

Généralités sur les fonctions

Vocabulaire

Soit D un ensemble de \mathbb{R}

Définir une fonction f sur D , c'est associer à chaque réel x de D un unique réel noté $f(x)$.

On écrit : $f : x \mapsto f(x)$ (on lit : « f est la fonction qui à x associe f de x »)

D est l'ensemble de définition de la fonction f .

x est la variable.

$f(x)$ est l'image de x par f .

Si $y = f(x)$, on dit que x est un antécédent de y par f .

Représentation graphique

Un repère du plan étant choisi, on appelle courbe représentative d'une fonction f , notée C_f , l'ensemble des points M de coordonnées $(x ; f(x))$ où $x \in D$.

Dire « $M(x ; y)$ appartient à la courbe représentative de f » équivaut à dire « x appartient à D et $y = f(x)$ ».

On dit que la courbe a pour équation $y = f(x)$.

Sens de variations

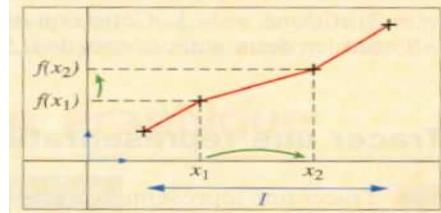
I est un intervalle contenu dans l'ensemble de définition D de la fonction f .

Dire que f est strictement croissante sur I signifie que

pour tous réels x_1 et x_2 de I :

Si $x_1 < x_2$ alors $f(x_1) < f(x_2)$.

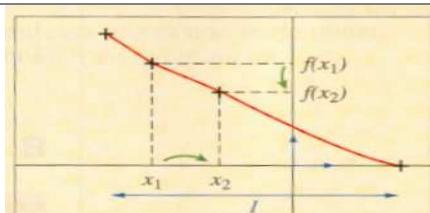
(Une fonction croissante conserve l'ordre.)



Dire que f est strictement décroissante sur I signifie que pour tous réels x_1 et x_2 de I :

Si $x_1 < x_2$ alors $f(x_1) > f(x_2)$.

(Une fonction décroissante change l'ordre.)



Pour une fonction croissante ou décroissante, on remplace les inégalités strictes de $f(x_1)$ et $f(x_2)$.par des inégalités larges.

Dire que f est constante sur I signifie que pour tous réels x_1 et x_2 de I , on a $f(x_1) = f(x_2)$.

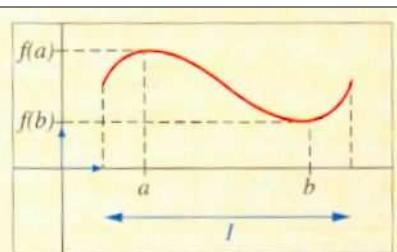
Une fonction monotone sur I est une fonction soit croissante sur I , soit décroissante sur I .

Maximum - Minimum

M est le maximum de f sur I signifie que M est la plus grande valeur prise par f sur I :

Pour tout réel x de I

$f(x) \leq M = f(a)$.



m est le minimum de f sur I signifie que m est la plus petite valeur prise par f sur I :

Pour tout réel x de I

$f(x) \geq m = f(b)$.

Parité

Fonction paire

On dit que f est paire si pour tout x de D , on a : $(-x) \in D$ et $f(-x) = f(x)$.

Soit C la courbe représentative d'une fonction f .

C est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Fonction impaire

g est impaire si pour tout x de D on a : $-x \in D$ et $g(-x) = -g(x)$.

Soit C la courbe représentative d'une fonction g .

C est symétrique par rapport à O .

