

FONCTIONS - Généralités

Leçon : FONCTIONS - Généralités

Présentation globale

Chapitre n° 1

I) Définitions et Domaine de définitions.

- 1 Définitions
- 2 Exemples
- 3 Domaine de définitions.

Chapitre n° 2

II) Egalité de deux fonctions – Représentations graphique

- 1 Egalité de deux fonctions
- 2 Représentations graphique

Chapitre n° 3

III) Fonctions paires et Fonctions impaires

- 1 Définitions
- 2 le graphe et la parité de la fonction

IV) Les variations d'une fonction numérique

- 1 Fonction croissante -décroissante -fonction constantes
- 2 Le taux d'accroissement d'une fonction

Chapitre n° 5

V) Les extremums d'une fonction numérique

VI) Etude et représentation graphique des fonctions $x \xrightarrow{f} ax^2$

VII) Etude et représentation graphique des fonctions $x \xrightarrow{f} ax^2 + bx + c$

VIII) Etude et représentation graphique des fonctions : $x \xrightarrow{f} \frac{a}{x}$

IX) Etude et représentation graphique des fonctions homographiques : $x \xrightarrow{f} \frac{ax+b}{cx+d}$

I) Définitions et Domaine de définitions

1°) Définitions

Définition : Une fonction est une relation qui à un nombre x appartenant à un ensemble D associe un nombre y

On note : $x \xrightarrow{f} y$ ou encore $f : x \mapsto y$ ou encore $y = f(x)$

On dit que y est l'image de x par la fonction f et que x est un antécédent de y par la fonction f

2) Exemples :

Exemple 1: Soit Les fonctions numériques suivants :

$$f(x) = x^2 + 2x - 5 \quad g(x) = \frac{3x^3 + 2x^2 - 1}{5x^2 - 4}$$

$$; h(x) = \frac{2x-1}{5x-4} ; l(x) = \sqrt{x} ; R(x) = \frac{\sin x - \cos x}{\tan x}$$

f S'appelle une fonction polynôme

g S'appelle une fonction rationnelle

h S'appelle une fonction rationnelle et s'appelle aussi une fonction homographique : Une fonctions homographique s'écrit

$$\text{sous la forme : } h(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$$

l S'appelle la fonction racine carré

R S'appelle la fonction circulaire ou fonction trigonométrique

Exemple 2: Soit la fonction f définie par , $f(x) = 3x^2 - 1$

1) Calculer l'image de 1 et $\sqrt{2}$ et -1 par f .

2) Déterminer les antécédents éventuels de 2 par f .

Réponses : 1) $f(1) = 3 \times 1^2 - 1 = 3 - 1 = 2$ et

$$f(\sqrt{2}) = 3 \times (\sqrt{2})^2 - 1 = 6 - 1 = 5$$

$$f(-1) = 3 \times (-1)^2 - 1 = 3 - 1 = 2$$

$$2) f(x) = 2 \text{ ssi } 3 \times x^2 - 1 = 2$$

$$\text{ssi } 3 \times x^2 = 2 + 1 \text{ ssi } 3 \times x^2 = 3 \text{ ssi } x^2 = 1$$

$$\text{ssi } x = -1 \text{ ou } x = 1$$

donc les antécédents éventuels de 2 par f sont -1 et 1

3°) Domaine de définitions

ACTIVITES :

a. On considère la fonction définie par : $x \xrightarrow{f} \frac{1}{x-3}$

Parmi les valeurs suivantes, laquelle/lesquelles n'a/ont pas d'image par f ? 0 ; 2 ; -3 ; 3.

b. On considère la fonction définie par : $x \mapsto \sqrt{x-3}$

Parmi les valeurs suivantes, laquelle/lesquelles n'a/ont pas d'image par g ? 0 ; 2 ; -3 ; 4.

c. On considère la fonction définie par : $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{7-x}}$

Parmi les valeurs suivantes, laquelle/lesquelles n'a/ont pas d'image par h ? 5 ; -6 ; 9 ; 7.

Définition : Pour une fonction f donnée, l'ensemble de tous les nombres réels qui ont une image par cette fonction est appelé ensemble de définition de la fonction f, que l'on notera D_f

Exemple : Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes définie par :

1) $f(x) = 3x^2 - x + 1$. 2) $f(x) = \frac{x^3}{2x-4}$.

$f(x) = \frac{2x^4}{x^2-4}$. 4) $f(x) = \frac{7x-1}{x^3-2x}$.

5) $f(x) = \sqrt{-3x+6}$. 6) $f(x) = \frac{x-5}{2x^2-5x-3}$.

7) $f(x) = \sqrt{x^2-3x+2}$. 8) $f(x) = \sqrt{\frac{-3x+9}{x+1}}$.

9) $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{-2x^2+x+3}}$. 10) $f(x) = \frac{|x-5|}{x^2+1}$.

11) $f(x) = \frac{\sqrt{|x|}}{x}$. 12) $f(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{x-1}$.

13) $f(x) = \sqrt{-2x^2+x+3}$. 14) $f(x) = \frac{|x-5|}{x^2+1}$.

15) $f(x) = \frac{\sqrt{|x|}}{x}$. 16) $f(x) = \frac{\sqrt{x-2}}{2x+4}$.

17) $f(x) = 3x^2 - \frac{1}{x} + \sqrt{-x}$. 18) $f(x) = \frac{x}{|2x-4| - |x-1|}$.

19) $f(x) = \frac{2 \sin x}{2 \cos x - 1}$. 20) $f(x) = \sqrt{\frac{-2x^2+2x+13}{x^2-x-6}}$.

21) $f(x) = \sqrt{x^2 + (2\sqrt{3} - \sqrt{2})x - 2\sqrt{6}}$.

Solutions

1) $f(x) = 3x^2 - x + 1$ f est une fonction polynôme donc Un réel a toujours une image. Donc $D_f = \mathbb{R}$

2) $f(x) = \frac{x^3}{2x-4}$. Pour les fonctions du type fractions rationnelles, l'ensemble de définition est l'ensemble des nombres pour lesquels le dénominateur est non nul.

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / 2x-4 \neq 0\}$$

$$2x-4=0 \text{ ssi } x=\frac{4}{2}=2 \text{ Donc } D_f = \mathbb{R} - \{2\}$$

On dira aussi que 2 est une valeur interdite pour la fonction f

3) $f(x) = \frac{2x^4}{x^2-4}$.

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x^2-4 \neq 0\}$$

$$x^2-4=0 \text{ ssi } x^2-2^2=0 \text{ ssi } (x-2)(x+2)=0$$

$$\text{ssi } x-2=0 \text{ ou } x+2=0 \text{ ssi } x=2 \text{ ou } x=-2$$

$$\text{donc } D_f = \mathbb{R} - \{-2; 2\}$$

4) $f(x) = \frac{7x-1}{x^3-2x}$. $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x^3-2x \neq 0\}$

$$x^3-2x=0 \text{ ssi } x(x^2-2)=0 \text{ ssi } x=0 \text{ ou } x^2-2=0 \text{ ssi } x=0 \text{ ou } x^2=2 \text{ ssi } x=0 \text{ ou } x=\sqrt{2} \text{ ou } x=-\sqrt{2}$$

$$\text{donc } D_f = \mathbb{R} - \{-\sqrt{2}; 0; \sqrt{2}\}$$

5) $f(x) = \sqrt{-3x+6}$.

Pour les fonctions du type racine carrée, l'ensemble de définition est l'ensemble des nombres pour lesquels l'intérieur de la racine est positif : $D_f = \{x \in \mathbb{R} / -3x+6 \geq 0\}$

$$-3x+6 \geq 0 \text{ ssi } x \leq 2 \text{ ssi } x \leq \frac{-6}{-3} \text{ ssi } -3x \geq -6$$

$$\text{Donc } D_f =]-\infty; 2]$$

6) $f(x) = \frac{x-5}{2x^2-5x-3}$. $D_f = \{x \in \mathbb{R} / 2x^2-5x-3 \neq 0\}$

$$2x^2-5x-3=0 \quad a=2 \text{ et } b=-5 \text{ et } c=-3$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \times 2 \times (-3) = 25 + 24 = 49 = (7)^2 > 0$$

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{-(-5)+\sqrt{49}}{2 \times 2} = \frac{7+5}{4} = \frac{12}{4} = 3 \text{ et } x_2 = \frac{-(-5)-\sqrt{49}}{2 \times 2} = \frac{5-7}{4} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Donc } D_f = \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}; 3\right\}$$

7) $f(x) = \sqrt{2x^2-3x+1}$.

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / 2x^2-3x+1 \geq 0\} \text{ soit } \Delta \text{ son discriminant}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 2 \times 1 = 9 - 8 = 1 > 0 \quad a=2$$

$$x_1 = \frac{-(-3)+\sqrt{1}}{2 \times 2} = \frac{4}{4} = 1 \text{ et } x_2 = \frac{-(-3)-\sqrt{1}}{2 \times 2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

x	$-\infty$	$1/2$	1	$+\infty$	
$P(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

$$\text{Donc } D_f = \left] -\infty, \frac{1}{2} \right] \cup [1, +\infty[$$

8) $f(x) = \sqrt{\frac{-9x+3}{x+1}}$. $D_f = \left\{x \in \mathbb{R} / \frac{-9x+3}{x+1} \geq 0 \text{ et } x+1 \neq 0\right\}$

$$-9x+3=0 \text{ ssi } x=\frac{1}{3} \text{ ssi } -9x=-3$$

$$x+1=0 \text{ ssi } x=-1$$

x	$-\infty$	-1	$\frac{1}{3}$	$+\infty$
-9x+3	+	+	0	-
x+1	-	0	+	+
$\frac{-9x+3}{x+1}$	-	+	0	-

Donc $D_f = \left] -1, \frac{1}{3} \right]$

9) $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{-2x^2+x+3}}$.

$D_f = \{x \in \mathbb{R} / -2x^2+x+3 > 0\}$

$-2x^2+x+3=0$ $a=-2$ et $b=1$ et $c=3$

$\Delta = b^2 - 4ac = (1)^2 - 4 \times (-2) \times 3 = 1 + 24 = 25 = (5)^2 > 0$

Donc on a deux racines

$x_1 = \frac{-1+5}{2 \times (-2)} = \frac{4}{-4} = -1$ et $x_2 = \frac{-1-5}{2 \times (-2)} = \frac{-6}{-4} = \frac{3}{2}$

x	$-\infty$	-1	$3/2$	$+\infty$	
$-2x^2+x+3$	$-$	0	$+$	0	$-$

Donc $D_f = \left[-1, \frac{3}{2} \right]$

10) $f(x) = \frac{|x-5|}{x^2+1}$. $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x^2+1 \neq 0\}$

$x^2+1=0$ ssi $x^2=-1$

Cette équation n'admet pas de solution dans \mathbb{R}

Donc $D_f = \mathbb{R}$

11) $f(x) = \frac{\sqrt{|x|}}{x}$.

