I. Produit scalaire de deux vecteurs :

A. Norme d'un vecteur :

a. Définition :

Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan (P) , A et B deux points de (P) tel que : $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$.

La distance entre A et B est notée par AB ou encore $\|\overrightarrow{AB}\|$. On lit la norme du vecteur $\vec{u}$ ou $\overrightarrow{AB}$.

Donc $\|\overrightarrow{AB}\|=AB$

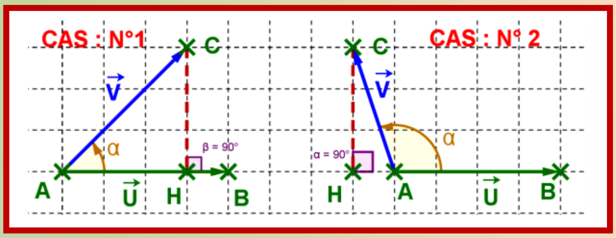
B. Produit scalaire de deux vecteurs :

a. Définition :

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan tel que $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$

le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est noté $\vec{u}.\vec{v}$ tel que :

- Si $\vec{v}=\vec{0}$ ou $\vec{u}=\vec{0}$ on a : $\vec{u}.\vec{v}=0$.
- Si $\vec{u}\neq\vec{0}$ et $\vec{v}\neq\vec{0}$ et H la projection orthogonale de C sur la droite (AB) ($A\neq B$ car $\vec{u}\neq\vec{0}$) alors



❖ $\vec{u}.\vec{v}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB\times AH$ si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ ont même sens . (1^er cas)

❖ $\vec{u}.\vec{v}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=-AB\times AH$ si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ ont les sens opposés. (2^ième cas)

b. Remarque :

- La projection orthogonale de B sur la droite (AB) est B d'où : $\vec{u}.\vec{u}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB}=AB\times AB=AB^2\geq 0$ on note $\vec{u}.\vec{u}$ ou $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB}$ par $\vec{u}^2$ ou $\overrightarrow{AB}^2$ on lit le carré scalaire de est appelé le carré scalaire de $\vec{u}$ ou de $\overrightarrow{AB}$
- $\vec{u}^2$ est nombre positif de même $\overrightarrow{AB}^2$ est nombre positif .
- On a : $\overrightarrow{AB}^2=AB^2=\|\overrightarrow{AB}\|^2$ d'où $\|\overrightarrow{AB}\|=\sqrt{\overrightarrow{AB}^2}$ de même on a $\|\vec{u}\|=\sqrt{\vec{u}^2}$
- $\vec{u}^2=\|\vec{u}\|^2$

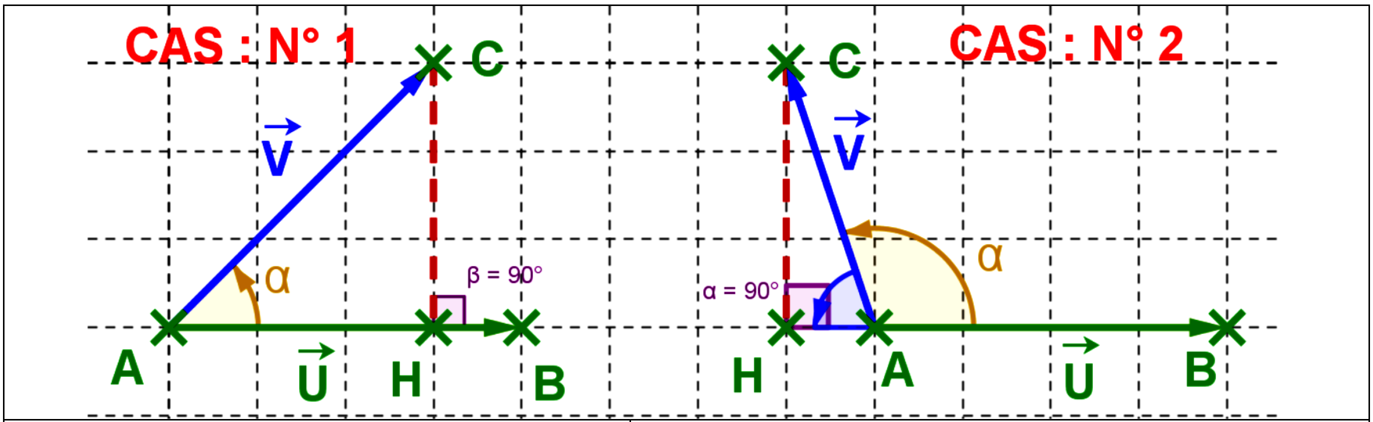
II. La forme trigonométrique du produit scalaire de deux vecteurs non nuls : ($\overrightarrow{AB}\neq\vec{0}$ et $\overrightarrow{AC}\neq\vec{0}$)

