2) $I=]-\infty,0]\quad ;f(x)=5-x^2$

3) $I=\mathbb{R}^+\quad ;f(x)=\dfrac{2}{\sqrt{x}+1}$

***

Corrigé de l'exercice 1 :

a. $f(x)=x^2+4x-5$

$D_f=\mathbb{R}$ (car f est une fonction polynôme)

b. $f(x)=\dfrac{2x+1}{x}$

$D_f=\{x\in\mathbb{R}/x\neq 0\}=\mathbb{R}-\{0\}=]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$

c. $f(x)=\dfrac{3x}{x^2-9}$

$$\begin{aligned} D_f &= \{x\in\mathbb{R}/x^2-9\neq 0\}\\ &= \{x\in\mathbb{R}/(x-3)(x+3)\neq 0\}\\ &= \{x\in\mathbb{R}/x-3\neq 0 \quad et \quad x+3\neq 0\}\\ &= \{x\in\mathbb{R}/x\neq 3 \quad et \quad x\neq -3\}\\ &= \mathbb{R}-\{-3,3\}\\ &=]-\infty,-3[\cup]-3,3[\cup]3,+\infty[\end{aligned}$$

d. $f(x)=\sqrt{x^2+1}$

$D_f=\{x\in\mathbb{R}/x^2+1\geq 0\}=\mathbb{R}$ (car pour tout x de $\mathbb{R}$, on a : $x^2+1>0$)

e. $f(x)=\sqrt{x^2+x+5}$

$D_f=\{x\in\mathbb{R}/x^2+x+5\geq 0\}$

Etudions le signe su polynôme x^2+x+5 :

On a : $\Delta=1^2-4(1)(5)=-19<0$

x	$-\infty$ $\quad$ $+\infty$
$x2+x+5$	$+$

D'où : $D_f=\mathbb{R}$

f. $f(x)=\sqrt{x}+\dfrac{1}{x-1}$

$$\begin{aligned} D_f &= \{x \in \mathbb{R} / x \geq 0 \quad et \quad x-1 \neq 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} / x \geq 0 \quad et \quad x \neq 1\} \\ &= [0,1[\cup]1,+\infty[\end{aligned}$$

g. $f(x)=\sqrt{x^2-x-2}$

$D_f=\{x \in \mathbb{R} / x^2-x-2 \geq 0\}$

Etudions le signe su polynôme x^2-x-2 :

On a : $\Delta=(-1)^2-4(1)(-2)=9>0$

$x_1=\dfrac{-(-1)-\sqrt{9}}{2(1)}$, $x_2=\dfrac{-(-1)+\sqrt{9}}{2(1)}$

$x_1=-1$, $x_2=2$

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$x2-x-2$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc : $D_f=]-\infty,-1]\cup[2,+\infty[$

h. $f(x)=3-\sqrt{2-x}$

$D_f=\{x \in \mathbb{R} / 2-x \geq 0\}=\{x \in \mathbb{R} / x \leq 2\}=]-\infty,2]$

i. $f(x)=\dfrac{2x+1}{\sqrt{x^2-6x+5}}$

$D_f=\{x \in \mathbb{R} / x^2-6x+5>0\}$

Etudions le signe su polynôme x^2-6x+5 :

On a : $\Delta=(-6)^2-4(1)(5)=16>0$

$x_1=\dfrac{-(-6)-\sqrt{16}}{2(1)}$, $x_2=\dfrac{-(-6)+\sqrt{16}}{2(1)}$

$x_1=1$, $x_2=5$

x	$-\infty$		1		5		$+\infty$
$x2-6x+5$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc : $D_f=]-\infty,1[\cup]5,+\infty[$

j. $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$

$D_f=\{x \in \mathbb{R} / x-2 \neq 0\}=\{x \in \mathbb{R} / x \neq 2\}=]-\infty,2[\cup]2,+\infty[$

Corrigé de l'exercice 2 :

$f(x)=x^2+x-2$

$D_f=\mathbb{R}$

- ▷ On a : $f(0)=-2$ donc $O(0,0)\notin(C_f)$
- ▷ On a : $f(0)=-2$ donc $A(0,-2)\in(C_f)$
- ▷ On a : $f(-2)=0$ donc $B(-2,0)\in(C_f)$
- ▷ On a : $f(1)=0$ donc $C(1,1)\notin(C_f)$
- ▷ On a : $f(2)=4$ donc $D(2,7)\notin(C_f)$
- ▷ On a : $f(1)=0$ donc $E(1,0)\in(C_f)$

Corrigé de l'exercice 3 :

▷ $f(x)=-x^3+2x|x|$

$D_f=\mathbb{R}$

Soit $x\in\mathbb{R}$, on a :

- ○ $-x\in\mathbb{R}$
- ○ $f(-x)=-(-x)^3+2(-x)|-x|=x^3-2x|x|=-(-x^3+2x|x|)=-f(x)$

Donc pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a : $\begin{cases}-x\in\mathbb{R}\\ f(-x)=-f(x)\end{cases}$

D'où f est une fonction impaire.

▷ $f(x)=x^4-3|x|$

$D_f=\mathbb{R}$

Soit $x\in\mathbb{R}$, on a :

- ○ $-x\in\mathbb{R}$
- ○ $f(-x)=(-x)^4-3|-x|=x^4-3|x|=f(x)$

Donc pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a : $\begin{cases}-x\in\mathbb{R}\\ f(-x)=-f(x)\end{cases}$

D'où f est une fonction paire.

- $f(x) = -2x^3 + 5x - 2$

  $D_f = \mathbb{R}$

  - $f(2) = -8$
  - $f(-2) = 4$
  - $-f(2) = 8$
    - Puisque $f(-2) \neq f(2)$ alors f n'est pas paire
    - Puisque $f(-2) \neq -f(2)$ alors f n'est pas impaire

Corrigé de l'exercice 4 :

1) Soient a *et* b deux éléments de $\mathbb{R}$, tels que $a < b$:

   $f(a) - f(b) = (3a - 4) - (3b - 4) = 3a - 3b = 3(a - b)$

   Puisque $a < b$ alors $a - b < 0$

   Donc $3(a - b) < 0$

   Donc $f(a) - f(b) < 0$

   Donc $f(a) < f(b)$

   Et par suite f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2) Soient a *et* b deux éléments de $]-\infty, 0]$, tels que $a < b$:

   On a $a < b$

   Donc $a^2 > b^2$ (car a *et* b sont négatifs)

   Donc $-a^2 < -b^2$

   Donc $5 - a^2 < 5 - b^2$

   Donc $f(a) < f(b)$

   Et par suite f est strictement croissante sur $]-\infty, 0]$.

3) Soient a *et* b deux éléments de $\mathbb{R}^+$, tels que $a < b$:

   On a $a < b$

   Donc $\sqrt{a} < \sqrt{b}$

   Donc $\sqrt{a} + 1 < \sqrt{b} + 1$

   Donc $\dfrac{1}{\sqrt{a} + 1} > \dfrac{1}{\sqrt{b} + 1}$

Donc $\dfrac{2}{\sqrt{a}+1} > \dfrac{2}{\sqrt{b}+1}$

Donc $f(a) > f(b)$

Et par suite f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^{+}$.

つづく