivaut $\vec{u}.\vec{v} = 0$

❖ Quels que soit les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ et le nombre réel α :

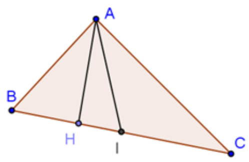
- $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$
- $\vec{u}.\left(\vec{v} + \vec{w}\right) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$
- $\left(\alpha\vec{u}\right).\vec{v} = \vec{u}.\left(\alpha\vec{v}\right) = \alpha\left(\vec{u}.\vec{v}\right)$
- $\vec{u}.\vec{u} \geq 0$
- $\vec{u}.\vec{u} = 0$ signifie que $\vec{u} = \vec{0}$

❖ Produits scalaire remarquables

- $\left(\vec{u} + \vec{v}\right)^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u}.\vec{v}$
- $\left(\vec{u} - \vec{v}\right)^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\vec{u}.\vec{v}$
- $\left(\vec{u} + \vec{v}\right)\left(\vec{u} - \vec{v}\right) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$
- $\left(\vec{u} + \vec{v}\right)^2 + \left(\vec{u} - \vec{v}\right)^2 = 2\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2\right)$

3. Relations métriques dans le triangle rectangle

Soit ABC un triangle rectangle en A et H le projeté orthogonale de A sur (BC) et I le milieu de $[BC]$

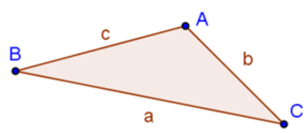


On a:

- $BC^2 = AB^2 + AC^2$; $AI = \frac{1}{2}BC$
- $BA^2 = BH \times BC$; $CA^2 = CH \times CB$
- $AH^2 = HB \times HC$

4. Théorème d'Al Kashi

Soit ABC un triangle

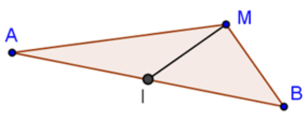


On a :

- $BC^2 = BA^2 + CA^2 - 2BA \times CA \times \cos\widehat{A}$
- $AB^2 = CA^2 + CB^2 - 2CA \times CB \times \cos\widehat{C}$
- $CA^2 = BC^2 + BA^2 - 2BC \times BA \times \cos\widehat{B}$

5. Théorème de la médiane

Soit A et B deux points distincts du plan et I le milieu de $[AB]$



Pour tout point M du plan, on a:

$$MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2$$