

## Corrigés des exercices de trigonométrie

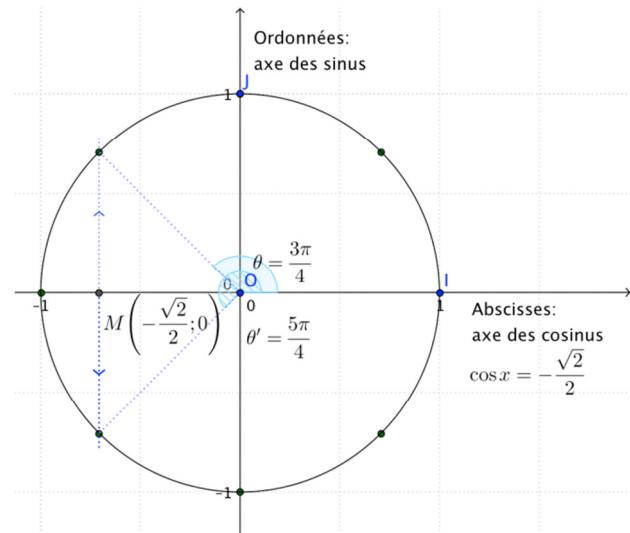
### I. Résoudre algébriquement des équations, des inéquations

Pour les exercices suivants, on utilisera le cercle trigonométrique

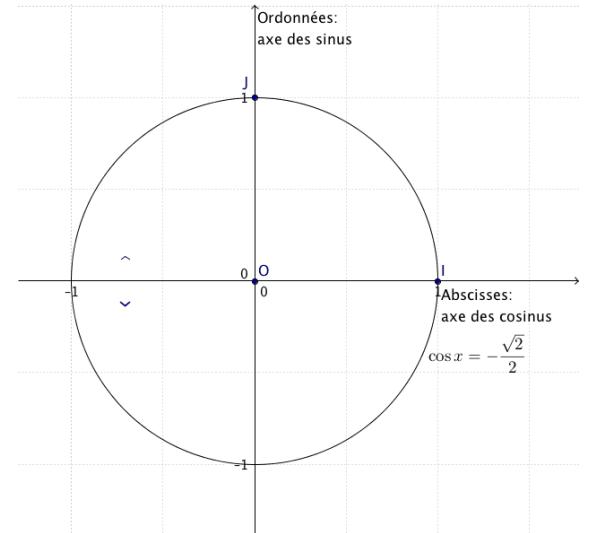
#### Exercice 1

Résoudre dans l'intervalle  $[0 ; 2\pi]$  l'équation  $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

**Correction :**



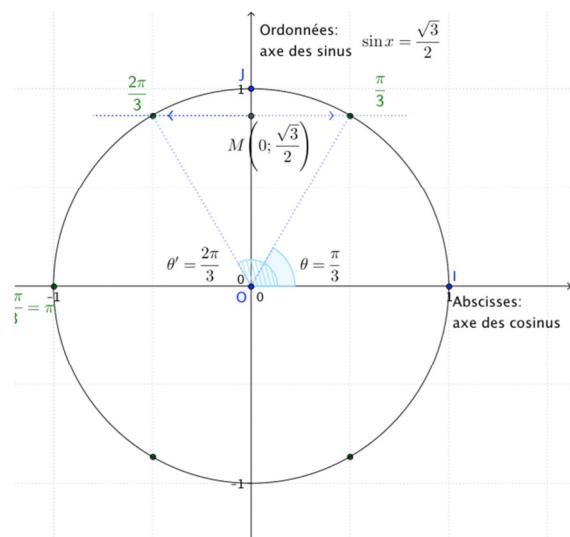
Les solutions sont  $S = \left\{ \frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4} \right\}$



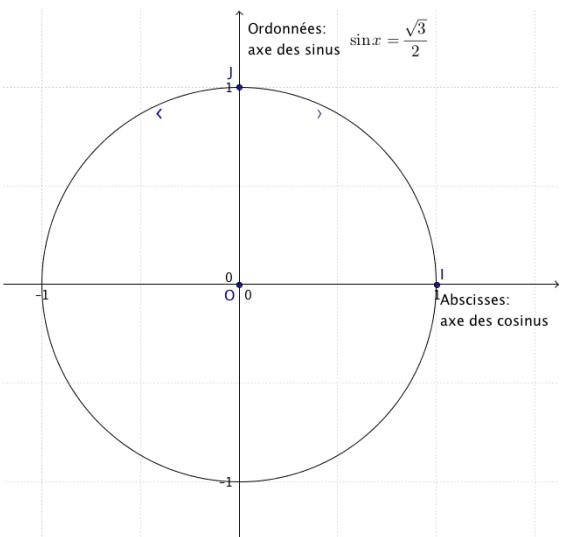
#### Exercice 2

Résoudre dans l'intervalle  $[0 ; 2\pi]$  l'équation  $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

**Correction :**



Les solutions sont  $S = \left\{ \frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3} \right\}$

