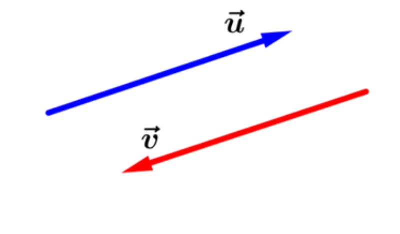
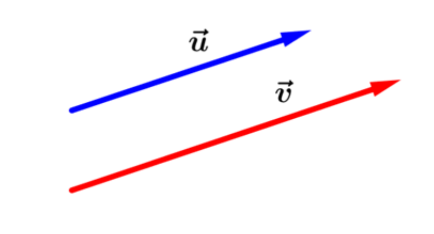
I. Définition du produit scalaire de deux vecteurs

1. Cas de deux vecteurs colinéaires

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs colinéaires. On appelle **produit scalaire** des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le réel noté $\vec{u}.\vec{v}$ défini par : $\vec{u}.\vec{v} = \begin{cases} \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| & si\ \vec{u}\ et\ \vec{v}\ sont\ de\ même\ sens \\ -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| & si\ \vec{u}\ et\ \vec{v}\ sont\ de\ sens\ contraires \end{cases}$

$\vec{u}.\vec{v} = -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$	$\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$
	

Exemple

- Lorsque l'un des deux vecteur $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ est nul on a $\vec{u}.\vec{v} = 0$.

  C'est-à-dire : $\boxed{\text{Si } \vec{u} = \vec{0} \text{ ou } \vec{v} = \vec{0} \text{ alors } \vec{u}.\vec{v} = 0}$

- Le produit scalaire de $\vec{u}$ par lui-même $\vec{u}.\vec{u}$ est appelé « carré scalaire de $\vec{u}$ » et est noté $\vec{u}^2$.

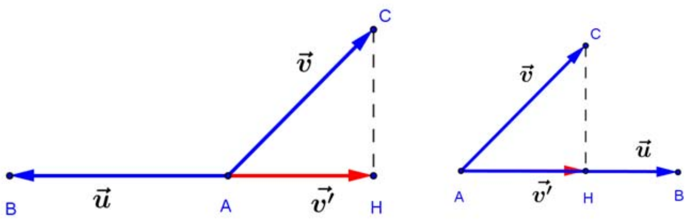
Par définition, $\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$; donc, pour deux points A et B, on a $\overrightarrow{AB}^2 = AB^2$

2. Cas général

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls A, B et C, trois points tels que:

$\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$ et soit H la projection orthogonale de C sur (AB) et $\vec{v}' = \overrightarrow{AH}$.

On pose, par définition : $\vec{u}.\vec{v} = \vec{u}.\vec{v}'$ ($\vec{u}$ et $\vec{v}'$ sont colinèaires)

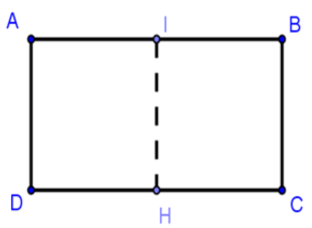


Exemple :

$ABCD$ un rectangle tel que $AB = 6$ et $BC = 4$,soient I , le milieu de $[AB]$ et H son projeté orthogonal sur (CD)

Calculer les produits scalaires suivants :

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CB}$; $\overrightarrow{DI}.\overrightarrow{DC}$



Réponse :

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB} = AB^2 = 36$; $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BB} = 6 \times 0 = 0$; $\overrightarrow{DI}.\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DH}.\overrightarrow{DC} = 3 \times 6 = 18$

II. Propriétés du produit scalaire

1. Orthogonalité et produit scalaire

si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux ou l'un d'entre eux est nul, alors : $\vec{u}.\vec{v} = 0$

Définition :

On dit que deux vecteurs sont orthogonaux lorsque leur produit scalaire est nul

$$\boxed{\vec{u} \perp \vec{v} \text{ signifie } \vec{u}.\vec{v} = 0}$$

2. Propriétés algébriques

❖ Quels que soit les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}\, et\, \vec{w}$ et le nombre réel α :

- $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$ (on dit que le produit scalaire est symétrique)
- $\vec{u}.\left(\vec{v}+\vec{w}\right) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$
- $\left(\alpha\vec{u}\right).\vec{v} = \vec{u}.\left(\alpha\vec{v}\right) = \alpha\left(\vec{u}.\vec{v}\right)$
- $\vec{u}.\vec{u} \geq 0$ et $\vec{u}.\vec{u} = 0$ signifie que $\vec{u} = \vec{0}$