Résolution d'une équation :

<p>Résolution $f(x) = k$.</p> <p>On trace la droite d'équation $y = k$ et on lit les abscisses des points d'intersection avec la courbe.</p>	<p>Résolution de $f(x) = g(x)$.</p> <p>On trace les deux courbes C_f et C_g et on lit les abscisses des points d'intersection.</p>
$S = \{x_1, x_2\}$	$S = \{x_1, x_2, x_3\}$

Résolution d'une inéquation

<p>Résolution $f(x) \geq 0$.</p> <p>On lit les intervalles sur lesquels la courbe est au-dessus des axes des abscisses.</p>	<p>Résolution $f(x) \geq k$.</p> <p>On trace la droite d'équation $y = k$ et on lit les intervalles sur lesquels la courbe est au-dessus de cette droite.</p>	<p>Résolution de $f(x) \geq g(x)$.</p> <p>On trace les deux courbes C_f et C_g et on lit les intervalles sur lesquels C_f est au-dessus de C_g.</p>
$S = [x_1, x_2] \cup [x_3, +\infty[$	$S = [x_1, x_2]$	$S =]-\infty, x_1] \cup [x_2, x_3]$

Soit (O, \vec{i}, \vec{j}) un repère orthogonal.

Parabole

*) La courbe représentative de la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = ax^2, a \neq 0$ est une parabole de sommet O et d'axe de symétrie la droite d'équation $x = 0$.

*) La courbe représentative de la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = a(x - \beta)^2, a \neq 0$ est une parabole de sommet $S(\alpha, 0)$ et d'axe de symétrie la droite d'équation $x = \alpha$.

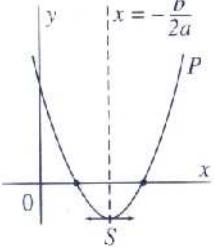
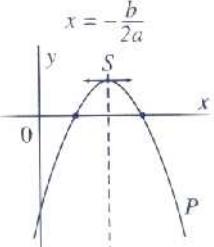
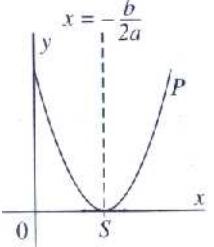
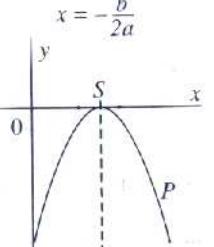
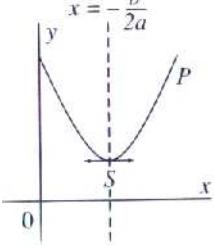
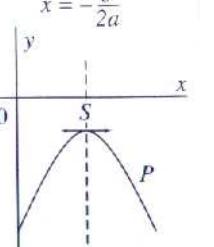
*) La courbe représentative de la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^2 + \beta, a \neq 0$ est une parabole de sommet $S(0, \beta)$ et d'axe de symétrie la droite d'équation $x = 0$.

*) La fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$,

$f(x)$ peut s'écrire sous la forme $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta, a \neq 0$

Donc la courbe représentative de f est une parabole de sommet $S(\alpha, \beta)$ et d'axe de symétrie la droite d'équation $x = \alpha$.

Soit le trinôme $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$.

	$a > 0$	$a < 0$
$\Delta < 0$		
$\Delta = 0$		
$\Delta > 0$		

Hyperbole

*) La courbe représentative de la fonction $f(x) = \frac{a}{x}, a \neq 0$ est une hyperbole de centre O et d'asymptotes les droites d'équations $x = 0$ et $y = 0$.

*) La courbe représentative de la fonction $f(x) = \frac{1}{x} + \beta$ est une hyperbole de centre $I(0, \beta)$ et d'asymptotes les droites d'équations $x = 0$ et $y = \beta$.

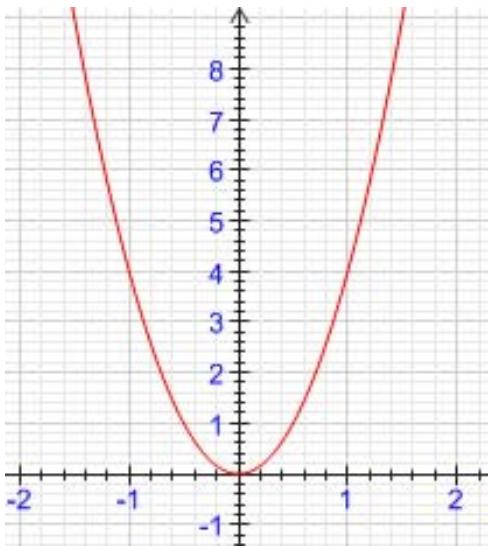
*) La courbe représentative de la fonction $f(x) = \frac{a}{x + \alpha}, a \neq 0$ est une hyperbole de centre $I(-\alpha, 0)$ et d'asymptotes les droites d'équations $x = -\alpha$ et $y = 0$.