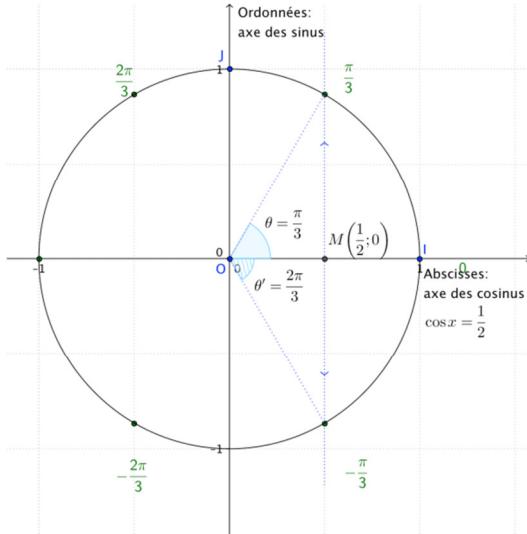


€

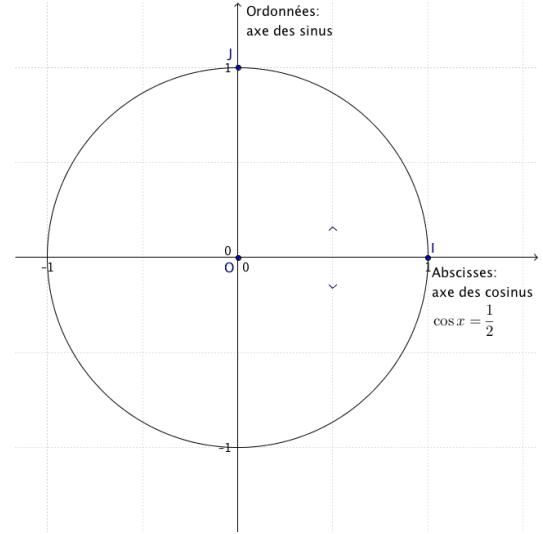
### Exercice 3

Résoudre dans l'intervalle  $[-\pi; \pi]$  l'équation  $\cos x = \frac{1}{2}$ .

Correction :



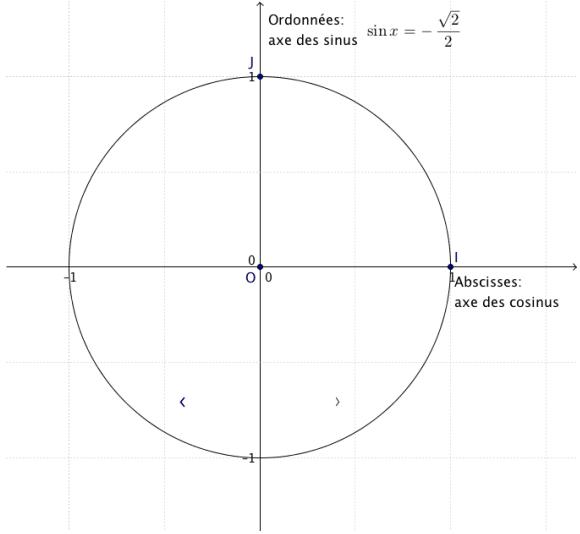
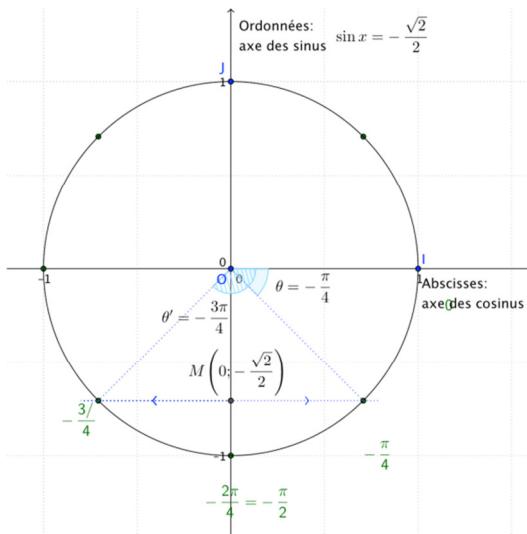
Les solutions sont  $S = \left\{-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right\}$



### Exercice 4

Résoudre dans l'intervalle  $[-\pi; \pi]$  l'équation  $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

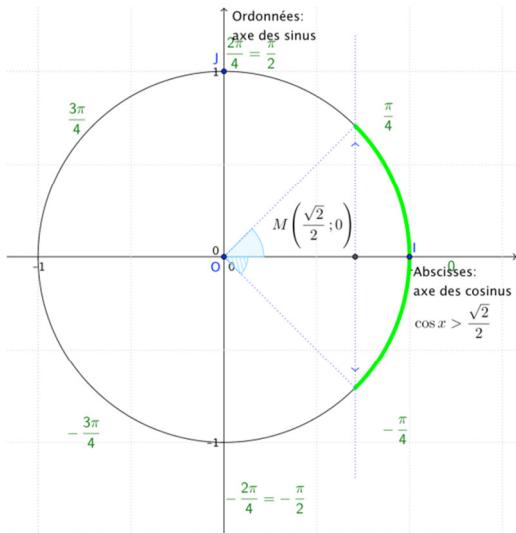
Correction :



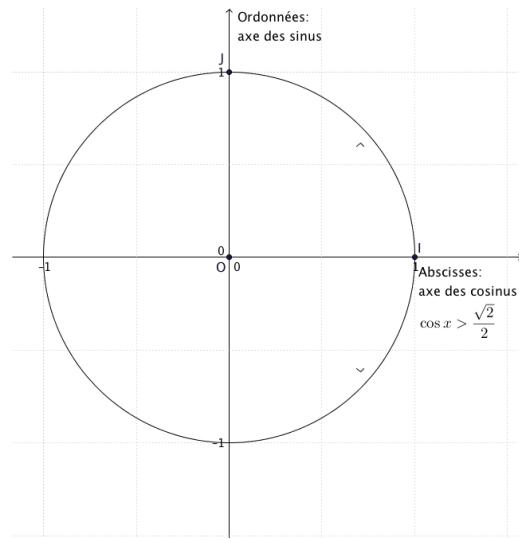
### Exercice 5

Résoudre dans l'intervalle  $[-\pi; \pi]$  l'inéquation  $\cos x > \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

**Correction :**



Les solutions sont  $\left] -\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4} \right[$