$f(x) \in \mathbb{R}$ ssi $\sqrt{|x|} \in \mathbb{R}$ et $x \neq 0$

Or on sait que $|x| \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

Donc $f(x) \in \mathbb{R}$ ssi $x \neq 0$ Donc $D_f = \mathbb{R} - \{0\} = \mathbb{R}^*$

16) $f(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{x-1}$. $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x+2 \geq 0 \text{ et } x-1 \neq 0\}$

$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \geq -2 \text{ et } x \neq 1\}$

$D_f = [-2, 1[\cup]1, +\infty[$

17) $f(x) = 3x^2 - \frac{1}{x} + \sqrt{-x}$

$D_f = \{x \in \mathbb{R} / -x \geq 0 \text{ et } x \neq 0\}$

$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \leq 0 \text{ et } x \neq 0\}$ donc : $D_f =]-\infty, 0[$

18) $f(x) = \frac{x}{|2x-4|-|x-1|}$.

$D_f = \{x \in \mathbb{R} / |2x-4|-|x-1| \neq 0\}$

$|2x-4|-|x-1|=0$ ssi $|2x-4|=|x-1|$

ssi $2x-4=x-1$ ou $2x-4=-(x-1)$

ssi $2x-x=4-1$ ou $2x-4=-x+1$

ssi $x=3$ ou $2x+x=4+1$

ssi $x=3$ ou $3x=5$ ssi $x=3$ ou $x=\frac{5}{3}$

Donc $D_f = \mathbb{R} - \left\{ \frac{5}{3}; 3 \right\}$

19) $f(x) = \frac{2 \sin x}{2 \cos x - 1}$. $D_f = \{x \in \mathbb{R} / 2 \cos x - 1 \neq 0\}$

$2 \cos x - 1 = 0$ ssi $\cos x = \frac{1}{2}$

$\cos x = \frac{1}{2}$ ssi $\cos x = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$

$x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$

Donc: $D_f = \mathbb{R} - \left\{ -\frac{\pi}{3} + 2k\pi; \frac{\pi}{3} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$

20) $f(x) = \sqrt{\frac{-2x^2+2x+13}{x^2-x-6}}$.

$D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} / \frac{-2x^2+2x+13}{x^2-x-6} \geq 0 \text{ et } x^2-x-6 \neq 0 \right\}$

- On détermine les racines du trinôme $-2x^2+2x+13$:

Le discriminant est $\Delta' = 2^2 - 4 \times (-2) \times 13 = 108$ et ses racines sont :

$x_1 = \frac{-2 - \sqrt{108}}{2 \times (-2)} = \frac{1+3\sqrt{3}}{2}$ et $x_2 = \frac{-2 + \sqrt{108}}{2 \times (-2)} = \frac{1-3\sqrt{3}}{2}$

- On détermine les racines du trinôme x^2-x-6 :

Le discriminant est $\Delta = (-1)^2 - 4 \times (-6) \times 1 = 25$ et ses racines sont :

$x_1' = \frac{-(-1) - \sqrt{25}}{2 \times 1} = \frac{1-5}{2} = -2$ et $x_2' = \frac{-(-1) + \sqrt{25}}{2 \times 1} = \frac{1+5}{2} = 3$

- On obtient le tableau de signe :

x	$-\infty$	$\frac{1-3\sqrt{3}}{2}$	-2	3	$\frac{1+3\sqrt{3}}{2}$	$+\infty$	
$-2x^2+2x+13$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
x^2-x-6	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$
$\frac{-2x^2+2x+13}{x^2-x-6}$	$-$	0	$+$	$-$	$+$	0	$-$

$D_f = \left[\frac{1-3\sqrt{3}}{2}; -2 \right] \cup \left[3; \frac{1+3\sqrt{3}}{2} \right]$.

21) $f(x) = \sqrt{x^2 + (2\sqrt{3} - \sqrt{2})x - 2\sqrt{6}}$

$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x^2 + (2\sqrt{3} - \sqrt{2})x - 2\sqrt{6} \geq 0\}$

$\Delta = b^2 - 4ac = (2\sqrt{3} - \sqrt{2})^2 - 4 \times 1 \times (-2\sqrt{6})$

$\Delta = 12 - 4\sqrt{6} + 2 + 8\sqrt{6} = 14 + 4\sqrt{6}$

$14 + 4\sqrt{6} = 14 + 2 \times 2\sqrt{3} \times \sqrt{2} = (2\sqrt{3})^2 + 2 \times 2\sqrt{3} \times \sqrt{2} + (\sqrt{2})^2$

$14 + 4\sqrt{6} = (2\sqrt{3} + \sqrt{2})^2$

On a $\Delta = 14 + 4\sqrt{6} > 0$ donc

$x_1 = \frac{-2\sqrt{3} + \sqrt{2} + \sqrt{14 + 4\sqrt{6}}}{2 \times 1} = \frac{-2\sqrt{3} + \sqrt{2} + |2\sqrt{3} + \sqrt{2}|}{2 \times 1}$

$$\text{et } x_2 = \frac{-2\sqrt{3} + \sqrt{2} - |2\sqrt{3} + \sqrt{2}|}{2 \times 1}$$

$$x_1 = \frac{-2\sqrt{3} + \sqrt{2} + 2\sqrt{3} + \sqrt{2}}{2 \times 1} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \quad \text{et}$$

$$x_2 = \frac{-2\sqrt{3} + \sqrt{2} - 2\sqrt{3} - \sqrt{2}}{2 \times 1} = \frac{-4\sqrt{3}}{2} = -2\sqrt{3}$$

x	$-\infty$	$-2\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	$+\infty$	
$x^2 + (2\sqrt{3} - \sqrt{2})x - 2\sqrt{6}$	+	0	-	0	+

On a donc : $D_f =]-\infty; -2\sqrt{3}] \cup [\sqrt{2}; +\infty[$

II) Egalité de deux fonctions – Représentations graphique

1) Egalité de deux fonctions

Définition : Soient f et g deux fonctions, et D_f et D_g

leurs domaines de définition respectifs
on dit que f et g sont égaux et on écrit $f=g$.
si et seulement si :

$D_f = D_g$ et pour tout $x \in D_f$ (ou $x \in D_g$) on a $f(x)=g(x)$

Exemple 1 : Soient les deux fonctions :

$$f(x) = \frac{3x^2 + 1}{\sqrt{x^2}} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{1 + 3x^2}{|x|}$$

- on a $f(x) \in \mathbb{R}$ ssi $\sqrt{x^2} \in \mathbb{R}$ et $x \neq 0$

or on sait que $x^2 \geq 0$ donc $\sqrt{x^2} \in \mathbb{R}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

alors $f(x) \in \mathbb{R}$ ssi $x \neq 0$ donc $D_f = \mathbb{R}^*$

- on a $g(x) \in \mathbb{R}$ ssi $|x| \neq 0$ ssi $x \neq 0$

donc $D_g = \mathbb{R}^*$

alors $D_f = D_g = \mathbb{R}^*$

on sait que $\sqrt{x^2} = |x|$ et $3x^2 + 1 = 1 + 3x^2$ donc $f(x)=g(x)$

donc finalement on a trouvé que : $D_f = D_g = \mathbb{R}^*$ et

$f(x)=g(x)$ donc $f=g$.

Exemple 2 : Soient les deux fonctions :

$$h(x) = \frac{x^2 - x}{x} \quad \text{et} \quad t(x) = x - 1$$

- on a $h(x) \in \mathbb{R}$ ssi $x \neq 0$ donc $D_h = \mathbb{R}^*$

- on a $t(x)$ est un polynôme donc $D_t = \mathbb{R}$

alors $D_h \neq D_t$ donc : $h \neq t$

2) Représentations graphique

Dans ce paragraphe le plan est rapporté à un repère (O, \vec{i}, \vec{j})

Définition : Soit f une fonction, et D_f son domaine de définition

l'ensemble des points $M(x, f(x))$ forme la courbe représentative de la fonction f , souvent notée C_f .

$$C_f = \{M(x, f(x)) / x \in D_f\}$$

Méthode :

Pour tracer la courbe représentative de la fonction On calcule des images en nombre suffisant, et on présente les résultats dans un tableau de valeurs.

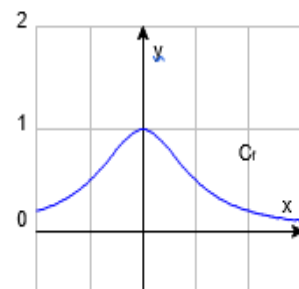
Exemple 1 : Tracer la représentation graphique de la

$$\text{fonction } f \text{ tq : } f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$$

Sur I un l'intervalle $I = [-2; 3]$

Réponses :

x	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	0,2	0,5	1	0,5	0,2	0,1



Exemple 2 : la courbe représentative d'une fonction affine f ($f(x) = ax + b$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$) est une droite d'équation $y = ax + b$

Exemple 3 : Soie f une fonction tq : $f(x) = |2x + 3|$

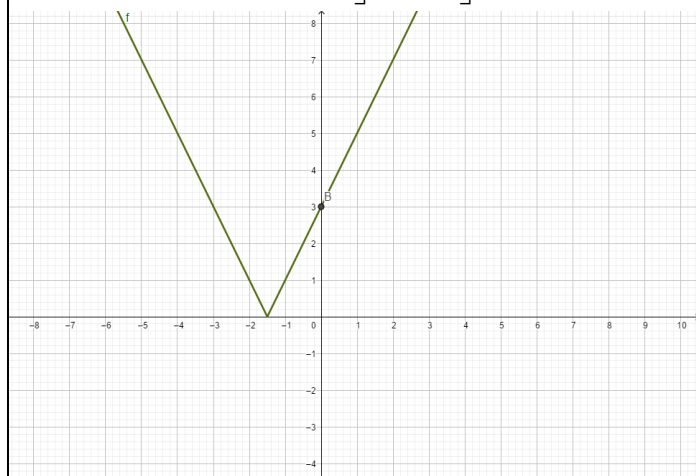
- on a $f(x) \in \mathbb{R}$ donc $D_f = \mathbb{R}$

x	$-\frac{3}{2}$	$+\infty$
$2x+3$	$-$	$+$
$ 2x+3 $	$-2x-3$	$2x+3$

$$2x + 3 = 0 \quad \text{ssi} \quad x = -\frac{3}{2}$$

$$\text{Donc } f(x) = 2x + 3 \text{ si } x \in \left[-\frac{3}{2}, +\infty\right[$$

$$f(x) = -2x - 3 \text{ si } x \in \left]-\infty, -\frac{3}{2}\right]$$



Exemple 4: Soie f une fonction tq : $f(x) = |x-2| + |x+2|$

- on a $f(x) \in \mathbb{R}$ donc $D_f = \mathbb{R}$

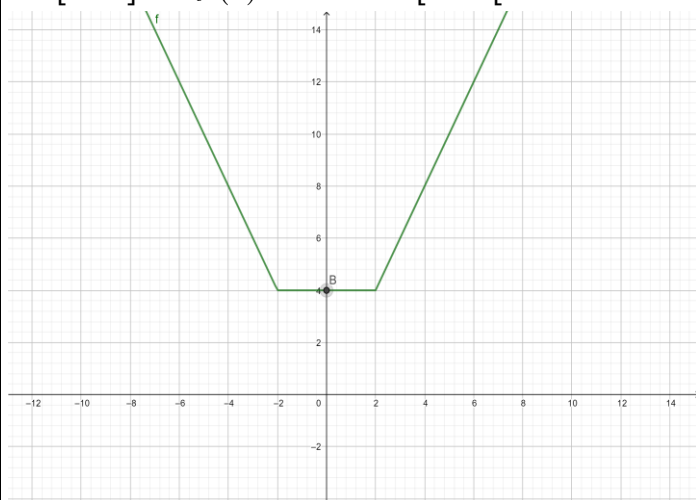
$$x+2=0 \text{ ssi } x=-2$$

$$x-2=0 \text{ ssi } x=2$$

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$
$x-2$	$-$	$-$	0	$+$
$ x-2 $	$-x+2$	$-x+2$	$x-2$	
$x+2$	$-$	0	$+$	$+$
$ x+2 $	$-x-2$	$x+2$	$x+2$	
$ x-2 + x+2 $	$-2x$	4	$2x$	

