

PRODUIT SCALAIRES

Leçon : PRODUIT SCALAIRES Présentation globale

- I) Le produit scalaire de deux vecteurs
- II. Produit scalaire et norme
- III. Produit scalaire et orthogonalité
- IV) APPLICATIONS DU PRODUIT SCALAIRES



La notion de produit scalaire est apparue pour les besoins de la physique. Le concept relativement récent et a été introduit au milieu du XIXe siècle par le mathématicien allemand *Hermann Grassmann* (1809 ; 1877), ci-contre. Il fut baptisé produit scalaire par *William Hamilton* (1805 ; 1865) en 1853.

I) Le produit scalaire de deux vecteurs

1° Définitions

Définition1 : Soit \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs du plan. Et soient A ; B et C trois points du plan tel que : $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$

On appelle produit scalaire de \vec{u} par \vec{v} , noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$, le nombre réel défini par :

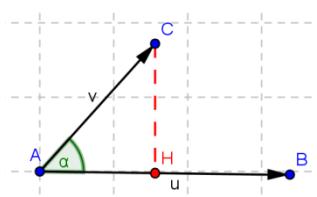
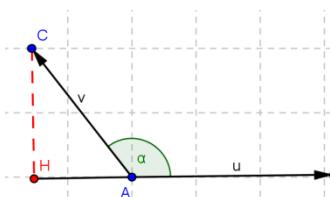
Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{0}$

Si $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$ alors soit H le projeté orthogonal de C sur la droite (AB) et alors

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AH} \times \overrightarrow{AB} \text{ c a d}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AH \times AB \text{ si } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AH} \text{ ont le même sens}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -AH \times AB \text{ si } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AH} \text{ ont un sens contraire}$$



Remarque :

soient A ; B ; C et D quatre points du plan

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{A'B'} \times \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{C'D'} \text{ avec}$$

A' ; B' les projections orthogonales respectifs de A ; B sur la droite (CD)

Et C' ; D' les projections orthogonales respectifs de C et D sur la droite (AB)

Application : Soit ABC un triangle rectangle et isocèle en A et direct et $AB = 2\text{cm}$

Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CB}$

Réponse

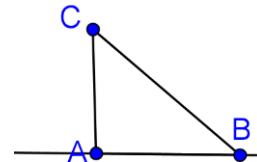
On a $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AA}$ car :

A est le projeté orthogonales de A sur (AB) et B est le projeté orthogonales de B sur (AB) et A est le projeté orthogonales de C sur (AB)

donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AA = AB \times 0 = 0$

de même On a $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = BA \times BA = 2 \times 2 = 4$

de même On a $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CB} = -BA \times AB = -2 \times 2 = -4$



Définition2: Soit un vecteur \vec{u} et deux points A et B tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.

La norme du vecteur \vec{u} , notée $\|\vec{u}\|$, est la distance AB.

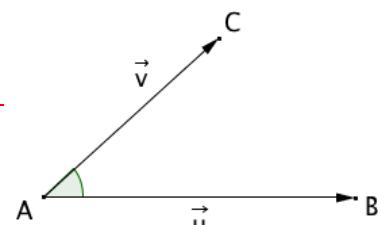
Définition3 : Soit \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs du plan.

On appelle produit scalaire de \vec{u} par \vec{v} , noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$, le nombre réel définit par :

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, si l'un des deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} est nul

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}; \vec{v})$, dans le cas contraire.

$\vec{u} \cdot \vec{v}$ se lit " \vec{u} scalaire \vec{v} ".



Remarque :

Si \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} sont deux représentants des vecteurs non nuls \vec{u} et \vec{v} alors :

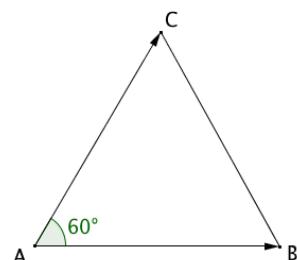
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\| \times \cos BAC$$

Exemple :

Soit un triangle équilatéral ABC de côté a .

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\| \times \cos BAC$$

$$= a \times a \times \cos \frac{\pi}{3} = a^2 \times \frac{1}{2} = \frac{a^2}{2}$$



Attention : Le produit scalaire de deux vecteurs est un nombre réel. Ecrire par exemple $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{0}$ est une maladresse à éviter !