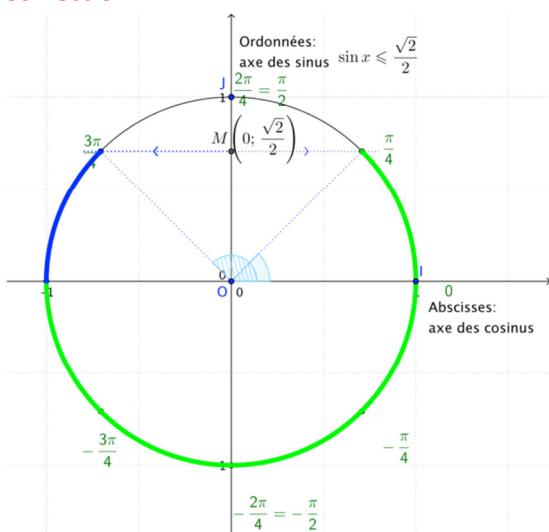


€

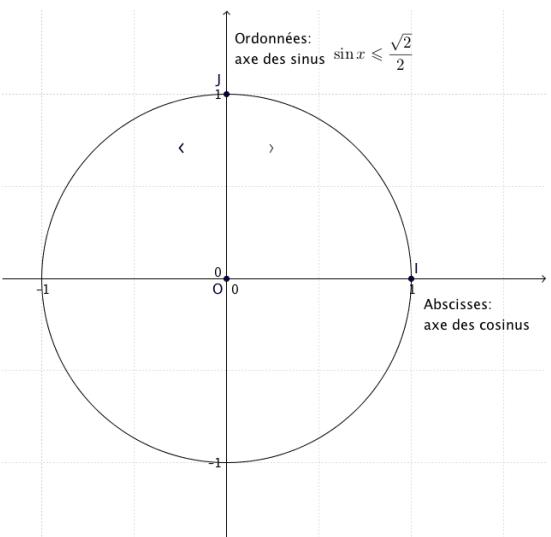
**Exercice 6**

Résoudre dans l'intervalle  $[-\pi; \pi]$  l'inéquation  $\sin x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

**Correction :**



Les solutions sont  $\left] -\pi; \frac{\pi}{4} \right] \cup \left[ \frac{3\pi}{4}; \pi \right]$

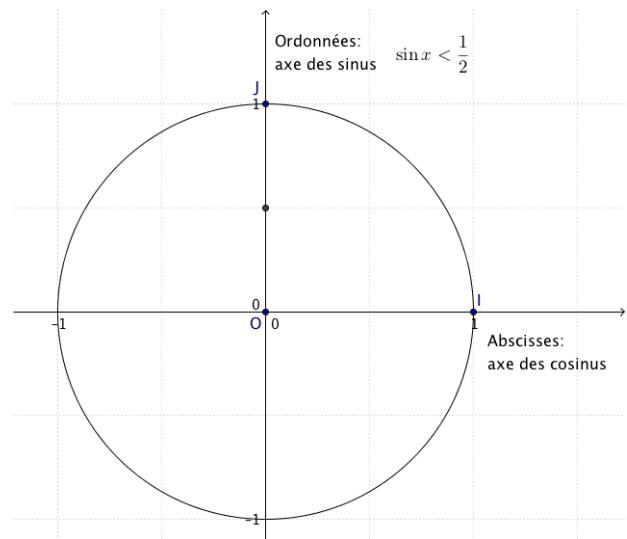
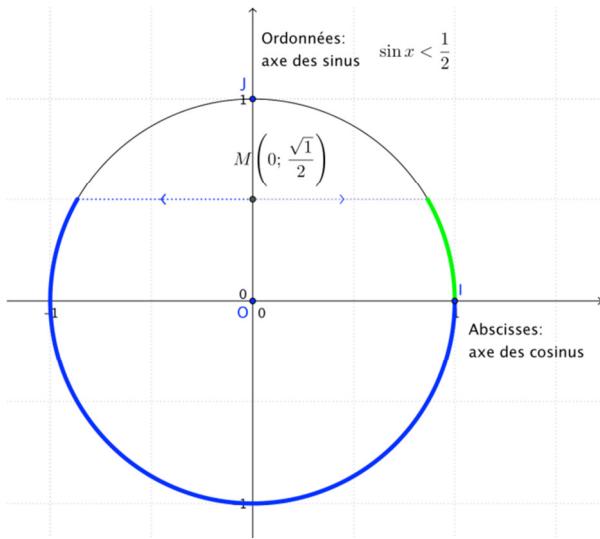


€

**Exercice 7**

Résoudre dans l'intervalle  $[0 ; 2\pi]$  l'inéquation  $\sin x < \frac{1}{2}$ .

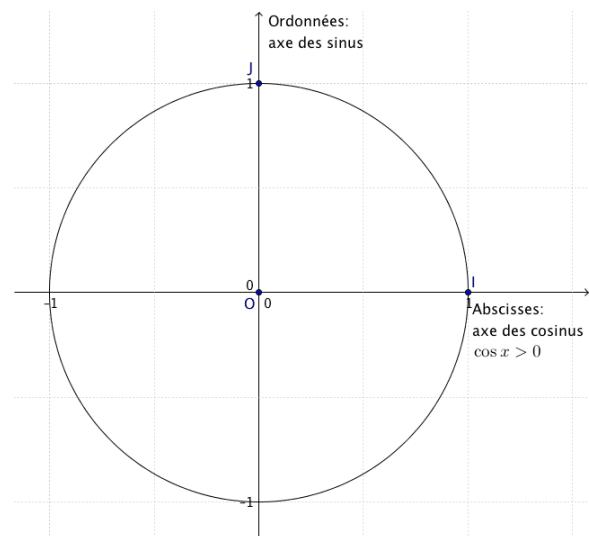
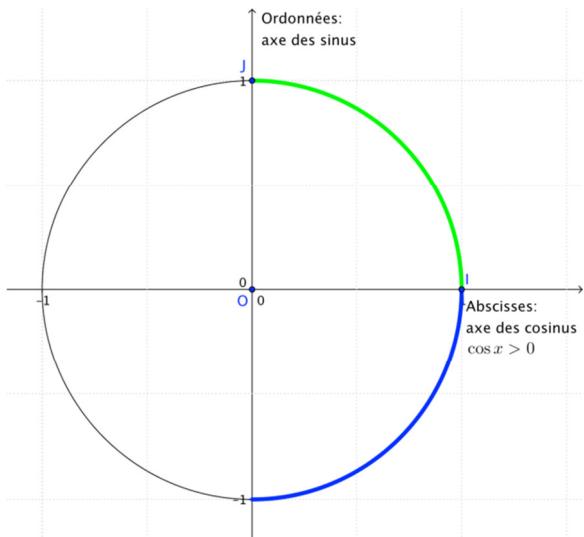
Correction :