* La courbe représentative de la fonction $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$, $c \neq 0$ est une hyperbole de centre $I\left(-\frac{d}{c}, \frac{a}{c}\right)$ et d'asymptotes les droites d'équations $x = -\frac{d}{c}$ et $y = \frac{a}{c}$.

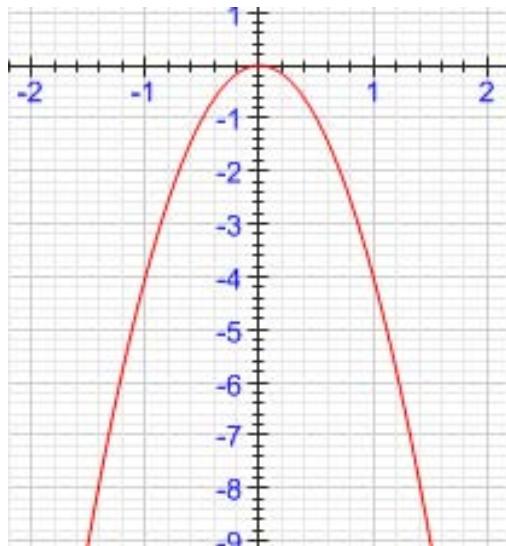
Exemples (tous les cas possibles)

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} ; a \neq 0 \\ x \mapsto ax^2$$

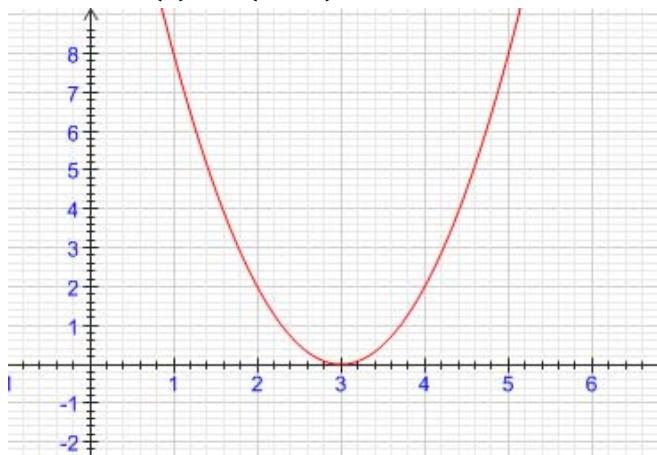
Si $a > 0$ (exemple $a = 4$)



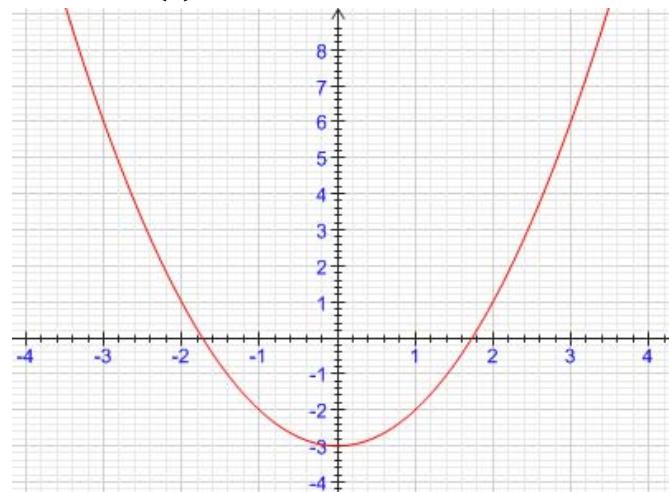
Si $a < 0$ (exemple $a = -4$)