A. La forme trigonométrique du produit scalaire de deux vecteurs non nuls :

a. Activité :

- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan tel que $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{AC}$.
- et H la projection orthogonale du point C sur la droite (AB) ($A\neq B$ car $\vec{u}\neq\vec{0}$).
- On considère l'angle($\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}$) et de mesures $\left(\overline{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right)\equiv\alpha\ [2\pi]$.

1. Pour chaque cas exprimer AH en fonction de AC et $\cos\alpha$.



1^er cas :	**2^ième cas :**
$\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AH$ ($\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ ont même sens) On a : $\cos\alpha = \dfrac{AH}{AC}$ d'où $AH = AC \times \cos\alpha$ Donc : $\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ $= AB \times AH$ $= AB \times AH \times \cos\alpha$ **Conclusion :** $\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AH$ $= AB \times AH \times \cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$	$\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -AB \times AH$ ($\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ ont les sens opposés) On a : $\cos(\pi - \alpha) = \dfrac{AH}{AC}$ d'où $-\cos\alpha = \dfrac{AH}{AC}$ $\left(\text{car } \cos(\pi - x) = -\cos x\right)$ $AH = AC \times \cos(\pi - \alpha) = AC \times (-\cos\alpha)$ Donc : $\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AH = AB \times AH \times \cos\alpha$ **Conclusion :** $\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -AB \times AH = AB \times AH \times \cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$

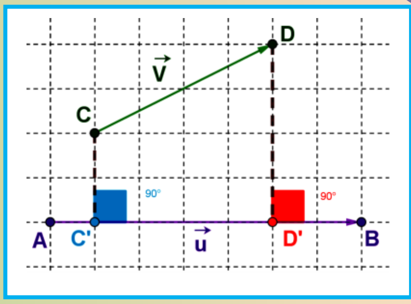
b. Propriété 1 :

- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan tel que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ et $\left(\overline{\vec{u}, \vec{v}}\right) = \left(\overline{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}\right) \equiv \alpha \ (2\pi)$
- La forme trigonométrique du produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est :

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \cos\alpha$ ou encore $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \cos\alpha$

c. Remarque :

Le produit scalaire des vecteurs $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$ et $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ est :
le nombre réel $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{C'D'}$ tel que D' et C' sont respectivement les projections orthogonales de C et D sur la droite (AB) .



B. Orthogonalité de deux vecteurs :

a. Activité :

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan tel que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.

1. Donner la forme trigonométrique de $\vec{u}.\vec{v}$.

2. Donner la condition nécessaire et suffisante pour que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonales .

b. Propriété 2 :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs du plan (P) , on a :

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u}.\vec{v}=0$, on note $\vec{u}\perp\vec{v}$.