## Exercice 8

Résoudre dans l'intervalle  $[0 ; 2\pi]$  l'inéquation  $\cos x > 0$ .

Correction :



L'ensemble des solutions est  $\left[ 0; \frac{\pi}{2} \right] \cup \left[ \frac{3\pi}{2}; 2\pi \right]$

€

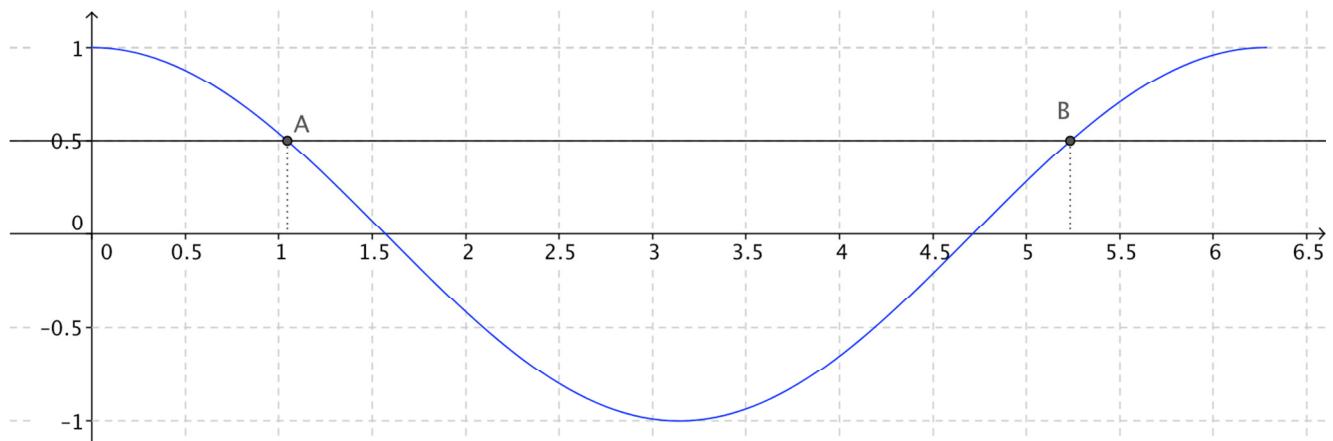
## II. Résoudre graphiquement des équations

### Exercice 9

On a tracé sur l'intervalle  $[0 ; 2\pi]$  la représentation graphique de la fonction cosinus.

Résoudre graphiquement dans l'intervalle  $[0 ; 2\pi]$  l'équation  $\cos x = \frac{1}{2}$ .

**Correction :**



Graphiquement, on lit que les solutions sont  $x_1 \approx 1,05$  (soit  $x_1 = \frac{\pi}{3}$ ) et  $x_2 \approx 5,25$  (soit  $x_2 = \frac{5\pi}{3}$ ).

€

€

€

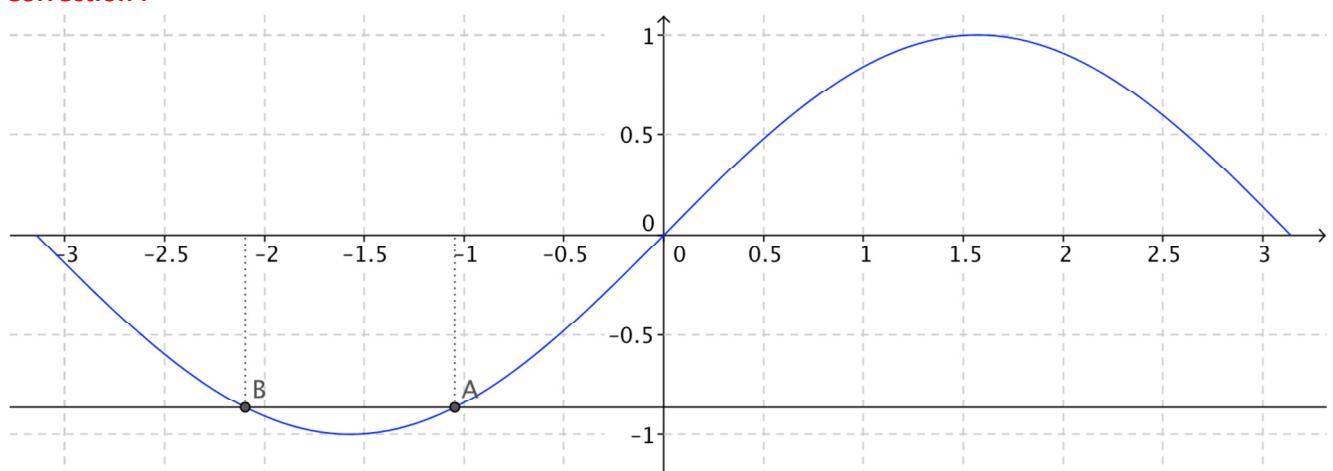
€

### Exercice 10

On a tracé sur l'intervalle  $[-\pi ; \pi]$  la représentation graphique de la fonction sinus.