2) propriétés

Propriété : Pour tout vecteur \vec{u} et \vec{v} , on a : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

Démonstration :

On suppose que \vec{u} et \vec{v} sont non nuls (démonstration évidente dans le cas contraire).

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}; \vec{v})$$

$$= \|\vec{v}\| \times \|\vec{u}\| \times \cos(\vec{u}; \vec{v}) = \|\vec{v}\| \times \|\vec{u}\| \times \cos(-(\vec{v}; \vec{u}))$$

$$= \|\vec{v}\| \times \|\vec{u}\| \times \cos(\vec{v}; \vec{u}) = \vec{v} \cdot \vec{u}$$

Propriétés : Pour tous vecteurs \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} , on a :

$$1) \vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} \quad 2) \vec{u} \cdot (k\vec{v}) = k\vec{u} \cdot \vec{v}, \text{ avec } k \text{ un nombre réel.}$$

- Admis -

Propriétés : Pour tous vecteurs \vec{u} et \vec{v} , on a :

$$1) (\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$$

$$2) (\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$$

$$3) (\vec{u} + \vec{v})(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$$

Démonstration pour le 2) :

$$(\vec{u} - \vec{v})^2 = (\vec{u} - \vec{v})(\vec{u} - \vec{v})$$

$$= \vec{u} \cdot \vec{u} - \vec{u} \cdot \vec{v} - \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{v}$$

$$= \vec{u}^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$$

II. Produit scalaire et norme

Soit un vecteur \vec{u} , on a :

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{u}\| \times \cos(\vec{u}; \vec{u}) = \|\vec{u}\|^2 \times \cos 0 = \|\vec{u}\|^2$$

$$\text{Et } \vec{u} \cdot \vec{u} = \vec{u}^2$$

$$\text{On a ainsi : } \vec{u}^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$$

Propriété : Soit \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs. On a :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} \left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 \right) \text{ et } \vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} \left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 \right)$$

Démonstration de la première formule :

$$\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = (\vec{u} - \vec{v})^2$$

$$= \vec{u}^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$$

$$= \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$$

$$\text{donc } \vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} \left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 \right)$$

Propriété : Soit A, B et C trois points du plan. On a :

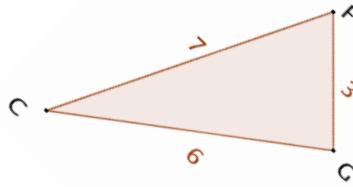
$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \frac{1}{2} (AB^2 + AC^2 - BC^2)$$

Démonstration :

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \frac{1}{2} \left(\|\vec{AB}\|^2 + \|\vec{AC}\|^2 - \|\vec{AB} - \vec{AC}\|^2 \right) = \frac{1}{2} \left(AB^2 + AC^2 - \|\vec{CB}\|^2 \right) = \frac{1}{2} (AB^2 + AC^2 - BC^2)$$

Exemple :

$$\overrightarrow{CG} \cdot \overrightarrow{CF} = \frac{1}{2} (CG^2 + CF^2 - GF^2) = \frac{1}{2} (6^2 + 7^2 - 3^2) = 38$$



III. Produit scalaire et orthogonalité

1) Vecteurs orthogonaux

Propriété : Les vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Démonstration :

Si l'un des vecteurs est nul, la démonstration est évidente.

Supposons le contraire.

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= 0 \\ \Leftrightarrow \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}; \vec{v}) &= 0 \\ \Leftrightarrow \cos(\vec{u}; \vec{v}) &= 0 \end{aligned}$$

\Leftrightarrow Les vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont orthogonaux

