

## Tronc Commun

### Série 2 : Etude de Fonctions

#### Exercice 1 :

Soit  $f$  la fonction numérique définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = \frac{-10x}{1+x^2}$

1. Montrer que la fonction  $f$  est impaire
2. Montrer que 5 est une valeur maximale de  $f$  sur  $\mathbb{R}$
3. a) Soient  $a$  et  $b$  deux réels distincts, montrer que :  $\frac{f(a)-f(b)}{a-b} = \frac{10(ab-1)}{(1+a^2)(1+b^2)}$   
b) En déduire la monotonie de la fonction  $f$  sur  $[0,1]$  et  $[1,+\infty[$
4. Donner le tableau de variation de  $f$  sur  $\mathbb{R}$

#### Exercice 2 :

Soit  $f$  la fonction numérique définie par :  $f(x) = \frac{x}{x-1}$

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction  $f$
2. Etudier la monotonie de  $f$  sur les intervalles  $]-\infty,1[$  et  $]1,+\infty[$
3. Dresser le tableau de variation de  $f$
4. Comparer les deux nombres :  $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$  et  $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}$

#### Exercice 3 :

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions définies par :  $f(x) = x^2 - 2x$  et  $g(x) = \frac{x}{x-2}$

1. Déterminer  $D_g$  et vérifier que pour tout  $x$  de  $D_g$  :  $g(x) = 1 + \frac{2}{x-2}$
2. Donner les tableaux de variations de  $f$  et  $g$
3. Déterminer les points d'intersection de  $(C_f)$  et  $(C_g)$  avec les axes du repère
4. Tracer les courbes  $(C_f)$  et  $(C_g)$  dans le même repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$
5. Déterminer algébriquement les points d'intersection de  $(C_f)$  et  $(C_g)$
6. Résoudre graphiquement l'inéquation  $f(x) \leq g(x)$
7. Soit  $h$  la fonction définie par :  $h(x) = \frac{|x|}{|x|-2}$ 
  - a) Déterminer  $D_h$
  - b) Montrer que la fonction  $h$  est paire

- c) Vérifier que  $h(x) = g(x)$  pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}^+ - \{2\}$
- d) Tracer la courbe  $(C_h)$  dans le même repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$
- 8. Soit  $k$  la fonction définie par :  $k(x) = |f(x)|$ 
  - a) Tracer la courbe  $(C_k)$  dans le même repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$
  - b) Discuter suivant les valeurs du paramètre réel  $m$ , le nombre de solutions de l'équation  $k(x) = m$

**Exercice 4 :**

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions définies par :  $f(x) = x^2 - 2x + 1$  et  $g(x) = \frac{3x-3}{x+1}$

1. Déterminer  $D_g$  et vérifier que pour tout  $x$  de  $D_g$  :  $g(x) = 3 - \frac{6}{x+1}$
2. Donner les tableaux de variations de  $f$  et  $g$
3. Déterminer les points d'intersection de  $(C_f)$  et  $(C_g)$  avec les axes du repère
4. Tracer les courbes  $(C_f)$  et  $(C_g)$  dans le même repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$
5. Déterminer algébriquement les points d'intersection de  $(C_f)$  et  $(C_g)$
6. Résoudre graphiquement l'inéquation  $f(x) \geq g(x)$
7. Soit  $h$  la fonction définie par :  $h(x) = \frac{3|x|-3}{|x|+1}$ 
  - a) Déterminer  $D_h$
  - b) Montrer que la fonction  $h$  est paire
  - c) Vérifier que  $h(x) = g(x)$  pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}^+$
  - d) Tracer la courbe  $(C_h)$  dans le même repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$
8. Soit  $k$  la fonction définie par :  $k(x) = |f(x)|$ 
  - a) Tracer la courbe  $(C_k)$  dans le même repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$
  - b) Discuter suivant les valeurs du paramètre réel  $m$ , le nombre de solutions de l'équation  $k(x) = m$

\*\*\*