Résoudre graphiquement dans l'intervalle  $[-\pi ; \pi]$  l'équation  $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

**Correction :**



Graphiquement, on lit que les solutions sont  $x_1 \approx -1,05$  (soit  $x_1 = -\frac{\pi}{3}$ ) et  $x_2 \approx -2,1$  (soit  $x_2 = -\frac{2\pi}{3}$ ).

### III. Etudier le signe d'une expression

#### Exercice 11

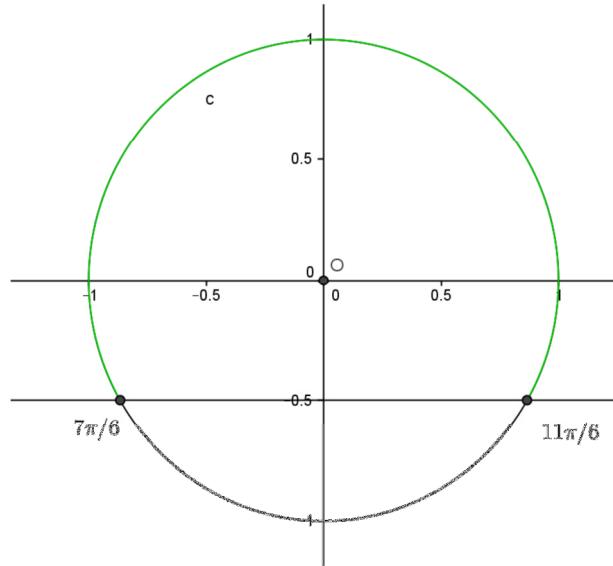
On considère la fonction définie sur  $[0 ; 2\pi[$  par  $f(x) = 2 \sin x + 1$ .

- Résoudre, en utilisant le cercle trigonométrique, l'inéquation  $\sin x > -\frac{1}{2}$  sur l'intervalle  $[0 ; 2\pi[$ .
- En déduire le signe de  $f(x)$  sur  $[0 ; 2\pi[$ .

#### Correction :

- L'ensemble des solutions de

l'inéquation  $\sin x > -\frac{1}{2}$  sur  $[0 ; 2\pi[$  est  $\left[0 ; \frac{7\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{11\pi}{6} ; 2\pi\right]$



- $f(x) > 0 \Leftrightarrow 2 \sin x + 1 > 0 \Leftrightarrow 2 \sin x > -1 \Leftrightarrow \sin x > -\frac{1}{2}$ .

On en déduit alors le signe de  $f(x)$  sur  $[0 ; 2\pi[$ , en utilisant a. :

$x$	0	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{11\pi}{6}$	$2\pi$
$f(x)$	+	0	-	0

#### Exercice 12

On considère la fonction définie sur  $]-\pi ; \pi]$  par  $f(x) = 2 \cos x - \sqrt{3}$ .

- Résoudre, en utilisant le cercle trigonométrique, l'inéquation  $\cos x > \frac{\sqrt{3}}{2}$  sur l'intervalle  $]-\pi ; \pi]$ .

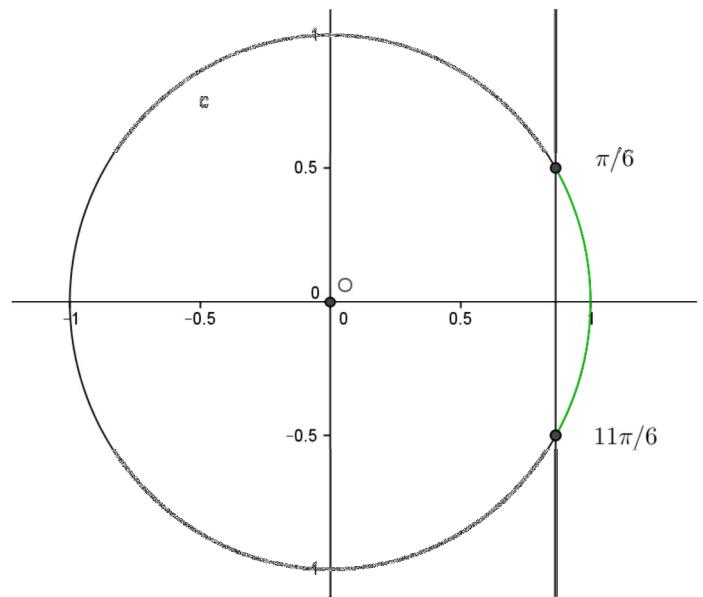
- b. En déduire le signe de  $f(x)$  sur  $]-\pi ; \pi]$ .

Correction :

- a. L'ensemble des solutions de

l'inéquation  $\cos x > \frac{\sqrt{3}}{2}$  sur

$$[0 ; 2\pi[ \text{ est } \left[ 0 ; \frac{\pi}{6} \right] \cup \left[ \frac{11\pi}{6} ; 2\pi[$$



b.  $f(x) > 0 \Leftrightarrow 2\cos x - \sqrt{3} > 0 \Leftrightarrow 2\cos x > \sqrt{3} \Leftrightarrow \cos x > \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

On en déduit alors le signe de  $f(x)$  sur  $[0 ; 2\pi[$ , en utilisant a. :

$x$	$0$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{11\pi}{6}$	$2\pi$	
$f(x)$	+	0	-	0	+

### Exercice 13

On considère la fonction définie sur  $]-\pi ; \pi]$  par  $f(x) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ .

