

PRODUIT SCALAIRES

I) Le produit scalaire de deux vecteurs :

1) Soit \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs du plan. Et soient A , B et C trois points du plan tel que :

$\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$. On appelle produit scalaire de \vec{u} par \vec{v} , noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$, le nombre réel défini par :

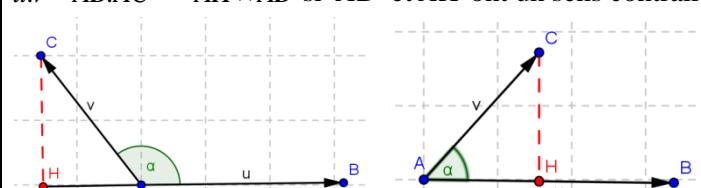
a) Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{0}$

b) Si $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$ alors soit H le projeté orthogonal de C sur la droite (AB) alors :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AH} \times \overrightarrow{AB} \quad \text{c a d}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AH} \times \overrightarrow{AB} \text{ si } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AH} \text{ ont le même sens}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AH} \times \overrightarrow{AB} \text{ si } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AH} \text{ ont un sens contraire}$$



2) Soient A , B , C et D quatre points du plan

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{A'B'} \times \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{C'D'} \text{ avec } A', B' \text{ les}$$

projections orthogonales respectifs de A et B

sur la droite (CD) .

Et C' , D' les projections orthogonales respectifs de C et D sur la droite (AB)

3) Un vecteur \vec{u} et deux points A et B tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.

La norme du vecteur \vec{u} , notée $\|\vec{u}\|$ c'est la distance AB .

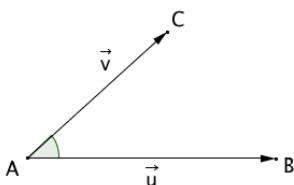
4) Soit \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs du plan.

On appelle produit scalaire de \vec{u} par \vec{v} , noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$, le nombre réel défini par :

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, si l'un des deux

vecteurs \vec{u} et \vec{v} est nul

b) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}; \vec{v})$,



dans le cas contraire.

$\vec{u} \cdot \vec{v}$ se lit " \vec{u} scalaire \vec{v} ".

5) Si \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} sont deux représentants des vecteurs non nuls \vec{u} et \vec{v} alors : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\| \times \cos BAC$

5) **Propriétés :** Pour tous vecteurs \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} , on a :

$$1) \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u} \quad 2) \vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} \quad 3) \vec{u} \cdot (\vec{k} \vec{v}) = k \vec{u} \cdot \vec{v}$$

Avec k un nombre réel.

$$4) (\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2 \quad 5) (\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$$

$$6) (\vec{u} + \vec{v})(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$$

II. Produit scalaire et norme

1) Soit un vecteur \vec{u} , on a : $\vec{u}^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$

2) Soit \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs. On a :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2) \text{ et } \vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$$

3) Soit A , B et C trois points du plan.

$$\text{On a : } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2} (AB^2 + AC^2 - BC^2)$$

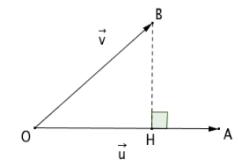
4) Les vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

III. Projection orthogonale

Soit \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs non nuls

du plan tels que $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$.

H est le projeté orthogonal du point B sur la droite (OA) .

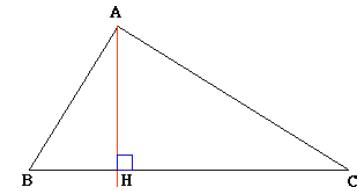


$$\text{On a : } \vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OH}$$

IV. APPLICATIONS DU PRODUIT SCALAIRE

1) les relations métriques dans un triangle rectangle

Le triangle ABC ci-dessous est rectangle en A et [AH] la hauteur.



Théorème de Pythagore

si ABC est rectangle en A alors $BC^2 = AB^2 + AC^2$ (

$$BA^2 = BH \times BC \quad \text{ET} \quad CA^2 = CH \times BC \quad \text{ET}$$

$$AH^2 = HB \times HC \quad \text{ET} \quad AB \times AC = AH \times BC$$

2) Théorème d'Al Kashi

Dans un triangle ABC, on a avec les notations de la figure :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \cos A$$

3) Théorème de la médiane

Soit deux points A et B et I le milieu du segment $[AB]$. Pour tout point M, on a : $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}$

4) Surface d'un triangle et formule de sinus

Dans un triangle ABC on a :

$$1) S = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2} ac \sin B = \frac{1}{2} bc \sin A \quad \text{avec } S \text{ Surface du triangle ABC}$$

2)

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} = \frac{2 \times S}{abc}$$

(formule de sinus)