❖ Produits scalaire remarquables

- $\left(\vec{u}+\vec{v}\right)^2 = \left\|\vec{u}\right\|^2 + \left\|\vec{v}\right\|^2 + 2\vec{u}.\vec{v}$
- $\left(\vec{u}-\vec{v}\right)^2 = \left\|\vec{u}\right\|^2 + \left\|\vec{v}\right\|^2 - 2\vec{u}.\vec{v}$
- $\left(\vec{u}+\vec{v}\right)\left(\vec{u}-\vec{v}\right) = \left\|\vec{u}\right\|^2 - \left\|\vec{v}\right\|^2$
- $\left(\vec{u}+\vec{v}\right)^2 + \left(\vec{u}-\vec{v}\right)^2 = 2\left(\left\|\vec{u}\right\|^2 + \left\|\vec{v}\right\|^2\right)$

❖ Autre expression du produit scalaire

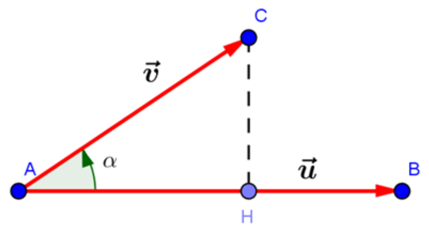
$$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\left\|\vec{u}+\vec{v}\right\|^2 - \left\|\vec{u}\right\|^2 - \left\|\vec{v}\right\|^2\right)$$

III. Forme géométrique du Produit scalaire

Propriété

Soient $A, B\ et\ C$ trois points du plan tels que : $A \neq B$ et $A \neq C$, on a:

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}$$



Soient $\vec{u}\ et\ \vec{v}$ deux vecteurs non nuls , on a :

$$\vec{u}.\vec{v} = \left\|\vec{u}\right\| \times \left\|\vec{v}\right\| \times \cos\left(\overline{\vec{u}, \vec{v}}\right)$$

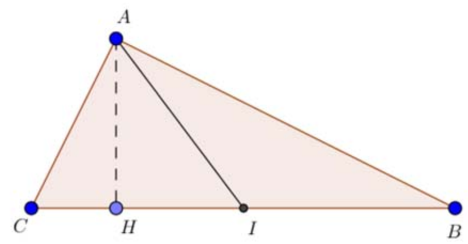
Exemples: soit α une mesure en radian de l'angle $\left(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}\right)$.

Si $\left\|\vec{u}\right\| = 4\ et\ \left\|\vec{v}\right\| = 3$ et $\alpha = \frac{\pi}{3}$ alors $\vec{u}.\vec{v} = \left\|\vec{u}\right\| \times \left\|\vec{v}\right\| \times \cos\alpha = 4 \times 3 \times \cos\frac{\pi}{3} = 6$

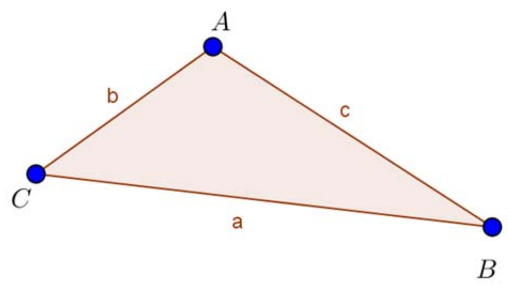
Si $\left\|\vec{u}\right\| = 5\ et\ \left\|\vec{v}\right\| = 2$ et $\alpha = \frac{3\pi}{4}$ alors $\vec{u}.\vec{v} = \left\|\vec{u}\right\| \times \left\|\vec{v}\right\| \times \cos\alpha = 5 \times 2 \times \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -5\sqrt{2}$

IV. Application du produit scalaire

1. Relations métriques dans le triangle rectangle

Soit ABC un triangle rectangle en A et H le projeté orthogonale de A sur (BC) et I le milieu de $[BC]$, on a: $BC^2 = AB^2 + AC^2$; $AI = \frac{1}{2}BC$; $BA^2 = BH \times BC$; $CA^2 = CH \times CB$; $AH^2 = HB \times HC$	

2. Théorème d'Al Kashi

Soit ABC un triangle on a : • $BC^2 = BA^2 + CA^2 - 2BA \times CA \times \cos\widehat{A}$ • $AB^2 = CA^2 + CB^2 - 2CA \times CB \times \cos\widehat{C}$ • $CA^2 = BC^2 + BA^2 - 2BC \times BA \times \cos\widehat{B}$	

3. Théorème de la médiane

Soient A *et* B deux points distincts du plan t I est le milieu de $[AB]$. Pour tout point M du plan, on a: $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2$