C. Propriétés du produit scalaire :

a. Propriétés :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs du plan (P) , on a

1. Linéarité du produit scalaire : $\begin{cases} (\vec{u}+\vec{v}).\vec{w}=\vec{u}.\vec{w}+\vec{v}.\vec{w} \\ \vec{w}.(\vec{u}+\vec{v})=\vec{w}.\vec{u}+\vec{w}.\vec{v} \\ (\alpha\vec{u}).\vec{v}=\vec{u}.(\alpha\vec{v})=\alpha\times(\vec{u}.\vec{v}) \end{cases}$.

2. Positivité du produit scalaire : $\vec{u}^2\geq 0$.

3. produit scalaire est non dégénéré : $\vec{u}.\vec{u}=0 \Leftrightarrow \vec{u}=\vec{0}$.

b. conséquences :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan (P) , on a

1. $(\vec{u}+\vec{v})^2=\vec{u}^2+2\vec{u}.\vec{v}+\vec{v}^2=\|\vec{u}\|^2+2\vec{u}.\vec{v}+\|\vec{v}\|^2$.

2. $(\vec{u}-\vec{v})^2=\vec{u}^2-2\vec{u}.\vec{v}+\vec{v}^2=\|\vec{u}\|^2-2\vec{u}.\vec{v}+\|\vec{v}\|^2$.

3. $(\vec{u}+\vec{v})(\vec{u}-\vec{v})=\vec{u}^2-\vec{v}^2=\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2$.

4. $\vec{u}.\vec{v}=\frac{1}{2}\left[\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\|\vec{u}\|^2-\|\vec{v}\|^2\right]$.

c. Démonstration (pour la 1ère propriété)

On a : $(\vec{u}+\vec{v})^2=(\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}+\vec{v})=\vec{u}^2+2\vec{u}.\vec{v}+\vec{v}^2=\|\vec{u}\|^2+2\vec{u}.\vec{v}+\|\vec{v}\|^2$; (car $\vec{u}^2=\|\vec{u}\|^2$)

Conclusion : $(\vec{u}+\vec{v})^2=\vec{u}^2+2\vec{u}.\vec{v}+\vec{v}^2=\|\vec{u}\|^2+2\vec{u}.\vec{v}+\|\vec{v}\|^2$

d. Exemple : $\vec{u}.\vec{v}=7$ et $\|\vec{u}\|=4$ et $\|\vec{v}\|=7$.

1. Calculons : $(\vec{u}+\vec{v}).\vec{u}$

On a : $(\vec{u}+\vec{v}).\vec{u}=\vec{u}^2+\vec{v}.\vec{u}$

$$= \left\|\vec{u}\right\|^2 + \vec{u}.\vec{v}$$
$$= 4^2 + 7 = 23$$

Conclusion : $\left(\vec{u}+\vec{v}\right).\vec{u} = 23$

2. **Calculons :** $\left(\vec{u}+\vec{v}\right)^2$.

On a : $\left(\vec{u}+\vec{v}\right)^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2$
$$= \left\|\vec{u}\right\|^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + \left\|\vec{v}\right\|^2$$
$$= 4^2 + 2\times 7 + 7^2$$
$$= 79$$

Conclusion : $\left(\vec{u}+\vec{v}\right)^2 = 79$.

3. **Calculons** $\left(2\vec{u}\right)\left(-4\vec{v}\right)$

On a : $\left(2\vec{u}\right)\left(-4\vec{v}\right) = 2\times(-4)\times\vec{u}.\vec{v}$
$$= -8\times 7$$
$$= -56$$

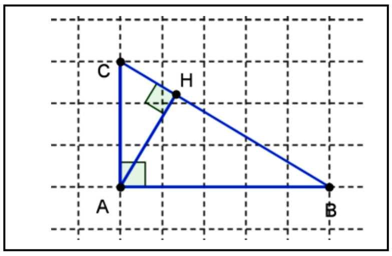
Conclusion : $\left(2\vec{u}\right)\left(-4\vec{v}\right) = -56$

III. Applications du produit scalaire :

A. Les relations métriques dans un triangle rectangle :

a. Activité :

ABC est un triangle rectangle en A ; le point H est la projection orthogonale de A sur la droite (BC).