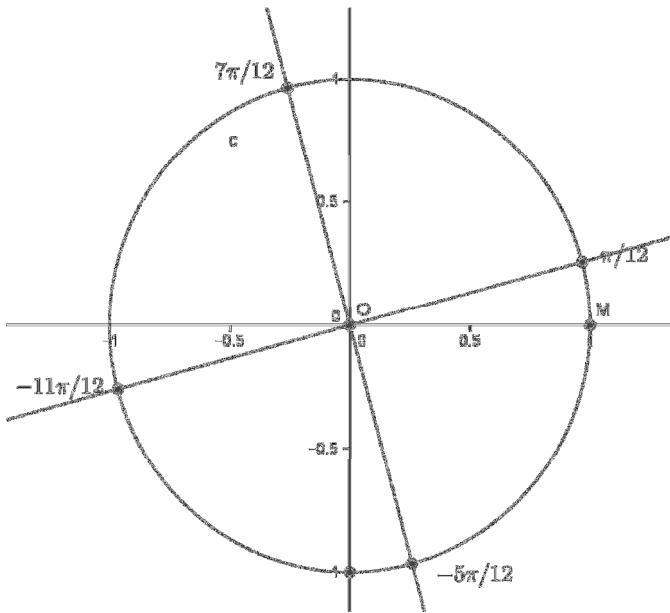
- a. Résoudre dans  $]-\pi ; \pi]$  l'équation  $\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = 0$ .

- b. En déduire le signe de  $f(x)$  sur  $]-\pi ; \pi]$ .

Correction :

$$\begin{aligned}
 \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = 0 &\Leftrightarrow 2x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + k2\pi \quad \text{ou} \quad 2x + \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \\
 &\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} + k2\pi \quad \text{ou} \quad 2x = -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \\
 &\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \quad \text{ou} \quad 2x = -\frac{5\pi}{6} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \\
 &\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{12} + k\pi \quad \text{ou} \quad x = -\frac{5\pi}{12} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})
 \end{aligned}$$

Dans l'intervalle  $[-\pi ; \pi]$ , les solutions sont  $-\frac{11\pi}{12}, -\frac{5\pi}{12}, \frac{\pi}{12}, \frac{7\pi}{12}$ .



Sur l'intervalle  $[-\pi ; -\frac{11\pi}{12}]$ ,

$-\pi < x < -\frac{11\pi}{12}$  puis  $-2\pi < 2x < -\frac{11\pi}{6}$  et  $-2\pi + \frac{\pi}{3} < 2x + \frac{\pi}{3} < -\frac{11\pi}{6} + \frac{\pi}{3}$  donc

$-\frac{7\pi}{3} < 2x + \frac{\pi}{3} < -\frac{3\pi}{2}$  et  $\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) > 0$  ;

Sur l'intervalle  $[-\frac{11\pi}{12} ; -\frac{5\pi}{12}]$ ,

$-\frac{11\pi}{12} < x < -\frac{5\pi}{12}$  puis  $-\frac{11\pi}{6} < 2x < -\frac{5\pi}{6}$  et  $-\frac{11\pi}{6} + \frac{\pi}{3} < 2x + \frac{\pi}{3} < -\frac{5\pi}{6} + \frac{\pi}{3}$  donc

$-\frac{3\pi}{2} < 2x + \frac{\pi}{3} < -\frac{\pi}{2}$  et  $\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) < 0$  ;

Sur l'intervalle  $\left] -\frac{5\pi}{12}; \frac{\pi}{12} \right[$ ,

$-\frac{5\pi}{12} < x < \frac{\pi}{12}$  puis  $-\frac{5\pi}{6} < 2x < \frac{\pi}{6}$  et  $-\frac{5\pi}{6} + \frac{\pi}{3} < 2x + \frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}$  donc

$-\frac{\pi}{2} < 2x + \frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{2}$  et  $\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) > 0$  ;

Sur l'intervalle  $\left] \frac{\pi}{12}; \frac{7\pi}{12} \right[$ ,

$\frac{\pi}{12} < x < \frac{7\pi}{12}$  puis  $\frac{\pi}{6} < 2x < \frac{7\pi}{6}$  et  $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} < 2x + \frac{\pi}{3} < \frac{7\pi}{6} + \frac{\pi}{3}$  donc

$\frac{\pi}{2} < 2x + \frac{\pi}{3} < \frac{3\pi}{2}$  et  $\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) < 0$  ;

Sur l'intervalle  $\left] \frac{7\pi}{12}; \pi \right[$ ,

$\frac{7\pi}{12} < x < \pi$  puis  $\frac{7\pi}{6} < 2x < 2\pi$  et  $\frac{7\pi}{6} + \frac{\pi}{3} < 2x + \frac{\pi}{3} < 2\pi + \frac{\pi}{3}$  donc

$\frac{3\pi}{2} < 2x + \frac{\pi}{3} < \frac{7\pi}{3}$  et  $\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) > 0$ .

On peut alors résumer ces résultats :

$x$	$-\pi$	$-\frac{11\pi}{12}$	$-\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{7\pi}{12}$	$\pi$
$f(x)$	+	0	-	0	+	0

#### IV. Utiliser la parité et la périodicité des fonctions sinus et cosinus

##### Exercice 14

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{A}$  par  $f(x) = x \sin x$ . Démontrer que  $f$  est paire.

**Correction :**

La fonction  $f$  est définie sur  $\mathbb{A}$  par  $f(x) = x \sin x$ .

Pour tout réel  $x$ ,  $f(-x) = (-x) \sin(-x)$ , or  $\sin(-x) = -\sin x$ , donc

$f(-x) = -x(-\sin x) = x \sin x = f(x)$  ; la fonction  $f$  est donc paire.