Application : 1) Soit ABC un triangle tel que $AB = 7$ et $AC = 5$ et $BC = 6$

a) Calculer $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC}$ et en déduire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

b) Soit H le projeté orthogonal de C sur la droite (AB) Calculer AH

2) sachant que $\|\vec{u}\| = 4$ et $\|\vec{v}\| = 2$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = -\frac{1}{2}$

a) Calculer : $A = (2\vec{u} - 3\vec{v}) \cdot (\vec{u} + 2\vec{v})$ et $B = \left(\frac{\vec{u}}{2} - \vec{v}\right) \cdot \left(\vec{u} + \frac{\vec{v}}{2}\right)$ et $C = (\vec{u} - \vec{v})^2$ et $D = (2\vec{u} + 3\vec{v})^2$

b) en déduire $E = \|\vec{u} - \vec{v}\|$ et $F = \|2\vec{u} + 3\vec{v}\|$

Réponse : 1)

a) Calcule de $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC}$

$$\begin{aligned} \text{On a } \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} &= \frac{1}{2} \left(\|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\|^2 - \|\overrightarrow{BA}\|^2 - \|\overrightarrow{AC}\|^2 \right) = \frac{1}{2} \left(\|\overrightarrow{BC}\|^2 - \|\overrightarrow{BA}\|^2 - \|\overrightarrow{AC}\|^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} (BC^2 - AB^2 - AC^2) = \frac{1}{2} (6^2 - 7^2 - 5^2) = -19 \end{aligned}$$

donc : $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} = -19$

On a $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} = 19$

b) Calcule de AH

$$\text{On a } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AH \text{ donc : } AH = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{AB} = \frac{19}{7}$$

$$2) \text{ a) } A = (2\vec{u} - 3\vec{v}) \cdot (\vec{u} + 2\vec{v}) = 2\vec{u} \cdot \vec{u} + 4\vec{u} \cdot \vec{v} - 3\vec{u} \cdot \vec{v} - 6\vec{v} \cdot \vec{v} = 2\vec{u} \cdot \vec{u} + 4\vec{u} \cdot \vec{v} - 3\vec{u} \cdot \vec{v} - 6\vec{v} \cdot \vec{v}$$

$$A = 2\vec{u}^2 + \vec{u} \cdot \vec{v} - 6\vec{v}^2 = 2 \cdot \|\vec{u}\|^2 + \vec{u} \cdot \vec{v} - 6 \cdot \|\vec{v}\|^2 = 2 \times 4^2 + \frac{1}{2} - 6 \times 2^2 = 32 + \frac{1}{2} - 24 = \frac{15}{2}$$

$$B = \left(\frac{\vec{u}}{2} - \vec{v} \right) \cdot \left(\vec{u} + \frac{\vec{v}}{2} \right) = \frac{1}{2} \vec{u} \cdot \vec{u} + \frac{1}{4} \vec{u} \cdot \vec{v} - \vec{u} \cdot \vec{v} - \frac{1}{2} \vec{v} \cdot \vec{v}$$

$$B = \frac{1}{2} \times \|\vec{u}\|^2 - \frac{3}{4} \times \vec{u} \cdot \vec{v} - \frac{1}{2} \times \|\vec{v}\|^2 = \frac{1}{2} \times 4^2 - \frac{3}{4} \times \left(-\frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2} \times 2^2 = 8 + \frac{3}{2} - 2 = \frac{51}{8}$$

$$C = (\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2 = 4^2 - 2\left(-\frac{1}{2} \right) + 2^2 = 16 + 1 + 4 = 21$$

$$D = (2\vec{u} + 3\vec{v})^2 = 4\vec{u}^2 + 12\vec{u} \cdot \vec{v} + 9\vec{v}^2 = 4\|\vec{u}\|^2 + 12\vec{u} \cdot \vec{v} + 9\|\vec{v}\|^2 = 4 \times 4^2 + 12\left(-\frac{1}{2} \right) + 9 \times 2^2 = 64 - 6 + 36 = 94$$

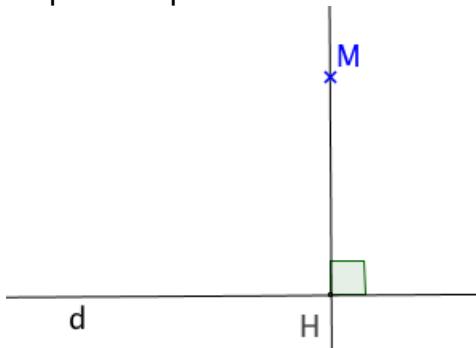
b) $(\vec{u} - \vec{v})^2 = 21$ donc $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = 94$ donc $\|\vec{u} - \vec{v}\| = \sqrt{21}$

$(2\vec{u} + 3\vec{v})^2 = 94$ donc $\|2\vec{u} + 3\vec{v}\|^2 = 94$ donc $\|2\vec{u} + 3\vec{v}\| = \sqrt{94}$

2) Projection orthogonale

Définition : Soit une droite d et un point M du plan.