1. Calculer $\cos B$ en utilise les deux triangles ABC et ABH.
2. Montrer que : $BA^2 = BH \times BC$.
3. Montrer que :
   - ❖ $AH^2 = AB^2 - HB^2$ puis $AH^2 = AC^2 - HC^2$.
4. En déduit que : $2AH^2 = BC^2 - \left(HB^2 + HC^2\right)$.
5. On remarque que : $\left(HB + HC\right)^2 - 2HB \times HC = BC^2 - 2HB \times HC$. On déduit $AH^2 = HB \times HC$

b. Propriété :

ABC est un triangle rectangle en A ; le point H est la projection orthogonale de A sur la droite (BC).

On a :
- $BC^2 = BA^2 + AC^2$.
- $BA^2 = BH \times BC$ et $CA^2 = CH \times CB$.
- $AH^2 = HB \times HC$.

On les appelle les relations métriques dans un triangle rectangle.

B. Théorème d' El Kashi : (غياث الدين الحمشي الكاشي) :

a. Théorème d' El Kashi :

Dans tout triangle ABC on pose $AB=c$ et $AC=b$ et $BC=a$ on a :

- $BC^2 = BA^2 + AC^2 - 2AB\times AC\cos A$ ou encore $a^2 = c^2 + b^2 - 2c\times b\cos A$.
- $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB\times BC\cos B$ ou encore $b^2 = c^2 + a^2 - 2c\times a\cos B$.
- $AB^2 = AC^2 + CB^2 - 2AC\times CB\cos C$ ou encore $c^2 = b^2 + a^2 - 2b\times a\cos C$.

b. Démonstration :

On a :
$$\begin{aligned} BC^2 &= \left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}\right)^2 \\ &= BA^2 + AC^2 + 2\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA} \\ &= BA^2 + AC^2 - 2AB\times AC\cos A \end{aligned}$$

Conclusion : $BC^2 = BA^2 + AC^2 - 2AB\times AC\cos A$.

c. Exemple :

On calcule AC sachant que : $BA=\sqrt{2}$ et $BC=5$ et $ABC=\frac{\pi}{4}$.

On a :
$$\begin{aligned} AC^2 &= AB^2 + BC^2 - 2AB\times BC\cos B \\ &= \sqrt{2}^2 + 5^2 - 2\sqrt{2}\times 5\cos\frac{\pi}{4} \\ &= 19 \end{aligned}$$

Conclusion : $AC=19$.

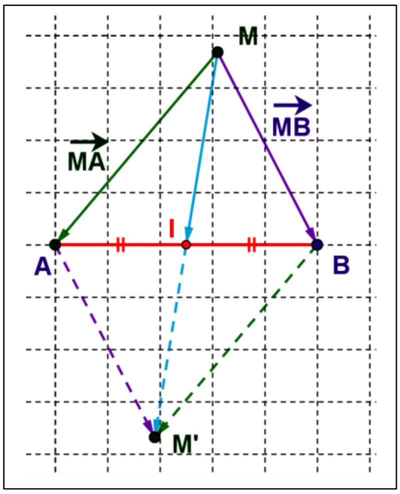
C. Théorème de la médiane :

a. Théorème :

Soit un segment $[AB]$ du plan (P) , le point I est son milieu .

Pour tout point M du plan (P) on a : $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2$.

b. Démonstration :



On a : $MA^2 + MB^2 = \left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)^2$
$$\begin{aligned} &= \overrightarrow{MI}^2 + 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IA}^2 + \overrightarrow{MI}^2 + 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IB}^2 \\ &= 2\overrightarrow{MI}^2 + 2\overrightarrow{MI}.\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}\right) + 2\overrightarrow{IA}^2 \\ &= 2MI^2 + 2IA \\ &= 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2 \end{aligned}$$

Conclusion : $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \frac{1}{2}AB^2$