Donc $f(x) = -2x$ si $x \in]-\infty, -2]$ et $f(x) = 4$ si

$x \in [-2, 2]$ et $f(x) = 2x$ si $x \in [2, +\infty[$

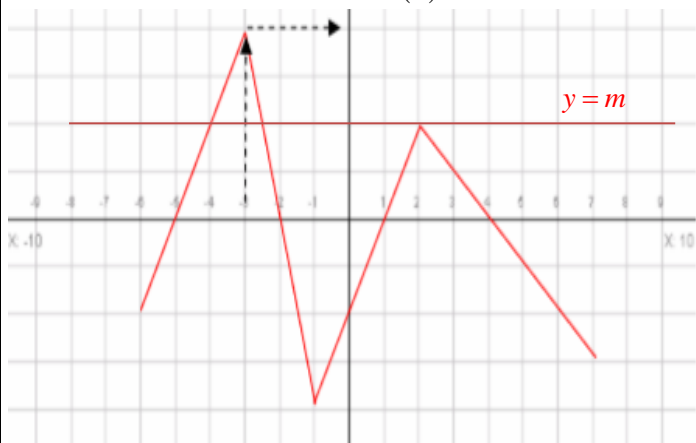


Exemple 5 : La courbe ci-dessous représente la fonction f définie sur $[-6; 7]$

Soie f une fonction

Questions : Répondre par lecture graphique :

- 1- Quelles sont les images des réels -5, -3, 0 et 6 ?
- 2- Quels sont les antécédents de -1 et 0 ?
- 3- Résoudre graphiquement $f(x) = 0$
- 4- Quel est, en fonction de m , le nombre de solutions de $f(x) = m$
- 5- Résoudre graphiquement $f(x) < 0$
- 6- Résoudre graphiquement $f(x) \geq 2$



Prof/ATMANI NAJIB

Réponses : 1) Image de -5 est 0 (ordonnée du point d'abscisse -5) Image de -3 est 4

Image de 0 est -2 Image de 6 est -2

2) Antécédents de -1 sont : -5,5 -1,75 0,5 et 5

Antécédents de 0 sont : -5 -2 1 et 4

3) La solution est l'ensemble des antécédents de 0 :

$$S = \{-5; -2; 1; 4\}$$

4) Nombre de solutions de $f(x) = m$ C'est le nombre de points d'intersection de courbe avec une la droite parallèle à l'axes des abscisses et d'ordonnées m .

Si $m < -4$: pas de solution

Si $m = -4$: une solution

Si $-4 < m < -3$ deux solutions

Si $-3 < m < -2$: trois solutions

Si $-2 < m < 2$: quatre solutions

Si $m = 2$: trois solutions

Si $2 < m < 4$ deux solutions

Si $m = 4$: une solution

Si $m > 4$: pas de solution

5) $f(x) < 0$ Cela correspond aux valeurs de x pour lesquelles C_f est au-dessous de l'axe des abscisses.

$$S = [-6; 7] \cup]-2; 1[\cup]4; 7]$$

6) $f(x) \geq 2$ Cela correspond aux valeurs de x pour lesquelles C_f est au-dessus de la droite d'équation $y = 2$ donc $S = [-4; 2.5] \cup \{2\}$

III) Fonctions paires et Fonctions impaires

1. Définitions :

a. Ensemble de définition centré

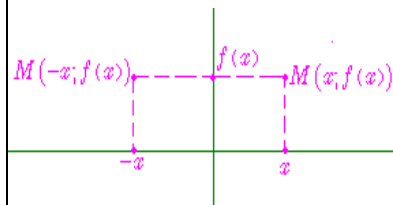
Soit f une fonction. Soit D_f son ensemble de définition.

On dit que D_f est un ensemble de définition centré si et seulement si : Pour tout réel x , si $x \in D_f$, alors $-x \in D_f$.

b. Fonction paire

On dit qu'une fonction f est paire si et seulement si :

1. Son ensemble de définition est centré
2. Pour tout réel x de D_f , on a : $f(-x) = f(x)$



Remarques :

- si n est un entier pair, positif ou négatif, la fonction définie par $f(x) = kx^n$ est paire.

(C'est d'ailleurs de cet exemple que vient la dénomination de fonction paire)

- la fonction $x \mapsto |x|$ est une fonction paire,

- la fonction $x \mapsto \cos(x)$ est une fonction paire,

- l'opposée d'une fonction paire est une fonction paire,

- l'inverse d'une fonction paire est une fonction paire,

- la somme de deux fonctions paires est une fonction paire,

- le produit de 2 fonctions paires ou de 2 fonctions impaires est une fonction paire.

c. Fonction impaire

On dit qu'une fonction f est impaire si et seulement si :

1. Son ensemble de définition est centré,
2. Pour tout réel x de D_f , on a : $f(-x) = -f(x)$

Remarques :

- si n est un entier impair, positif ou négatif, la fonction $x \mapsto kx^n$ est impaire,
- la fonction $x \mapsto \sin(x)$ est impaire,
- la fonction $x \mapsto \tan x$ est impaire,
- l'opposée d'une fonction impaire est une fonction impaire,
- l'inverse d'une fonction impaire est une fonction impaire,
- la somme de deux fonctions impaires est une fonction impaire,
- le produit d'une fonction paire et d'une fonction impaire est une fonction impaire.

Exemples : 1) Soit f une fonction tq : $f(x) = 3x^2 - 5$
 f est une fonction polynôme donc Un réel a toujours une image.

Donc $D_f = \mathbb{R}$

- Pour tout réel x , si $x \in \mathbb{R}$, alors $-x \in \mathbb{R}$

$$f(-x) = 3(-x)^2 - 5 = 3x^2 - 5$$

$$f(-x) = f(x)$$

Donc f est une fonction paire,

2) Soit g une fonction tq : $g(x) = \frac{3}{x}$

on a $g(x) \in \mathbb{R}$ ssi $x \neq 0$

donc $D_g = \mathbb{R}^*$

- Pour tout réel x , si $x \in \mathbb{R}^*$, alors $-x \in \mathbb{R}^*$

$$g(-x) = \frac{3}{-x} = -\frac{3}{x}$$

$$g(-x) = -g(x)$$

Donc g est une fonction impaire,

3) Soit h une fonction tq : $h(x) = 2x^3 + x^2$

h est une fonction polynôme donc Un réel a toujours une image.

Donc $D_h = \mathbb{R}$

- Pour tout réel x , si $x \in \mathbb{R}$, alors $-x \in \mathbb{R}$

$$h(-x) = 2(-x)^3 + (-x)^2 = -2x^3 + x^2$$

$$h(-x) = -(2x^3 - x^2) \neq -h(x)$$

Donc h est une fonction ni paire ni impaire,

4) Soit t une fonction tq : $t(x) = \frac{x}{x-2}$

on a $t(x) \in \mathbb{R}$ ssi $x-2 \neq 0$ ssi $x \neq 2$

Donc $D_t = \mathbb{R} - \{2\}$

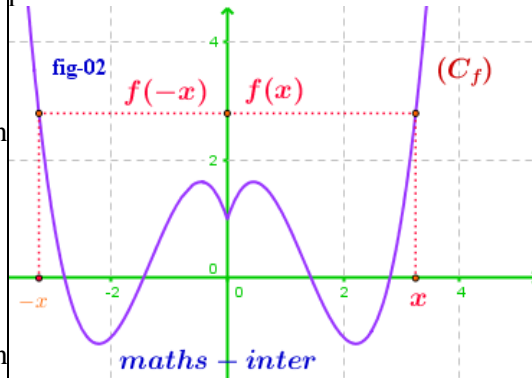
on a $-2 \in D_t$ mais $-(-2) = 2 \notin D_t$

Donc D_t n'est pas symétrique par rapport à O

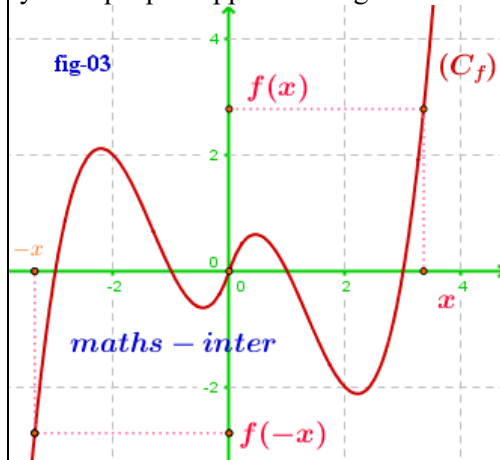
Donc h est une fonction ni paire ni impaire,

2. le graphe et la parité de la fonction

- la courbe représentative d'une fonction paire est symétrique par à l'axe des ordonnées.



- la courbe représentative d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine.



Application :

Etudier la parité des fonctions suivantes définie par

$$1) f(x) = \frac{x^2-1}{x} \quad 2) f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$$

$$3) f(x) = \frac{|x|}{x^2-1} \quad 4) f(x) = \sqrt{1-x^2} \quad 5) f(x) = \frac{2x^3}{x^2+5}$$

$$6) f(x) = |x| - \sqrt{2x^2+4} \quad 7) f(x) = \frac{\sqrt{x}}{2}$$

Solutions

$$1) f(x) = \frac{x^2-1}{x} \quad \text{on a } f(x) \in \mathbb{R} \text{ ssi } x \neq 0$$

donc $D_f = \mathbb{R}^*$

- Pour tout réel x , si $x \in \mathbb{R}^*$, alors $-x \in \mathbb{R}^*$

$$f(-x) = \frac{(-x)^2-1}{-x} = -\frac{x^2-1}{x}$$

$$f(-x) = -f(x)$$

Donc f est une fonction impaire,

$$2) f(x) = x^2 + \frac{1}{x} \quad \text{on a } f(x) \in \mathbb{R} \text{ ssi } x \neq 0$$

donc $D_f = \mathbb{R}^*$

- Pour tout réel x , si $x \in \mathbb{R}^*$, alors $-x \in \mathbb{R}^*$

$$f(-x) = (-x)^2 + \frac{1}{-x} = x^2 - \frac{1}{x} = \left(-x^2 + \frac{1}{x}\right)$$

$$f(-x) \neq -f(x)$$

Donc f est une fonction ni paire ni impaire,

$$3) f(x) = \frac{|x|}{x^2 - 1} \text{ on a } f(x) \in \mathbb{R} \text{ ssi } x^2 - 1 \neq 0$$