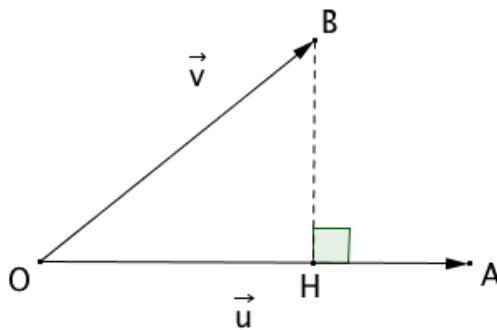
Le projeté orthogonal du point M sur la droite d est le point d'intersection H de la droite d avec la perpendiculaire à d passant par M .



Propriété : Soit \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs non nuls du plan tels que $\vec{u} = \vec{OA}$ et $\vec{v} = \vec{OB}$.

H est le projeté orthogonal du point B sur la droite (OA) .

On a : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{OA} \cdot \vec{OB} = \vec{OA} \cdot \vec{OH}$



Démonstration :

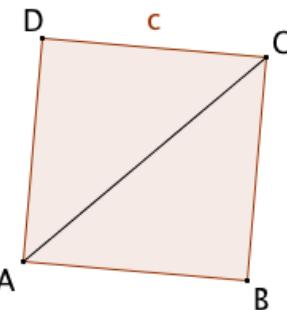
$$\vec{OA} \cdot \vec{OB} = \vec{OA} \cdot (\vec{OH} + \vec{HB}) = \vec{OA} \cdot \vec{OH} + \vec{OA} \cdot \vec{HB} = \vec{OA} \cdot \vec{OH}$$

En effet, les vecteurs \vec{OA} et \vec{HB} sont orthogonaux donc $\vec{OA} \cdot \vec{HB} = 0$.

Exemple :

Soit un carré ABCD de côté c .

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = \|\overrightarrow{AB}\|^2 = c^2$$



III. APPLICATIONS DU PRODUIT SCALaire

1) LES RELATIONS MÉTRIQUES DANS LE TRIANGLE RECTANGLE

Le triangle ABC ci-dessous est rectangle en A et [AH] la hauteur.

Théorème : Théorème de Pythagore

si ABC est rectangle en A alors $BC^2 = AB^2 + AC^2$ (i.e. le carré de l'hypoténuse est la somme des carrés des 2 autres côtés)

Démonstration :

$$BC^2 = \overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})^2 = \overrightarrow{BA}^2 + 2\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}^2$$

ABC est rectangle en A donc $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$

$$\text{Donc } BC^2 = AB^2 + AC^2$$

AUTRE RESULTATS :

$$BA^2 = BH \times BC \quad \text{ET} \quad CA^2 = CH \times BC \quad \text{ET} \quad AH^2 = HB \times HC \quad \text{ET} \quad AB \times AC = AH \times BC$$

Application : Soit ABC un triangle rectangle en A et H est le projeté orthogonal du

point A sur la droite (BC) et $AH = 2\text{cm}$ et $ABC = \frac{\pi}{3}$

Calculer AB et BH et BC

Réponse

a) On a ABH un triangle rectangle en H donc

$$\sin(ABC) = \frac{AH}{AB} \quad \text{Donc} \quad AB = \frac{AH}{\sin(ABC)} = \frac{2}{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{2}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2 \times \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{4}{3}\sqrt{3}$$

b) On a $AB^2 = AH^2 + HB^2$ car ABH un triangle rectangle en H

$$\text{Donc: } AB^2 - AH^2 = HB^2 \quad \text{Donc: } \left(\frac{4}{3}\sqrt{3}\right)^2 - 2^2 = HB^2 \quad \text{Donc: } \frac{16}{3} - 2^2 = HB^2 \quad \text{Donc: } HB^2 = \frac{4}{3}$$