##### Exercice 15

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{A}$  par  $f(x) = x + \sin x$ . Démontrer que  $f$  est impaire.

**Correction :**

La fonction  $f$  est définie sur  $\mathbb{A}$  par  $f(x) = x + \sin x$ .

Pour tout réel  $x$ ,  $f(-x) = -x + \sin(-x)$  ; or  $\sin(-x) = -\sin x$ , donc

$f(-x) = -x - \sin(x) = -(x + \sin x) = -f(x)$  ; la fonction  $f$  est donc impaire.

## Exercice 16

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{A}$  par  $f(x) = \sin 2x$ . Démontrer que  $f$  est périodique de période  $\pi$ .

**Correction :**

La fonction  $f$  est définie sur  $\mathbb{A}$  par  $f(x) = \sin 2x$ . Pour tout réel  $x$ ,

$$f(x + \pi) = \sin(2(x + \pi)) = \sin(2x + 2\pi) ; \text{ or } \sin(a + 2\pi) = \sin a, \text{ donc}$$

$f(x + \pi) = \sin(2x) = f(x)$  ; la fonction  $f$  est donc périodique de période  $\pi$ .

## Exercice 17

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{A}$  par  $f(x) = \cos\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{4}\right)$ . Démontrer que  $f$  est périodique de période  $6\pi$ .

**Correction :**

La fonction  $f$  est définie sur  $\mathbb{A}$  par  $f(x) = \cos\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{4}\right)$ .

Pour tout réel  $x$ ,  $f(x + 6\pi) = \cos\left(\frac{x + 6\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{x}{3} + \frac{6\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{4} + 2\pi\right)$ , or

$\cos(a + 2\pi) = \cos a$ , donc  $f(x + 6\pi) = \cos\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = f(x)$  ; la fonction  $f$  est donc périodique de période  $6\pi$ .

## V. Etudier des limites

### Exercice 18

Etudier la limite en 0 de la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{A}^*$  par  $f(x) = \frac{3 \sin x}{x}$ .

**Correction :**

La fonction  $f$  est définie sur  $\mathbb{A}^*$  par  $f(x) = \frac{3 \sin x}{x}$ .

$f(x) = 3 \times \frac{\sin x}{x}$ , or on sait d'après le cours que  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ , donc par produit :  $\lim_{x \rightarrow 0} 3 \frac{\sin x}{x} = 3$

### Exercice 19

Etudier la limite en 0 de la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{A}^*$  par  $f(x) = \frac{\cos x - 1}{2x}$ .

## Correction :

La fonction  $f$  est définie sur  $\mathbb{A}^*$  par  $f(x) = \frac{\cos x - 1}{2x}$ .

$f(x) = \frac{\cos x - 1}{2x} = \frac{1}{2} \times \frac{\cos x - 1}{x}$ , or on sait d'après le cours que  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$ , donc par produit :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{2x} = 0.$$

## Exercice 20

Etudier la limite en  $+\infty$  de la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{A}$  par  $f(x) = \sin x - x$ .

## Correction :

La fonction  $f$  est définie sur  $\mathbb{A}$  par  $f(x) = \sin x - x$ .

On sait que, pour tout réel  $x$ ,  $-1 \leq \sin x \leq 1$ , donc  $-1 - x \leq \sin x - x \leq 1 - x$ , puis  $f(x) \leq 1 - x$ .

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - x) = -\infty$ , donc d'après le théorème de comparaison,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ .

## Exercice 21

Etudier la limite en  $-\infty$  de la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{A}$  par  $f(x) = \cos 2x + x$ .

## Correction :

La fonction  $f$  est définie sur  $\mathbb{A}$  par  $f(x) = \cos 2x + x$ .

On sait que, pour tout réel  $x$ ,  $-1 \leq \cos(2x) \leq 1$ , donc  $-1 + x \leq \cos(2x) + x \leq 1 + x$ , puis  $f(x) \leq 1 + x$ .

$\lim_{x \rightarrow -\infty} (1 + x) = -\infty$ , donc d'après le théorème de comparaison,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ .

## VI. Calculer des dérivées

## Exercice 22

On considère la fonction définie sur  $\mathbb{A}$  par  $f(x) = x \sin x$ . Calculer  $f'(x)$ .

## Correction :

La fonction  $f$  est définie sur  $\mathbb{A}$  par  $f(x) = x \sin x$ .

On remarque que  $f = u \times v$  avec  $\begin{cases} u(x) = x & ; u'(x) = 1 \\ v(x) = \sin x & ; v'(x) = \cos x \end{cases}$  ;

Pour tout réel  $x$ ,  $f'(x) = 1 \times \sin x + x \times \cos x = \sin x + x \cos x$ .

## Exercice 23

On considère la fonction définie sur  $\mathbb{A}^*$  par  $f(x) = \frac{\cos x}{x}$ . Calculer  $f'(x)$ .

**Correction :**

La fonction est définie sur  $\mathbb{A}^*$  par  $f(x) = \frac{\cos x}{x}$ .

On remarque que  $f = \frac{u}{v}$  avec  $\begin{cases} u(x) = \cos x & ; u'(x) = -\sin x \\ v(x) = x & ; v'(x) = 1 \end{cases}$  ;

Pour tout réel  $x$ ,  $f'(x) = \frac{-(\sin x) \times x - \cos x}{x^2} = \frac{-x \sin x - \cos x}{x^2}$ .

## Exercice 24

On considère la fonction définie sur  $\mathbb{A}$  par  $f(x) = \sin(2x)$ . Calculer  $f'(x)$ .

**Correction :**

La fonction est définie sur  $\mathbb{A}$  par  $f(x) = \sin(2x)$ .