$$x^2 - 1 = 0 \text{ ssi } x^2 = 1 \text{ ssi } x = 1 \text{ ou } x = -1$$

$$\text{donc } D_f = \mathbb{R} - \{-1; 1\}$$

- Pour tout réel x , si $x \in \mathbb{R} - \{-1; 1\}$, alors

$$-x \in \mathbb{R} - \{-1; 1\}$$

$$f(-x) = \frac{|-x|}{(-x)^2 - 1} = \frac{|x|}{x^2 - 1}$$

$$f(-x) = f(x)$$

Donc f est une fonction paire

$$4) f(x) = \sqrt{1 - x^2}$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / 1 - x^2 \geq 0\}$$

$$1 - x^2 = 0 \text{ ssi } x^2 = 1 \text{ ssi } x = 1 \text{ ou } x = -1$$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$1 - x^2$	$-$	0	0	$-$

$$\text{Donc } D_f = [-1, 1]$$

- Pour tout réel x , si $x \in [-1, 1]$, alors $-x \in [-1, 1]$

$$f(-x) = \sqrt{1 - (-x)^2} = \sqrt{1 - x^2}$$

$$f(-x) = f(x)$$

Donc f est une fonction paire

$$5) f(x) = \frac{2x^3}{x^2 + 5}$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x^2 + 5 \neq 0\}$$

$$x^2 + 5 = 0 \text{ ssi } x^2 = -5 \text{ pas de solutions}$$

$$\text{Donc } D_f = \mathbb{R}$$

- Pour tout réel x , si $x \in \mathbb{R}$, alors $-x \in \mathbb{R}$

$$f(-x) = \frac{2(-x)^3}{(-x)^2 + 5} = \frac{-2x^3}{x^2 + 5}$$

$$f(-x) = -f(x)$$

Donc f est une fonction impaire

$$6) f(x) = |x| - \sqrt{2x^2 + 4}$$

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / 2x^2 + 4 \geq 0\}$$

Or on sait que $2x^2 \geq 0$ Pour tout réel x , donc

$$2x^2 + 4 \geq 0 + 4 \text{ donc } 2x^2 + 4 \geq 4 \geq 0$$

$$\text{Donc } D_f = \mathbb{R}$$

- Pour tout réel x , si $x \in \mathbb{R}$, alors $-x \in \mathbb{R}$

$$f(-x) = |-x| - \sqrt{2(-x)^2 + 4} = |x| - \sqrt{2x^2 + 4}$$

$$f(-x) = f(x)$$

Donc f est une fonction paire

$$6) f(x) = \frac{\sqrt{x}}{2} \quad D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 0\} \text{ Donc}$$

$$D_f = \mathbb{R}^+ = [0; +\infty[$$

On a $2 \in \mathbb{R}^+$ mais $-2 \notin \mathbb{R}^+$ Donc f est une fonction ni paire ni impaire

IV) Les variations d'une fonction numérique

1) Sens de variation d'une fonction : fonction croissante - décroissante - fonction constantes

Définition : Soit f une fonction et D_f son domaine de définition et soit I un intervalle inclus dans D_f

- Dire f que est strictement croissante sur I (croissante sur I) signifie que :

$$\text{Si } x_1 \in I \text{ et } x_2 \in I \text{ tq } x_1 < x_2 \text{ alors } f(x_1) < f(x_2) \\ (f(x_1) \leq f(x_2))$$

Rq : Une fonction croissante « conserve l'ordre ».

- Dire f que est strictement décroissante sur I (décroissante sur I) signifie que :

$$\text{Si } x_1 \in I \text{ et } x_2 \in I \text{ tq } x_1 < x_2 \text{ alors } f(x_1) > f(x_2) \\ (f(x_1) \geq f(x_2))$$

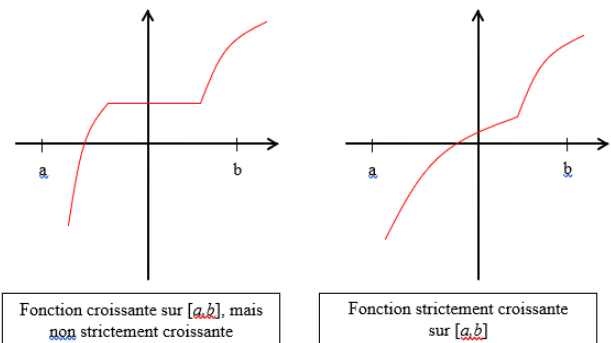
Rq : Une fonction décroissante « inverse l'ordre ».

- Dire f que est constante sur I signifie que :

$$\text{Si } x_1 \in I \text{ et } x_2 \in I \text{ tq } x_1 < x_2 \text{ alors } f(x_1) = f(x_2)$$

- Une fonction définie sur un intervalle I est monotone sur cet intervalle si elle est : soit croissante sur I soit décroissante sur I

Illustration graphique :



Exemples : 1) Soit f une fonction tq : $f(x) = 7x - 5$

f est une fonction polynôme donc $D_f = \mathbb{R}$

Soit $x_1 \in \mathbb{R}$ et $x_2 \in \mathbb{R}$ tq $x_1 < x_2$

Donc $7x_1 < 7x_2$ car $7 > 0$

Donc $7x_1 - 5 < 7x_2 - 5$

Alors $f(x_1) < f(x_2)$ d'où f que est strictement croissante sur \mathbb{R}

2) Soit g une fonction tq : $g(x) = \frac{2}{x}$

$g(x) \in \mathbb{R}$ ssi $x \neq 0$

Donc $D_g = \mathbb{R} - \{0\} = \mathbb{R}^*$

a) Soit $x_1 \in [0; +\infty[$ et $x_2 \in [0; +\infty[$ tq $x_1 < x_2$

Donc $\frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2}$ Donc $\frac{2}{x_1} > \frac{2}{x_2}$ car $2 > 0$

Alors $f(x_1) > f(x_2)$ d'où f que est strictement décroissante sur $[0; +\infty[$

b) Soit $x_1 \in]-\infty; 0]$ et $x_2 \in]-\infty; 0]$ tq $x_1 < x_2$

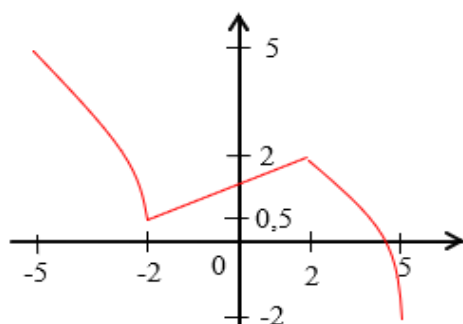
Donc $\frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2}$ Donc $\frac{2}{x_1} > \frac{2}{x_2}$ car $2 > 0$

Alors $f(x_1) > f(x_2)$ d'où f que est strictement décroissante sur $] -\infty; 0]$

b) tableau de variation :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$			

3)



x	-5	-2	2	5
$f(x)$	5	0,5	2	-2

Propriété : Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I

On dit que f est strictement constante sur I ssi il existe un réel k tq : $f(x) = k$

pour tout $x \in I$

2) Le taux d'accroissement d'une fonction

a) Définition : Soit f une fonction et D_f son domaine de définition

Et soient $x_1 \in D_f$ et $x_2 \in D_f$ tq $x_1 \neq x_2$

On appelle Le taux d'accroissement (taux de variation) de la fonction f entre x_1 et x_2

Le réel noté $T(x_1; x_2)$ est tq : $T(x_1; x_2) = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$

Exemple : Soit f une fonction tq : $f(x) = 3x^2 + 2$

f est une fonction polynôme donc $D_f = \mathbb{R}$

soient $x_1 \in \mathbb{R}$ et $x_2 \in \mathbb{R}$ tq $x_1 \neq x_2$

$$T(x_1; x_2) = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{(3x_1^2 + 2) - (3x_2^2 + 2)}{x_1 - x_2}$$

$$T(x_1; x_2) = \frac{3x_1^2 - 3x_2^2 + 2 - 2}{x_1 - x_2} = \frac{3(x_1^2 - x_2^2)}{x_1 - x_2}$$

$$T(x_1; x_2) = \frac{3(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)}{x_1 - x_2} = 3(x_1 + x_2)$$

b) Le taux d'accroissement d'une fonction et les variations :

Propriété : Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I

• On dit que f est strictement croissante (croissante) sur I ssi pour tout $x_1 \in I$ et $x_2 \in I$ et $x_1 \neq x_2$ on a

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0 \quad \left(\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \geq 0 \right)$$

• On dit que f est strictement décroissante (décroissante) sur I ssi pour tout $x_1 \in I$ et $x_2 \in I$ et $x_1 \neq x_2$ on a

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0 \quad \left(\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \leq 0 \right)$$

• On dit que f est constante sur I ssi pour tout $x_1 \in I$ et

$$x_2 \in I \text{ et } x_1 \neq x_2 \text{ on a } \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = 0$$

Exemples : 1) Soit f une fonction tq : $f(x) = 3x^2 + 2$

$D_f = \mathbb{R}$

soient $x_1 \in \mathbb{R}$ et $x_2 \in \mathbb{R}$ tq $x_1 \neq x_2$ on a :

$$T(x_1; x_2) = 3(x_1 + x_2)$$

a) Soit $x_1 \in [0; +\infty[$ et $x_2 \in [0; +\infty[$

Donc $x_1 \geq 0$ et $x_2 \geq 0$ Donc $x_1 + x_2 \geq 0$

Donc $3(x_1 + x_2) \geq 0$ car $3 > 0$

Donc $T(x_1; x_2) = 3(x_1 + x_2) \geq 0$

d'où f que est croissante sur $[0; +\infty[$

b) Soit $x_1 \in]-\infty; 0]$ et $x_2 \in]-\infty; 0]$

Donc $x_1 \leq 0$ et $x_2 \leq 0$ Donc $x_1 + x_2 \leq 0$

Donc $3(x_1 + x_2) \leq 0$ car $3 > 0$

Donc $T(x_1; x_2) = 3(x_1 + x_2) \leq 0$

d'où f que est décroissante sur $] -\infty; 0]$

b) résumé : **tableau de variation** : $f(0) = 3 \times 0^2 + 2 = 2$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$		2	

2) Soit f une fonction tq : $g(x) = \frac{x}{x+1}$

on a $f(x) \in \mathbb{R}$ ssi $x+1 \neq 0$ ssi $x \neq -1$

Donc $D_g = \mathbb{R} - \{-1\}$

soient $x_1 \in D_g$ et $x_2 \in D_g$ tq $x_1 \neq x_2$

on a : $T(x_1; x_2) = \frac{g(x_1) - g(x_2)}{x_1 - x_2}$

$$g(x_1) - g(x_2) = \frac{x_1}{x_1+1} - \frac{x_2}{x_2+1} = \frac{x_1(x_2+1) - x_2(x_1+1)}{(x_1+1)(x_2+1)}$$

$$T(x_1; x_2) = \frac{x_1 - x_2}{(x_1+1)(x_2+1)} \times \frac{1}{x_1 - x_2} = \frac{1}{(x_1+1)(x_2+1)}$$

a) sur $I =]-\infty; -1[$

Soit $x_1 \in]-\infty; -1[$ et $x_2 \in]-\infty; -1[$ $x_1 \neq x_2$

Donc $x_1 < -1$ et $x_2 < -1$ Donc $x_1 + 1 < 0$ et

$x_2 + 1 < 0$ Donc $(x_1 + 1)(x_2 + 1) > 0$ Donc

$$T(x_1; x_2) = \frac{1}{(x_1+1)(x_2+1)} > 0 \text{ sur } I =]-\infty; -1[$$

d'où g que est strictement croissante sur $I =]-\infty; -1[$

b) sur $J =]-1; +\infty[$

Soit $x_1 \in]-1; +\infty[$ et $x_2 \in]-1; +\infty[$ $x_1 \neq x_2$

Donc $x_1 > -1$ et $x_2 > -1$ Donc $x_1 + 1 > 0$ et

$x_2 + 1 > 0$ Donc $(x_1 + 1)(x_2 + 1) > 0$ Donc

$$T(x_1; x_2) = \frac{1}{(x_1+1)(x_2+1)} > 0 \text{ sur } J =]-1; +\infty[$$

d'où g que est strictement croissante sur $J =]-1; +\infty[$

c) résumé : **tableau de variation** :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x)$			

c) **les variations et la parité** :