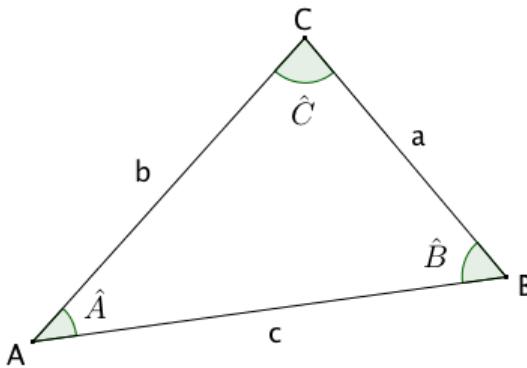
$$HB = \sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{2}{3}\sqrt{3}$$

$$\text{c) On a } BA^2 = BH \times BC \quad \text{Donc: } BC = \frac{BA^2}{BH} \quad \text{Donc: } BC = \frac{\left(\frac{4}{3}\sqrt{3}\right)^2}{\frac{2}{3}\sqrt{3}} = \frac{\left(\frac{4}{3}\sqrt{3}\right)^2}{\frac{2}{3}\sqrt{3}} = \frac{8}{3}\sqrt{3}$$

2) Théorème d'Al Kashi

Théorème : Dans un triangle ABC, on a, avec les notations de la figure :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \cos A$$



Démonstration :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos A$$

et

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2} (AB^2 + AC^2 - BC^2) = \frac{1}{2} (b^2 + c^2 - a^2)$$

$$\text{donc : } \frac{1}{2} (AB^2 + AC^2 - BC^2) = AB \times AC \times \cos A$$

$$\text{soit : } BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \cos A$$



A Samarkand, le savant perse *Jemshid ibn Massoud al-Kashi* (1380 ; 1430) vit sous la protection du prince *Ulugh-Beg* (1394 ; 1449) qui a fondé une Université comprenant une soixantaine de scientifiques qui étudient la théologie et les sciences.

Dans son Traité sur le cercle (1424), *al Kashi* calcule le rapport de la circonférence à son rayon pour obtenir une valeur approchée de 2π avec une précision jamais atteinte. Il obtient 9 positions exactes en base 60 soit 16 décimales exactes :

$$2\pi \approx 6,283\ 185\ 307\ 179\ 586\ 5$$

Soit ABC un triangle quelconque.

On a :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$$

$$AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2BC \times AC \cos(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$$

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \times BC \cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$$

Application : Soit ABC un triangle tel que et $AB = 5$ et $AC = 8$ et $A = \frac{2\pi}{3}$

Calculer BC et $\cos C$

Réponse

a) D'après le Théorème d'Al Kashi on a :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \cos A$$

$$BC^2 = 5^2 + 8^2 - 2 \times 5 \times 8 \cos \frac{2\pi}{3} \text{ donc } BC^2 = 25 + 64 + 40 = 129 \text{ donc } BC = \sqrt{129}$$

b) D'après le Théorème d'Al Kashi on a :

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2CA \times CB \cos C \text{ donc } 2CA \times CB \cos C = AC^2 + BC^2 - AB^2$$

$$\text{donc } \cos C = \frac{AC^2 + BC^2 - AB^2}{2CA \times CB} \text{ donc } \cos C = \frac{64 + 129 - 25}{2 \times 8 \times \sqrt{129}} = \frac{168}{16\sqrt{129}} = \frac{21\sqrt{129}}{258}$$

EXERCICE : Soit EFG un triangle tel que $EF = 7$ et $EG = 5$ et $\angle FEG = \frac{\pi}{4}$

Calculer FG et $\cos EGF$

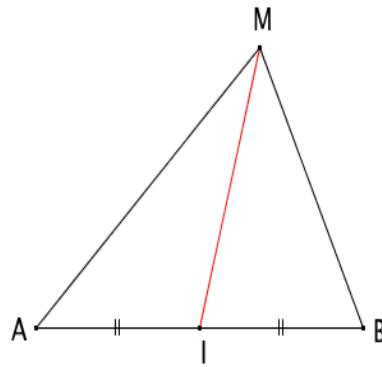
3) Théorème de la médiane

Propriété : Soit deux points A et B et I le milieu du segment $[AB]$.