On remarque que  $f = \sin u$  avec  $u(x) = 2x$  ;  $u'(x) = 2$  ;

On sait que  $(\sin u)' = u' \cos u$ , donc pour tout réel  $x$ ,  $f'(x) = 2 \cos(2x)$ .

## Exercice 25

On considère la fonction définie sur  $\mathbb{A}$  par  $f(x) = \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right)$ . Calculer  $f'(x)$ .

**Correction :**

La fonction est définie sur  $\mathbb{A}$  par  $f(x) = \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right)$ .

On remarque que  $f = \cos u$  avec  $u(x) = \frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}$  ;  $u'(x) = \frac{1}{2}$  ;

On sait que  $(\cos u)' = -u' \sin u$ , donc pour tout réel  $x$ ,  $f'(x) = -\frac{1}{2} \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right)$ .

## VII. Etude d'une fonction

### Exercice 26

Soit  $f$  la fonction dérivable sur  $[0; \pi]$ , définie par  $f(x) = -\frac{1}{2} \cos(2x) + \cos(x) + \frac{3}{2}$ .

Vérifier que  $f'(x) = \sin(x)[2 \cos(x) - 1]$  et en déduire le signe de  $f'(x)$  sur  $[0; \pi]$ .

Dresser le tableau de variation de  $f$  sur  $[0; \pi]$

**Correction :**

La fonction est définie sur  $[0; \pi]$ , par  $f(x) = -\frac{1}{2}\cos(2x) + \cos(x) + \frac{3}{2}$ .

Elle est dérivable sur  $[0; \pi]$  et pour tout  $x$  de  $[0; \pi]$ ,

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{1}{2}(-2\sin(2x)) - \sin(x) \\ &= \sin(2x) - \sin(x) \\ &= 2\sin(x)\cos(x) - \sin(x) \\ &= \sin(x)[2\cos(x) - 1] \end{aligned}$$

Sur  $[0; \pi]$ ,  $\sin(x)$  est positif et s'annule en 0 et en  $\pi$  ;  $f'(x)$  est donc du signe de  $2\cos(x) - 1$ .

Sur  $[0; \pi]$ ,  $2\cos(x) - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3}$  et

$$2\cos(x) - 1 > 0 \Leftrightarrow \cos(x) > \frac{1}{2} \Leftrightarrow 0 \leq x < \frac{\pi}{3}.$$

On en déduit le tableau de variation de  $f$ :

$x$	0	$\frac{\pi}{3}$	$\pi$
$f'(x)$	0	+	0
$f$	2	$\frac{9}{4}$	0

## VIII. Pour aller plus loin....Etude de la fonction tangente

### Exercice 27

#### 1. Définition

La fonction tangente, notée  $\tan$ , est la fonction définie pour tout réel  $x$  différent de  $-\frac{\pi}{2} + k\pi$ , avec  $k$  entier, par  $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ .

**Valeurs particulières à connaître :**

Compléter le tableau suivant

$x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\pi$
$\tan x$					

--	--	--	--	--

## 2. Propriétés

- a. Montrer que, pour tout réel  $x$  différent de  $-\frac{\pi}{2} + k\pi$ , avec  $k$  entier,  $\tan(x + \pi) = \tan x$ .

La fonction tangente est donc périodique de période  $\pi$ .

- b. Montrer que, pour tout réel  $x$  différent de  $-\frac{\pi}{2} + k\pi$ , avec  $k$  entier,  $\tan(-\pi) = \tan x$ .

La fonction tangente est donc impaire.

On peut alors réduire l'intervalle d'étude de la fonction tangente à l'intervalle  $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$ .

## 3. Etude de la fonction tangente

- a. Montrer que :  $\lim_{\substack{x \rightarrow \frac{\pi}{2} \\ x < \frac{\pi}{2}}} \tan x = +\infty$ .

$$\begin{array}{c} x \rightarrow \frac{\pi}{2} \\ x < \frac{\pi}{2} \end{array}$$

La droite d'équation  $x = \frac{\pi}{2}$  est donc asymptote à la courbe représentant la fonction tangente.

- b. La fonction tangente est dérivable sur  $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$  (quotient de deux fonctions dérivables sur  $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$ , le dénominateur ne s'annulant pas sur  $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$ ).

Montrer que, pour tout  $x$  de  $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$ ,  $\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$ .

En déduire le sens de variation de la fonction tangente sur  $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$ .

- c. Tracer la courbe représentative de la fonction tangente sur  $[-2\pi ; 2\pi]$ .

## Correction :

1.

$x$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\pi$
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	0

2. a. Soit  $x$  un réel différent de  $-\frac{\pi}{2} + k\pi$ , avec  $k$  entier,

$$\tan(x + \pi) = \frac{\sin(x + \pi)}{\cos(x + \pi)} = \frac{-\sin x}{-\cos x} = \tan x.$$

b. Soit  $x$  un réel différent de  $-\frac{\pi}{2} + k\pi$ , avec  $k$  entier,

$$\tan(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x$$

3. a.  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \sin x = 1$  et  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \cos x = 0$  avec  $\cos x > 0$ , lorsque  $x \in \left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$ . Donc :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^- \\ x < \frac{\pi}{2}}} \tan x = +\infty.$$

La droite d'équation  $x = \frac{\pi}{2}$  est donc asymptote à la courbe représentant la fonction tangente.

b. La fonction tangente est dérivable sur  $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$  (quotient de deux fonctions dérivables sur  $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$ , le dénominateur ne s'annulant pas sur  $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$ ).

Et pour tout  $x$  de  $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$ ,  $\tan'(x) = \frac{\cos x \times \cos x - \sin x \times (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$

et  $\tan'(x) = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$ .

Pour tout  $x$  de  $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$ ,  $\tan'(x) > 0$ . La fonction tangente est strictement croissante sur  $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$ .

## Courbe