Propriété : Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}^+$ et soit I' le symétrique de l'intervalle I . Si f est paire alors :

• f est croissante sur I ssi f est décroissante sur I'

• f est décroissante sur I ssi f est croissante sur I'

Si f est impaire alors :

• f est croissante sur I ssi f est croissante sur I'

• f est décroissante sur I ssi f est décroissante sur I'

Conséquences :

Si f est paire ou impaire alors il suffit d'étudier ses variations sur $D_f \cap \mathbb{R}^+$ et en déduire ses variations sur D_f

Applications: Soit f une fonction tq : $f(x) = x + \frac{1}{x}$

1) Déterminer D_f et étudier la parité de f

2) Calculer Le taux d'accroissement $T(x_1; x_2)$ de f entre x_1 et x_2 deux éléments de D_f tq $x_1 \neq x_2$

3) Étudier les variations de f sur $I =]0; 1]$ puis sur $J = [1; +\infty[$

4) En déduire les variations de f sur D_f

5) Dresser le tableau de variations de f sur D_f

Réponses : 1) on a $f(x) \in \mathbb{R}$ ssi $x \neq 0$ Donc

$$D_f = \mathbb{R} - \{0\} = \mathbb{R}^*$$

- Pour tout réel x , si $x \in \mathbb{R}^*$, alors $-x \in \mathbb{R}^*$

$$f(-x) = -x + \frac{1}{-x} = -x - \frac{1}{x} = -\left(x + \frac{1}{x}\right)$$

$$f(-x) = -f(x)$$

Donc f est une fonction impaire,

$$2) f(x_1) - f(x_2) = \left(x_1 + \frac{1}{x_1}\right) - \left(x_2 + \frac{1}{x_2}\right) = x_1 + \frac{1}{x_1} - x_2 - \frac{1}{x_2}$$

$$= \frac{x_1^2 \times x_2 + x_2 - x_2^2 \times x_1 - x_1}{x_1 \times x_2} = \frac{x_1 \times x_2 (x_1 - x_2) + x_2 - x_1}{x_1 \times x_2} = \frac{(x_1 - x_2)(x_1 \times x_2 - 1)}{x_1 \times x_2}$$

$$T(x_1; x_2) = \frac{(x_1 - x_2)(x_1 \times x_2 - 1)}{x_1 \times x_2} \times \frac{1}{x_1 - x_2} = \frac{x_1 \times x_2 - 1}{x_1 \times x_2}$$

a) sur $I =]0; 1]$

Soit $x_1 \in]0; 1]$ et $x_2 \in]0; 1]$

Donc $0 < x_1 \leq 1$ et $0 < x_2 \leq 1$ $x_2 + 1 < 0$

Donc $0 < x_1 x_2 \leq 1$ et $x_1 \neq x_2$ Donc $x_1 x_2 - 1 < 0$ et on

$$a) 0 < x_1 x_2 \text{ Donc } T(x_1; x_2) = \frac{x_1 \times x_2 - 1}{x_1 \times x_2} < 0$$

d'où f que est strictement décroissante sur $I =]0; 1]$

b) sur $J = [1; +\infty[$

Soit $x_1 \in [1; +\infty[$ et $x_2 \in [1; +\infty[$

Donc $x_1 \geq 1$ et $x_2 \geq 1$ Donc $x_1 x_2 \geq 1$ et $x_1 \neq x_2$

Donc $x_1 x_2 > 1$ Donc $x_1 x_2 - 1 > 0$

$$\text{et on a } 0 < x_1 x_2 \text{ Donc } T(x_1; x_2) = \frac{x_1 \times x_2 - 1}{x_1 \times x_2} > 0$$

d'où f que est strictement croissante sur $J = [1; +\infty[$

3) f est impaire et le symétrique de $I =]0;1]$ est l'intervalle $I' = [-1;0[$ et le symétrique de $J = [1;+\infty[$ est l'intervalle $J' =]-\infty;-1]$

Donc : f est strictement décroissante sur I Donc f est strictement décroissante sur I'
 f est strictement croissante sur J Donc f est strictement croissante sur J'

5) le tableau de variations de f sur D_f

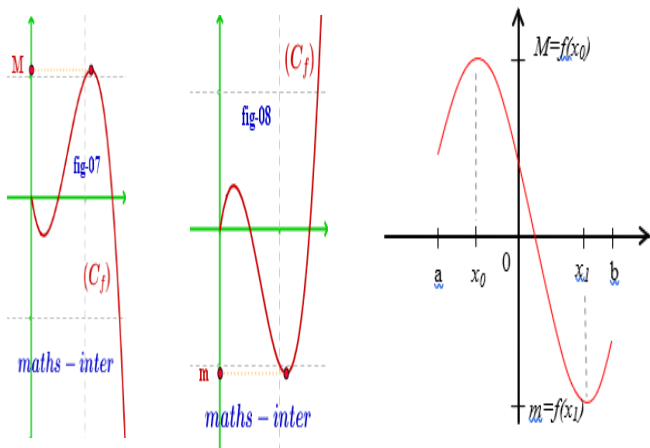
$$f(x) = 1 + \frac{1}{x} = 2$$

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
Variations de $f(x)$		-2		2	

$$f(-1) = -1 - \frac{1}{1} = -2$$

V) Les extremums d'une fonction numérique

1) Définitions :



Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle ouvert I et soit $a \in I$

➤ Dire que $f(a)$ est une valeur maximale de f sur I (ou $f(a)$ est un maximum de f sur I) ssi pour tout $x \in I$: $f(x) \leq f(a)$

➤ Dire que $f(a)$ est une valeur minimale de f sur I (ou $f(a)$ est un minimum de f sur I) ssi pour tout $x \in I$: $f(x) \geq f(a)$

2) Exemples

1° Soit f une fonction numérique tq : $f(x) = 5x^2 + 3$

$$D_f = \mathbb{R}$$

On a pour tout $x \in \mathbb{R}$ $x^2 \geq 0$ Donc $5x^2 \geq 0$ car $5 > 0$
 Par suite $5x^2 + 3 \geq 3$ et on a $f(0) = 3$

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$ $f(x) \geq f(0)$

d'où $f(0) = 3$ est un minimum de f sur \mathbb{R}

2° Soit g une fonction numérique tq : $g(x) = -4x^2 + 1$

$$D_g = \mathbb{R} \text{ et On a pour tout } x \in \mathbb{R} \quad x^2 \geq 0$$

$$\text{Donc } -4x^2 \leq 0 \text{ car } -4 < 0$$

$$\text{Par suite } -4x^2 + 1 \leq 1 \text{ et on a } g(0) = 1$$

$$\text{Donc pour tout } x \in \mathbb{R} \quad g(x) \leq g(0)$$

d'où $g(0) = 1$ est un maximum de g sur \mathbb{R}

3) Propriétés :

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle ouvert $I = [a;b]$ (a et b dans \mathbb{R}) et soit $c \in I$

➤ Si f est croissante sur $[a;c]$ et décroissante sur $[c;b]$ alors $f(c)$ est une valeur maximale de f sur I

➤ Si f est décroissante sur $[a;c]$ et croissante sur $[c;b]$ alors $f(c)$ est une valeur minimale de f sur I

x	a	c	b
$f(x)$		$f(c)$	

x	a	c	b
$f(x)$		$f(c)$	

Application : Soit f une fonction numérique tq :

$$f(x) = -4x^2 + 4x + 5$$

1°a) montrer que $f(x) = 6 - (2x - 1)^2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

b) montrer que $f(x) \leq 6$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

2° calculer : $f\left(\frac{1}{2}\right)$ et en déduire les extrémums de f sur \mathbb{R}

Reponses: 1°a) on a $D_f = \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} 6 - (2x - 1)^2 &= 6 - (4x^2 - 4x + 1) \\ &= 6 - 4x^2 + 4x - 1 = -4x^2 + 4x + 5 \end{aligned}$$

$$\text{Donc : } f(x) = 6 - (2x - 1)^2$$

b) Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $(2x - 1)^2 \geq 0$

$$\text{Par suite } -(2x - 1)^2 \leq 0 \text{ donc } 6 - (2x - 1)^2 \leq 6$$

$$\text{Donc pour tout } x \in \mathbb{R} \quad f(x) \leq 6$$

$$2^\circ \text{ on a } f\left(\frac{1}{2}\right) = 6 - \left(2 \times \frac{1}{2} - 1\right)^2 = 6 - (1 - 1)^2 = 6$$

on a pour tout $x \in \mathbb{R}$ $6 - (2x - 1)^2 \leq 6$ alors

$$f(x) \leq f\left(\frac{1}{2}\right) \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Donc } f\left(\frac{1}{2}\right) = 6 \text{ est un maximum de } f \text{ sur } \mathbb{R}$$

VI) Etude et représentation graphique des fonctions

$$x \xrightarrow{f} ax^2$$

Soit f une fonction numérique tq : $f(x) = ax^2$

avec $a \in \mathbb{R}^*$

1° on a f est une fonction polynôme donc $D_f = \mathbb{R}$

2° Pour tout réel x , si $x \in \mathbb{R}$, alors $-x \in \mathbb{R}$

$$f(-x) = a(-x)^2 = ax^2$$

$$f(-x) = f(x)$$

Donc f est une fonction paire,

Donc il suffit d'étudier la monotonie sur $I = [0; +\infty[$

3° soient $x_1 \in [0; +\infty[$ et $x_2 \in [0; +\infty[$ tq $x_1 \neq x_2$

$$T(x_1; x_2) = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{ax_1^2 - ax_2^2}{x_1 - x_2} = \frac{a(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)}{x_1 - x_2}$$

$$\text{Donc } T(x_1; x_2) = a(x_1 + x_2)$$

1^{er} cas : si $a > 0$

On a : $x_1 \in [0; +\infty[$ donc $x_1 \geq 0$ et $x_2 \in [0; +\infty[$ donc $x_2 \geq 0$

Donc $x_1 + x_2 \geq 0$ et puisque $x_1 \neq x_2$ Donc $x_1 + x_2 > 0$

Et on a : $a > 0$ donc sur $[0; +\infty[$ $T(x_1; x_2) > 0$

Et alors f est strictement croissante sur $[0; +\infty[$

et puisque f est une fonction paire alors f est strictement décroissante sur $] -\infty; 0]$

Tableau de variations de f si $a > 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$