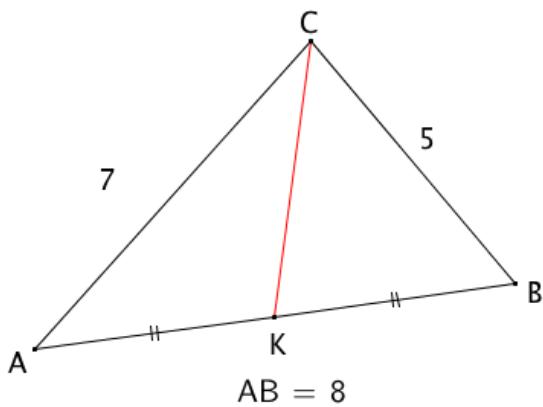
Pour tout point M , on a : $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{AB^2}{2}$

Démonstration :

$$\begin{aligned} MA^2 + MB^2 &= \|\overrightarrow{MA}\|^2 + \|\overrightarrow{MB}\|^2 = \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 \\ &= (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 \\ &= \overrightarrow{MI}^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IA}^2 + \overrightarrow{MI}^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IB}^2 \\ &= 2\overrightarrow{MI}^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) + \overrightarrow{IA}^2 + \overrightarrow{IB}^2 \\ &= 2\overrightarrow{MI}^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{0} + \left(\frac{1}{2} \overrightarrow{AB}\right)^2 + \left(\frac{1}{2} \overrightarrow{AB}\right)^2 \\ &= 2\overrightarrow{MI}^2 + \frac{AB^2}{2} \end{aligned}$$



Exemple :



On souhaite calculer CK .

D'après le théorème de la médiane, on a :

$$CA^2 + CB^2 = 2CK^2 + \frac{AB^2}{2}, \text{ donc :}$$

$$CK^2 = \frac{1}{2} \left(CA^2 + CB^2 - \frac{AB^2}{2} \right) = \frac{1}{2} \left(7^2 + 5^2 - \frac{8^2}{2} \right) = 21$$

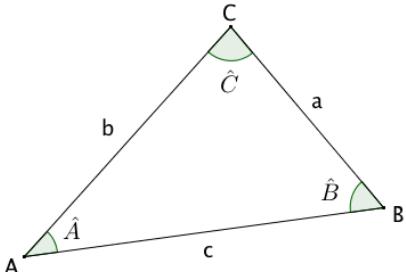
$$\text{Donc : } CK = \sqrt{21}.$$

3) Surface d'un triangle et formule de sinus

Propriétés : Dans un triangle ABC, on a

$$1) S = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2} ac \sin B = \frac{1}{2} bc \sin A \text{ avec } S \text{ Surface du triangle ABC}$$

$$2) \frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} = \frac{2 \times S}{abc} \text{ formule de sinus}$$



Application1 : Soit EFGH un parallélogramme tel que et $EF = 3$ et $EH = 5$ et

$$\angle FEH = \frac{3\pi}{4}$$

Calculer la Surface du triangle EFH et la Surface du parallélogramme $EFGH$
Réponse

$$a) S_{EFH} = \frac{1}{2} EF \times EH \sin E = \frac{1}{2} 3 \times 5 \sin \frac{3\pi}{4} = \frac{15}{2} \sin \left(\pi - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{15}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{15}{4} \sqrt{2}$$

$$b) S_{EFGH} = 2 \times S_{EFH} = 2 \times \frac{15}{4} \sqrt{2} = \frac{15}{2} \sqrt{2}$$

Application2 : Soit ABC un triangle tel que et $a = BC = 6$ et

$$A = 30^\circ \text{ et } B = 73^\circ$$

Calculer b et c

Réponse

$$\text{D'après la formule de sinus on a : } \frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} = \frac{2 \times S}{abc}$$

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin 30^\circ}{6} = \frac{1}{12} \quad \text{donc} \quad \frac{\sin 73^\circ}{b} = \frac{1}{12} \quad \text{donc} \quad b = 12 \sin 73^\circ = 11.47$$

$$\frac{\sin 77^\circ}{c} = \frac{1}{12} \quad \text{donc} \quad c = 12 \sin 77^\circ = 11.69$$