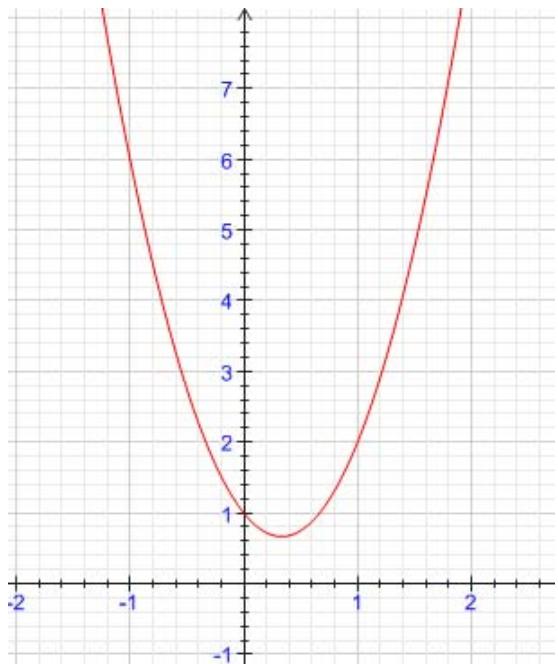
$$h(x) = 2(x - 3)^2$$



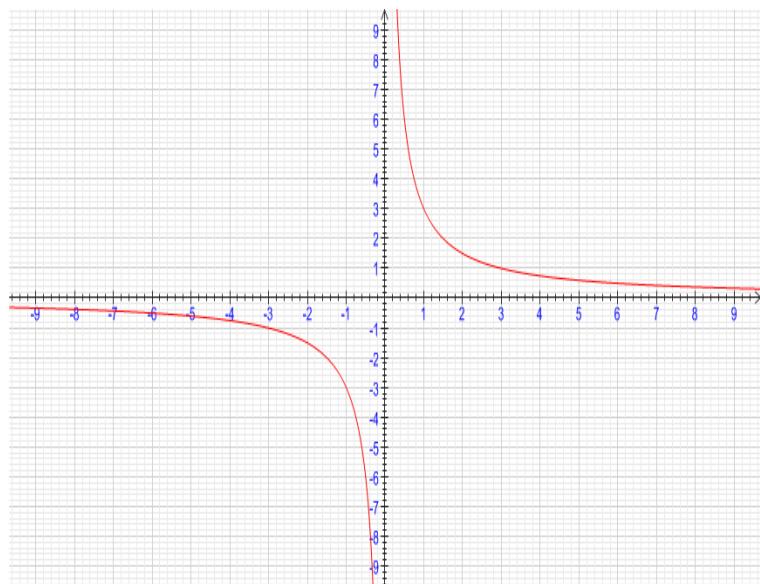
$$k(x) = x^2 - 3$$



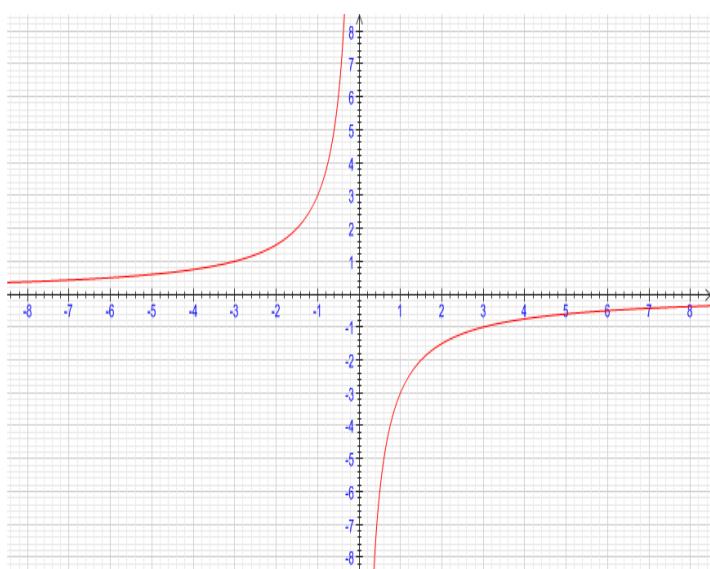
$$p(x) = 3x^2 - 2x + 1$$



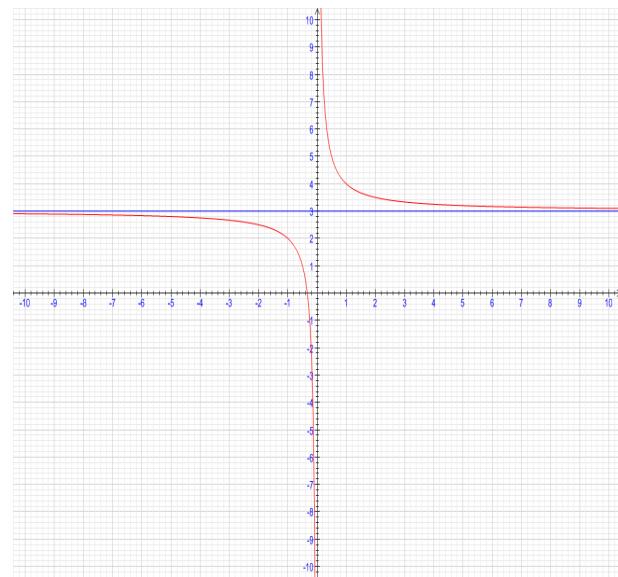