2^{ier} cas : si $a < 0$

On a : $x_1 \in]-\infty; 0]$ donc $x_1 \leq 0$ et $x_2 \in]-\infty; 0]$ donc $x_2 \leq 0$

Donc $x_1 + x_2 \leq 0$ et puisque $x_1 \neq x_2$ Donc $x_1 + x_2 < 0$

Et on a : $a < 0$ donc sur $] -\infty; 0]$ $T(x_1; x_2) < 0$

Et alors f est strictement décroissante croissante sur $[0; +\infty[$

et puisque f est une fonction paire alors f est strictement croissante sur $] -\infty; 0]$

Tableau de variations de f si $a < 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$

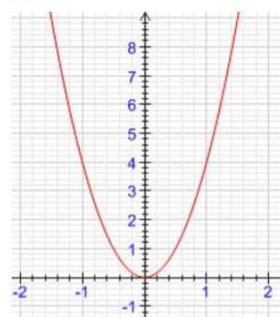
4° Représentation graphique

Définition : dans un Repère orthonormé $(0; \vec{i}; \vec{j})$ la courbe

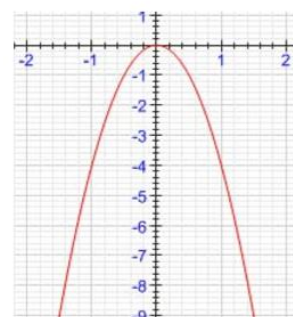
représentative de la fonction $x \xrightarrow{f} ax^2$ avec $a \in \mathbb{R}^*$ s'appelle une parabole dont les éléments caractéristiques

sont son sommet qui est l'origine du repère et son axe de symétrie qui est l'axe des ordonnées

Si $a > 0$



Si $a < 0$



Exemples

1° Soit f une fonction numérique tq : $f(x) = \frac{1}{2}x^2$

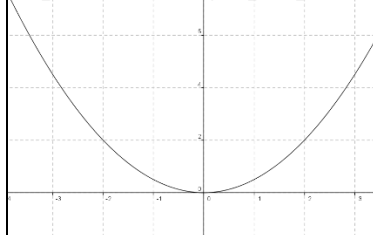
$D_f = \mathbb{R}$ et On a $a = \frac{1}{2} > 0$

Donc : Tableau de variations de f

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$

x	0	1	2	3
$f(x)$	0	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{9}{2}$

Représentation graphique :



2° Soit f une fonction numérique tq : $f(x) = -\frac{1}{2}x^2$

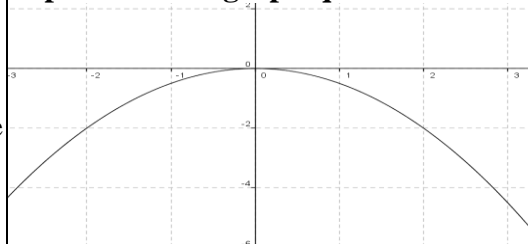
$D_f = \mathbb{R}$

On a $a = -\frac{1}{2} < 0$ Donc : Tableau de variations de f

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$

x	0	$\frac{1}{2}$	1	2
$f(x)$	0	$-\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{2}$	-2

Représentation graphique :



VII) Etude et représentation graphique des fonctions $x \xrightarrow{f} ax^2 + bx + c$

1) Formules du changement d'origine du repère

Soit $W(\alpha; \beta)$ un point dans le Repère $(0; \vec{i}; \vec{j})$ et M un point du plan et

$M(x; y)$ les coordonnées de M dans le repère $(0; \vec{i}; \vec{j})$

$M(X; Y)$ les coordonnées de M dans le repère $(W; \vec{i}; \vec{j})$

On a $\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$ et $\vec{WM} = X\vec{i} + Y\vec{j}$ et

$\vec{OW} = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j}$

$\vec{WM} = \vec{WO} + \vec{OM} = -\vec{OW} + \vec{OM}$ Donc :

$X\vec{i} + Y\vec{j} = -\alpha\vec{i} - \beta\vec{j} + x\vec{i} + y\vec{j} = (x - \alpha)\vec{i} + (y - \beta)\vec{j}$

Donc $\begin{cases} X = x - \alpha \\ Y = y - \beta \end{cases}$ sont des formules du changement de

l'origine de repère

2) Etude et graphe de $x \xrightarrow{f} ax^2 + bx + c$

Propriétés : 1° Soit f une fonction numérique tq :

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Avec $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$

1° On a f est une fonction polynôme donc $D_f = \mathbb{R}$

2° Pour tout réel $x \in \mathbb{R}$ on peut écrire sous la forme :

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$$

Avec $\Delta = b^2 - 4ac$ et s'appelle la forme canonique de

$$f(x) \text{ On pose } \alpha = -\frac{b}{2a} \text{ et } \beta = -\frac{\Delta}{4a}$$

$$\text{Alors } f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta \text{ c a d}$$

$$f(x) - \beta = a(x - \alpha)^2$$

3° On a $f(x) = y$ on pose $Y = y - \beta$ et $X = x - \alpha$

et soit $W(\alpha; \beta)$ Alors :

Dans le repère $(W; \vec{i}; \vec{j})$ la courbe (C_f) de f est

d'équation $Y = aX^2$ donc c'est une parabole de sommet W et son axe de symétrie est l'axe des ordonnées

Conséquences : 1° Dans le repère $(0; \vec{i}; \vec{j})$ la courbe

(C_f) c'est une parabole de sommet $W(\alpha; \beta)$ et d'axe de symétrie la droite $x = \alpha$

2° Les variations de f

Si $a > 0$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$	\searrow	β	\nearrow

Si $a < 0$

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$	\nearrow	β	\searrow

Exemples : 1° Soit f une fonction numérique tq :

$$f(x) = 2x^2 - 4x - 2$$

on a f est une fonction polynôme donc $D_f = \mathbb{R}$

On a $a = 2$ et $b = -4$ et $c = -2$ ($f(x) = ax^2 + bx + c$)

$$\text{Donc } \alpha = -\frac{b}{2a} = \frac{4}{2 \times 2} = 1 \text{ et } \beta = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{32}{4 \times 2} = -4$$

Pour tout réel $x \in \mathbb{R}$ on peut écrire sous la forme :

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} = 2(x - 1)^2 - 4$$

$$(f(1) = 2 - 4 - 2 = -4)$$

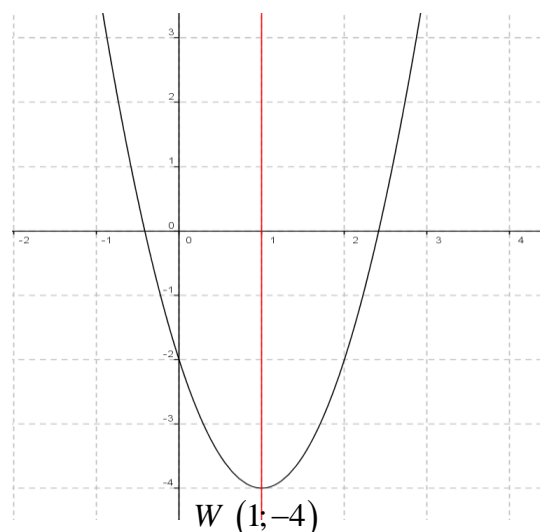
Soit $W(1; -4)$ Donc dans le repère $(0; \vec{i}; \vec{j})$ la courbe

(C_f) c'est une parabole de sommet $W(1; -4)$ et d'axe de symétrie la droite $x = 1$

Tableau de variations de f

On a $a = 2 > 0$ donc :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$	\searrow	-4	\nearrow



2° Soit g une fonction numérique tq :

$$g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 1$$

on a g est une fonction polynôme donc $D_g = \mathbb{R}$

On a $a = -\frac{1}{2}$ et $b = 2$ et $c = 1$ ($g(x) = ax^2 + bx + c$)

$$\text{Donc } \alpha = -\frac{b}{2a} = \frac{-2}{2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)} = 2 \text{ et } \beta = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{4+2}{-2} = 3$$

Donc pour tout réel $x \in \mathbb{R}$ on peut écrire sous la forme :

$$g(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} = -\frac{1}{2}(x - 2)^2 + 3$$

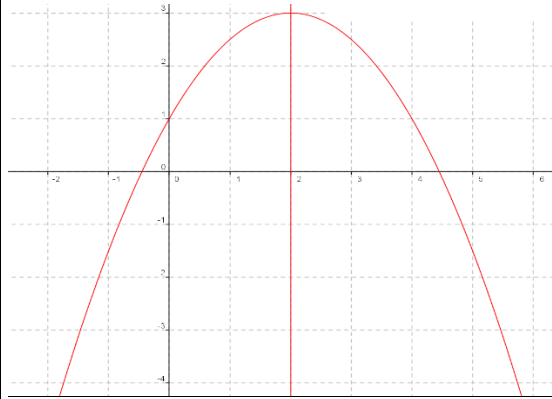
$$(g(2) = -\frac{1}{2}(2-2) + 3 = 3)$$

Soit $W(2;3)$ Donc dans le repère $(0; \vec{i}; \vec{j})$ la courbe (C_g) c'est une parabole de sommet $W(2;3)$ et d'axe de symétrie la droite $x = 2$

Tableau de variations de f

On a $a = -\frac{1}{2} < 0$ donc :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$		3	



VIII) Etude et représentation graphique des

fonctions : $x \xrightarrow{f} \frac{a}{x} (a \in \mathbb{R}^*)$

Soit f une fonction tq : $f(x) = \frac{a}{x}$

1) La parité de la fonction : On a $f(x) \in \mathbb{R}$ ssi $x \neq 0$

Donc $D_f = \mathbb{R}^*$

- Pour tout réel x , si $x \in \mathbb{R}^*$, alors $-x \in \mathbb{R}^*$

$$f(-x) = \frac{a}{-x} = -\frac{a}{x}$$

$$f(-x) = -f(x)$$

Donc f est une fonction impaire,

2) Les variations de la fonction : soient $x_1 \in \mathbb{R}^*$ et

$$x_2 \in \mathbb{R}^* \text{ tq } x_1 \neq x_2 \quad \text{on a : } T(x_1; x_2) = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$$

$$T(x_1; x_2) = \frac{\frac{a}{x_1} - \frac{a}{x_2}}{x_1 - x_2} = \frac{ax_2 - ax_1}{(x_1 - x_2)(x_1 x_2)} = \frac{-a(x_1 - x_2)}{x_1 x_2 (x_1 - x_2)} = \frac{-a}{x_1 x_2}$$

a) sur $I = \mathbb{R}^{++}$

Soit $x_1 \in \mathbb{R}^{++}$ et $x_2 \in \mathbb{R}^{++}$ $x_1 \neq x_2$

Donc $x_1 > 0$ et $x_2 > 0$ Donc $x_1 x_2 > 0$

$$\text{Donc } \frac{1}{x_1 x_2} > 0$$

1^{er} cas : si $a > 0$

$$\text{Donc : } \frac{-a}{x_1 x_2} < 0 \quad \text{donc sur } I = \mathbb{R}^{++} \quad T(x_1; x_2) < 0$$

Et alors f est strictement décroissante sur $I = \mathbb{R}^{++}$

Prof/ATMANI NAJIB

et puisque f est une fonction impaire alors f est strictement décroissante sur $J = \mathbb{R}^{*-}$

Tableau de variations de f si $a > 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$			

2^{ier} cas : si $a < 0$

$$\text{Donc : } \frac{-a}{x_1 x_2} > 0 \quad \text{donc sur } I = \mathbb{R}^{++} \quad T(x_1; x_2) > 0$$

Et alors f est strictement croissante sur $I = \mathbb{R}^{++}$

et puisque f est une fonction impaire alors f est strictement croissante sur $J = \mathbb{R}^{*-}$

Tableau de variations de f si $a < 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$			

3) Représentation graphique

Définition : dans un Repère orthonormé $(0; \vec{i}; \vec{j})$ la courbe

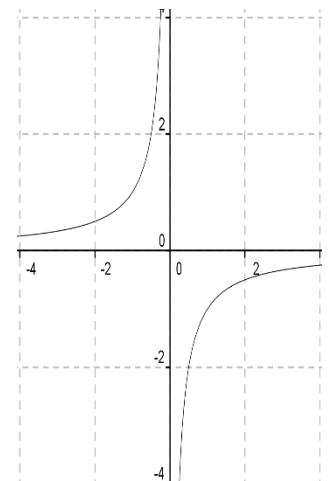
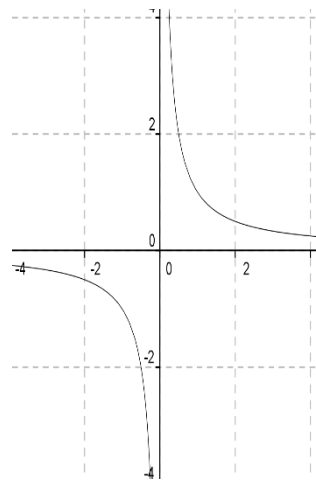
représentative de la fonction $x \xrightarrow{f} \frac{a}{x}$ avec $a \in \mathbb{R}^*$

s'appelle une hyperbole d'équation $y = \frac{a}{x}$ dont les éléments

caractéristiques sont : son centre de symétrie qui est l'origine du repère et Ses deux asymptotes qui sont l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées

si $a > 0$

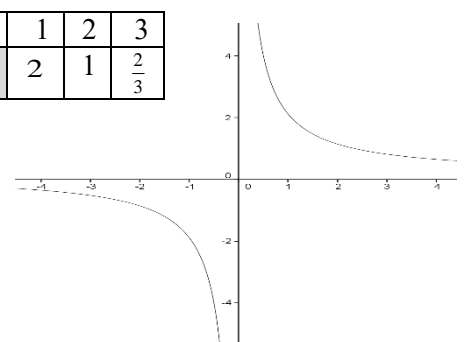
si $a < 0$



Exemples : Soit f une fonction numérique tq :

$$f(x) = \frac{2}{x}$$

x	0	1	2	3
$f(x)$		2	1	$\frac{2}{3}$



IX) Etude et représentation graphique des fonctions

homographique : $x \xrightarrow{f} \frac{ax+b}{cx+d}$ $a \neq 0$ et $c \neq 0$

1) Soit f une fonction tq : $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ on a $f(x) \in \mathbb{R}$

ssi $cx+d \neq 0$ ssi $x \neq -\frac{d}{c}$

Donc $D_f = \mathbb{R} - \left\{ -\frac{d}{c} \right\}$

2) Pour tout $x \in D_f$:

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a\left(x+\frac{b}{a}\right)}{c\left(x+\frac{d}{c}\right)} = \frac{a}{c} \frac{\left(x+\frac{d}{c}-\frac{d}{c}+\frac{b}{a}\right)}{x+\frac{d}{c}}$$

$$f(x) = \frac{a}{c} \left(1 + \frac{\frac{bc-ad}{c}}{x+\frac{d}{c}} \right) = \frac{a}{c} + \frac{\frac{bc-ad}{c^2}}{x+\frac{d}{c}}$$

On pose $\alpha = -\frac{d}{c}$ et $\beta = \frac{a}{c}$ et $\gamma = \frac{-\det f}{c^2}$ avec

$$\det f = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

1) Résumé et propriété : Soit f une fonction

homographique tq : $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$

$a \neq 0$ et $c \neq 0$ et $ad - bc \neq 0$

• Pour $x \in \mathbb{R} - \left\{ -\frac{d}{c} \right\}$ on a $f(x) = \beta + \frac{\gamma}{x-\alpha}$ dite

forme réduite de $f(x)$

Avec $\alpha = -\frac{d}{c}$ et $\beta = \frac{a}{c}$ et $\gamma = \frac{-\det f}{c^2}$ avec

$$\det f = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

• Soit $W(\alpha; \beta)$ Donc dans le repère $(W; \vec{i}; \vec{j})$ l'équation

de (C_f) est $Y = \frac{\gamma}{X}$ avec $Y = y - \beta$ et $X = x - \alpha$ donc

(C_f) est une hyperbole de centre W et d'asymptotes l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées

• dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (C_f) est l'hyperbole de centre

W et d'asymptotes les droites d'équations respectives $x = \alpha$ et $y = \beta$

Conséquences : 1^{er} cas : si $\det f = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc > 0$

Tableau de variations de f :

x	$-\infty$	$-\frac{d}{c}$	$+\infty$
$f(x)$	\nearrow		\nearrow

2^{ier} cas : si $\det f = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc < 0$

Tableau de variations de f :

x	$-\infty$	$-\frac{d}{c}$	$+\infty$
$f(x)$	\searrow		\searrow

Exemples 1: Soit f une fonction numérique tq :

$$f(x) = \frac{-2x+1}{2x-4}$$

on a $f(x) \in \mathbb{R}$ ssi $2x-4 \neq 0$ ssi $x \neq 2$

Donc $D_f = \mathbb{R} - \{2\}$

Si $x \in \mathbb{R} - \{2\}$ on a

$$\begin{array}{r|l} -2x+1 & 2x-4 \\ -2x+4 & -1 \\ \hline -3 & \end{array}$$

$$f(x) = \frac{-(2x-4)-3}{2x-4} = \frac{-(2x-4)}{2x-4} + \frac{-3}{2x-4} = -1 + \frac{-3/2}{x-2}$$



$$f(x) + 1 = \frac{-3/2}{x-2}$$

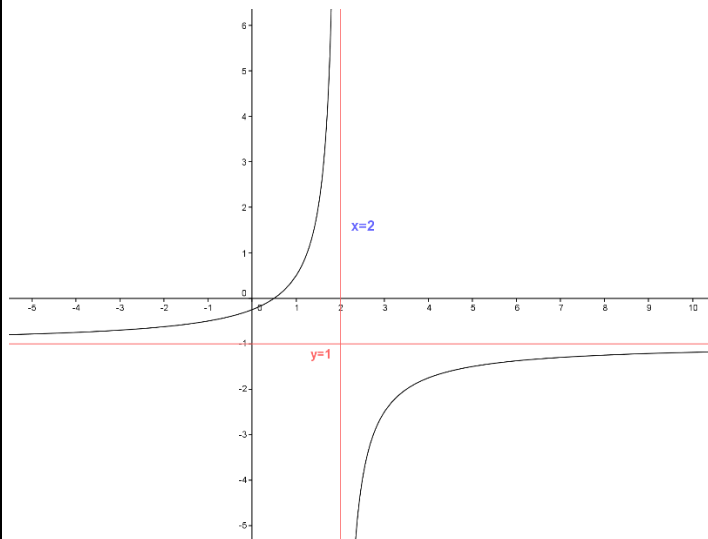
On pose $\alpha = 2$ et $\beta = -1$ et soit $W(2; -1)$

• Donc dans le repère $(W; \vec{i}; \vec{j})$ l'équation de (C_f) est

$Y = \frac{-3/2}{X}$ avec $Y = y + 1$ et $X = x - 2$ donc (C_f) est une hyperbole de centre W et d'asymptotes les droites d'équations respectives $x = 2$ et $y = -1$

• Tableau de variations $X \longrightarrow \frac{-3/2}{X}$ $\left(-3/2 < 0 \right)$

x	$-\infty$		0		$+\infty$	
$f(x)$						
-2	1-	0	1	2	3	4
1	$\frac{1}{2}$	-1		5	$\frac{7}{2}$	3



Exemples 2: Soit f une fonction numérique tq :

$$f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$$

on a $f(x) \in \mathbb{R}$ ssi $x-1 \neq 0$ ssi $x \neq 1$

Donc $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$

Si $x \in \mathbb{R} - \{1\}$ on a :

$$\begin{array}{r|l} 2x+1 & x-1 \\ -2x+2 & 2 \\ \hline 3 & \end{array}$$

$$f(x) = \frac{2x+1}{x-1} = \frac{2(x-1)+3}{x-1} = \frac{2(x-1)}{x-1} + \frac{3}{x-1} = 2 + \frac{3}{x-1}$$

$$f(x) - 2 = \frac{3}{x-1} \text{ ssi } y - 2 = \frac{3}{x-1}$$

On pose $\begin{cases} x-1=X \\ y-2=Y \end{cases}$ donc $\begin{cases} x=X+1 \\ y=Y+2 \end{cases}$

$$y = \frac{2x+1}{x-1} \text{ ssi } Y = \frac{3}{X}$$

• Tableau de variations de $X \longrightarrow \frac{3}{X}$ ($3 > 0$)

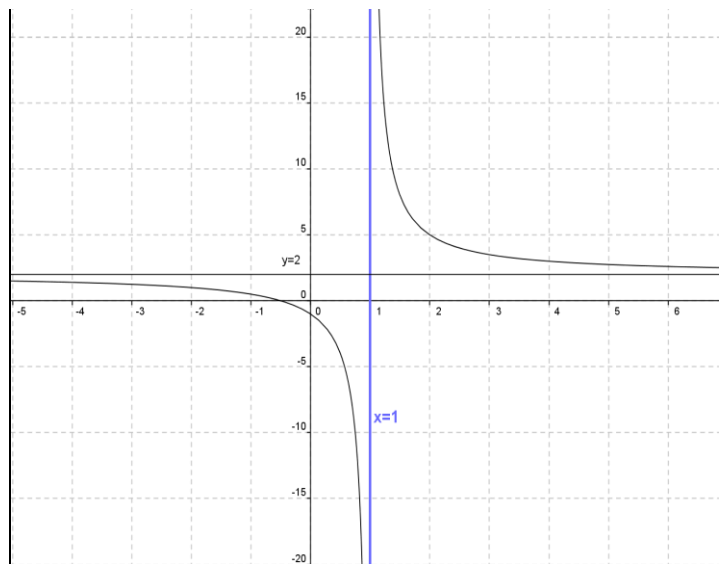
x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$			

On a $\begin{cases} X=0 \\ Y=0 \end{cases}$ donc $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$

• Donc le tableau de variations de $x \longrightarrow \frac{2x+1}{x-1}$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$			