$$(exemple g(x) = \frac{3}{x})$$



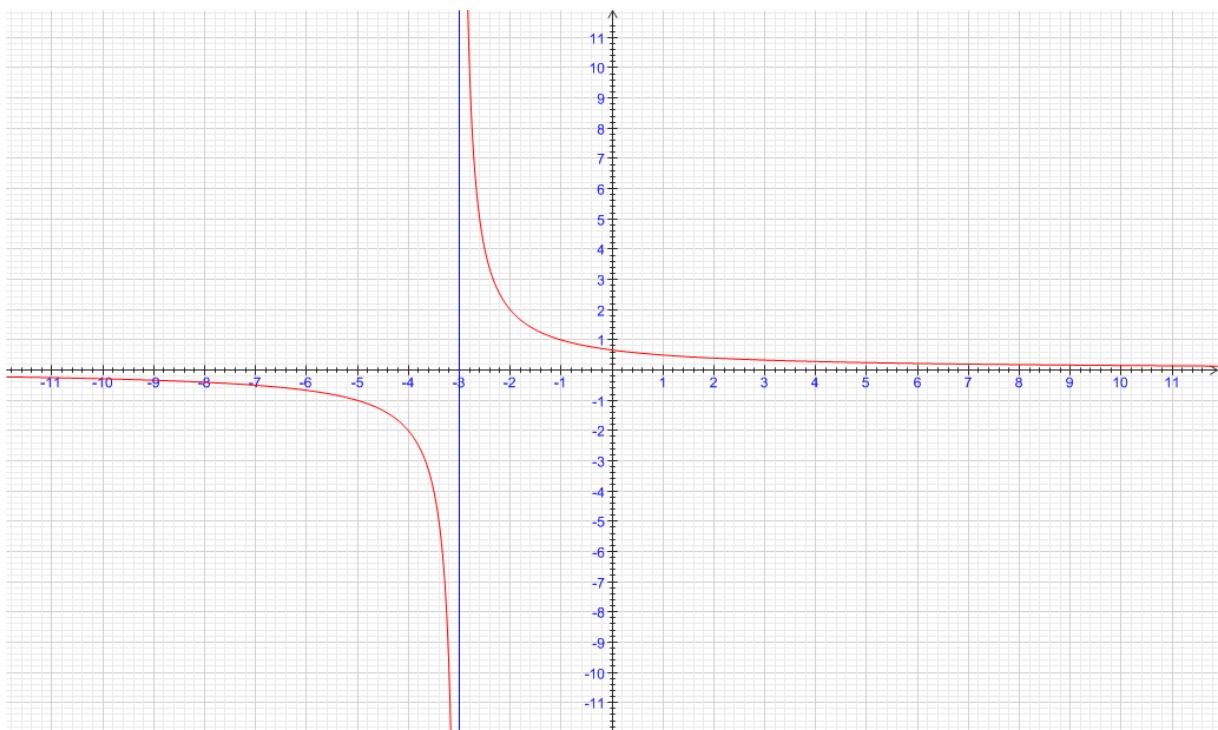
$$(exemple g(x) = \frac{-3}{x})$$



$$(exemple h(x) = \frac{1}{x} + 3)$$



$$(exemple \ k(x) = \frac{2}{x+3})$$



$$(exemple \ p(x) = \frac{2x+5}{4x-3})$$