• Représentation graphique



Exemples 3: Soit g une fonction numérique tq :

$$g(x) = \frac{-x}{x-2}$$

on a $g(x) \in \mathbb{R}$ ssi $x-2 \neq 0$ ssi $x \neq 2$

Donc $D_g = \mathbb{R} - \{2\}$

Si $x \in \mathbb{R} - \{2\}$ on a :

$$\begin{array}{r|l} -x & x-2 \\ x-2 & -1 \\ \hline -2 & \end{array}$$

$$g(x) = \frac{-x}{x-2} = \frac{-1(x-2)-2}{x-2} = \frac{-1(x-2)}{x-2} + \frac{-2}{x-2} = -1 + \frac{-2}{x-2}$$

$$g(x) + 1 = \frac{-2}{x-2} \text{ ssi } y + 1 = \frac{-2}{x-2}$$

On pose $\begin{cases} x-2=X \\ y+1=Y \end{cases}$ donc $\begin{cases} x=X+2 \\ y=Y-1 \end{cases}$

$$y = \frac{-x}{x-2} \text{ ssi } Y = \frac{-2}{X}$$

• Tableau de variations de $X \longrightarrow \frac{-2}{X}$ ($-2 < 0$)

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$			

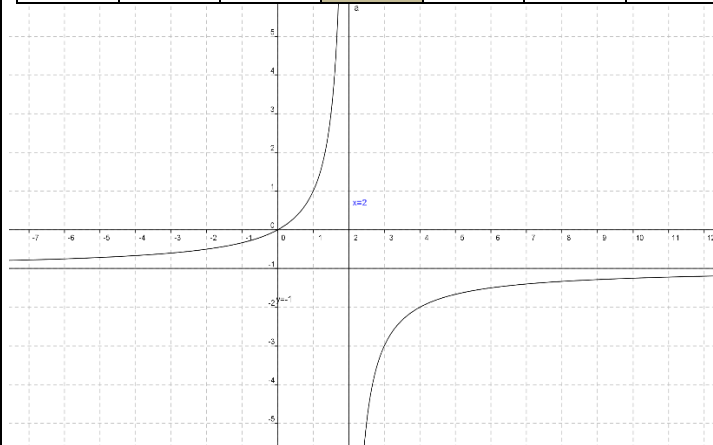
On a $\begin{cases} X=0 \\ Y=0 \end{cases}$ donc $\begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases}$

• Donc le tableau de variations de $x \longrightarrow \frac{-x}{x-2}$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$			

• Représentation graphique

-1	0	1	2	3	4	5
-1/3	0	1		-3	-2	-5/3



X) Applications : Position relative de courbes, interprétation graphique d'équations et d'inéquations

Le but de ce chapitre est de pouvoir déterminer par le calcul, entre 2 courbes, quelle courbe se situe au-dessus de l'autre et sur quel(s) intervalle(s).

1) Position relative de deux courbes et intersection

Soient (C_f) la courbe représentative de f et (C_g) la courbe représentative de g .

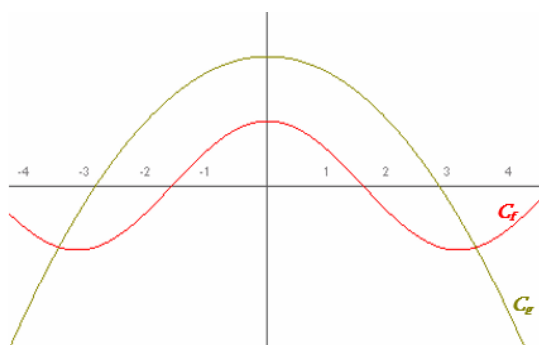
On peut établir les relations suivantes :

$$M(x; y) \in (C_f) \text{ ssi } y = f(x)$$

$$M(x; y) \in (C_g) \text{ ssi } y = g(x)$$

Aux points d'intersection de (C_f) et de (C_g) , on a

$$M \in (C_f) \text{ et } M \in (C_g) \text{ donc : soit } f(x) = g(x)$$



A retenir :

- les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$ sont les abscisses des points d'intersection de (C_f) et de (C_g)
- les solutions de l'inéquation $f(x) \geq g(x)$ sont les abscisses des points de (C_f) situées au-dessus de (C_g) .
- les solutions de l'inéquation $f(x) \leq g(x)$ sont les abscisses des points de (C_f) situées au-dessous de (C_g)

Un cas particulier : équation $f(x) = m$ et inéquation

$$f(x) \geq m$$



- Les solutions de l'équation $f(x) = m$ sont les abscisses des points d'intersection de (C_f) avec la droite d'équation $y = m$
- Les solutions de l'inéquation $f(x) \geq m$ sont les abscisses des points de (C_f) situés au-dessus de la droite d'équation $y = m$.

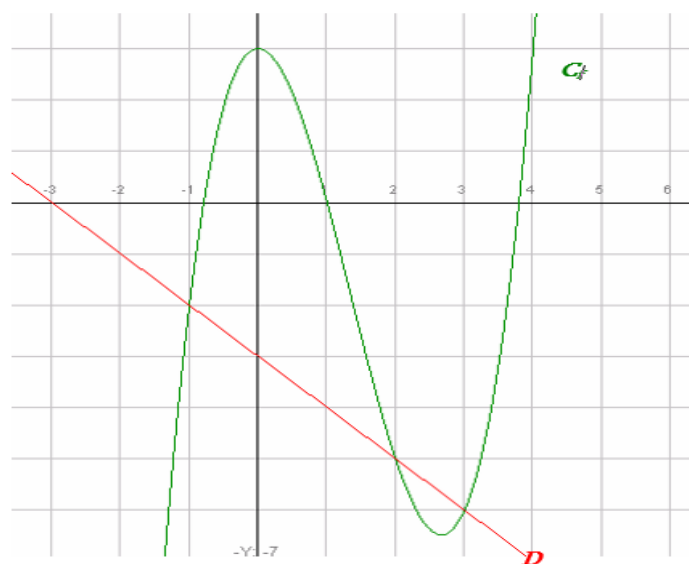
2) Quelques exercices d'application

Exercice 1 : Soit la courbe (C_f) représentative de f telle que $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3$ et la droite (D) d'équation $y = -x - 3$

1- Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 3$

2- puis l'inéquation $f(x) < 3$.

3- Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 0$ et l'inéquation $f(x) \geq 0$



4- Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = -x - 3$ puis l'inéquation $f(x) \leq -x - 3$

Réponses : 1) $f(x) = 3$ La solution est l'ensemble des antécédents de 3 : $S = \{0; 4\}$

2- $f(x) = 0$ La solution est l'ensemble des antécédents de

$0 : S = \{a; 1; b\}$ Avec $-1 < a < -0.5$ et $3.5 < b < 4$

$f(x) \geq 0 \quad S = [a; 1] \cup [b; +\infty[$

3- $f(x) = -x - 3$ La solution l'ensemble des abscisses des

points d'intersection de (C_f) et de D : $y = -x - 3$ donc

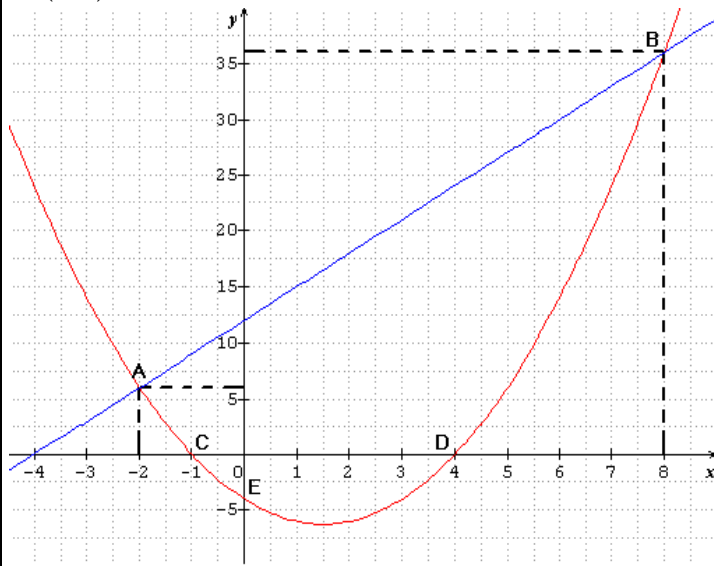
$S = \{-1; 2; 3\}$

$f(x) \leq -x - 3 \quad S =]-\infty; -1] \cup [2; 3]$

Exercice 2 : Soient f et g les deux fonctions définies sur \mathbb{R} par : $f(x) = x^2 - 3x - 4$ et $g(x) = 3x + 12$

- 1) Tracer Les courbes représentatives (C_f) et (C_g)
- 2) Résoudre graphiquement et algébriquement l'équation $f(x) = g(x)$
- 3) Résoudre graphiquement et algébriquement l'inéquation $f(x) \geq g(x)$
- 4) Trouver les points d'intersection de la courbe (C_f) avec les axes du repère

Réponses : 1) Les courbes représentatives (C_f) (en rouge) et (C_g) (en bleu) sont données dans le repère ci-dessous



2) a) résolution graphique de l'équation $f(x) = g(x)$

Il suffit de chercher les abscisses des points d'intersection des courbes (C_f) et (C_g)

On a donc $x = -2$ et $x = 8$ donc $S = \{-2; 8\}$

b) résolution algébrique de l'équation $f(x) = g(x)$

$f(x) = g(x)$ ssi $x^2 - 3x - 4 = 3x + 12$ ssi

$x^2 - 6x - 16 = 0$

$a = 1$ et $b = -6$ et $c = -16$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4 \times 1 \times (-16) = 36 + 64 = 100 = (10)^2 > 0$

$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$

$$x_1 = \frac{-(-6) + \sqrt{100}}{2 \times 1} = \frac{6 + 10}{2} = \frac{16}{2} = 8 \quad \text{et}$$

$$x_2 = \frac{-(-6) - \sqrt{100}}{2 \times 1} = \frac{6 - 10}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$

donc $S = \{-2; 8\}$

3) a) résolution graphique de l'inéquation $f(x) > g(x)$

La courbe (C_f) est au-dessus de (C_g) si

$x \in]-\infty; -2[\cup]8; +\infty[$

Donc $S =]-\infty; -2[\cup]8; +\infty[$

b) résolution algébrique de l'inéquation $f(x) > g(x)$

$f(x) > g(x)$ ssi $x^2 - 3x - 4 > 3x + 12$ ssi

$x^2 - 6x - 16 > 0$

Les racines sont : $x_1 = 8$ et $x_2 = -2$

x	$-\infty$	-2	8	$+\infty$	
$x^2-6x-16$	+	0	-	0	+

Donc $S =]-\infty; -2[\cup]8; +\infty[$

4) a) Intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses

Les points d'intersection C et D de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses ont leurs ordonnées nulles, et leurs abscisses sont les solutions de l'équation $f(x) = 0$

$f(x) = 0$ ssi $x^2 - 3x - 4 = 0$

$a = 1$ et $b = -3$ et $c = -4$

$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 1 \times (-4) = 9 + 16 = 25 = (5)^2 > 0$

$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$

$$x_1 = \frac{-(-3) + \sqrt{25}}{2 \times 1} = \frac{3 + 5}{2} = \frac{8}{2} = 4 \quad \text{et}$$

$$x_2 = \frac{-(-3) - \sqrt{25}}{2 \times 1} = \frac{3 - 5}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

donc les points d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses sont :

$C(-1; 0)$ et $D(4; 0)$

b) Intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des ordonnées

le point d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des ordonnées a une abscisse nulle

et on a $f(0) = 0^2 - 3 \times 0 - 4 = -4$

donc le point d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des ordonnées est : $E(-4; 0)$

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices

Que l'on devient un mathématicien

