

Corrigés des exercices de trigonométrie

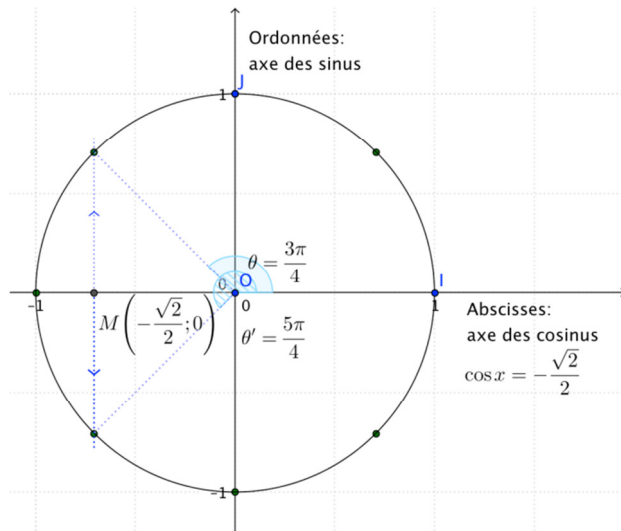
I. Résoudre algébriquement des équations, des inéquations

Pour les exercices suivants, on utilisera le cercle trigonométrique

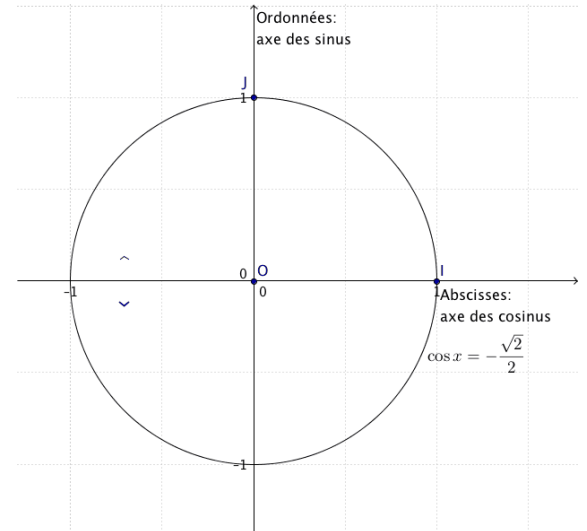
Exercice 1

Résoudre dans l'intervalle $[0 ; 2\pi]$ l'équation $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Correction :



Les solutions sont $S = \left\{ \frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4} \right\}$

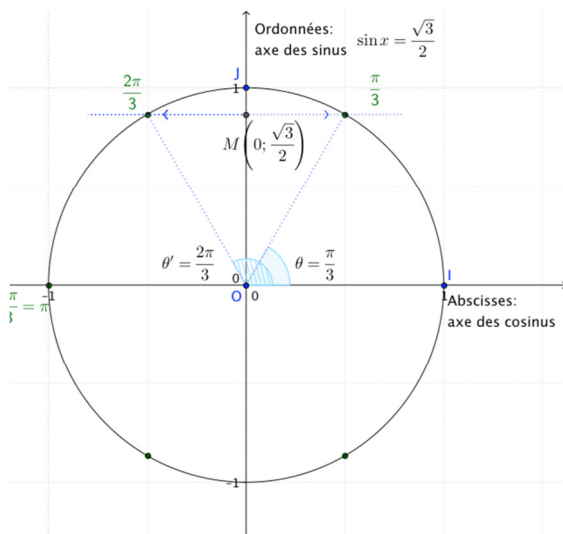


Exercice 2

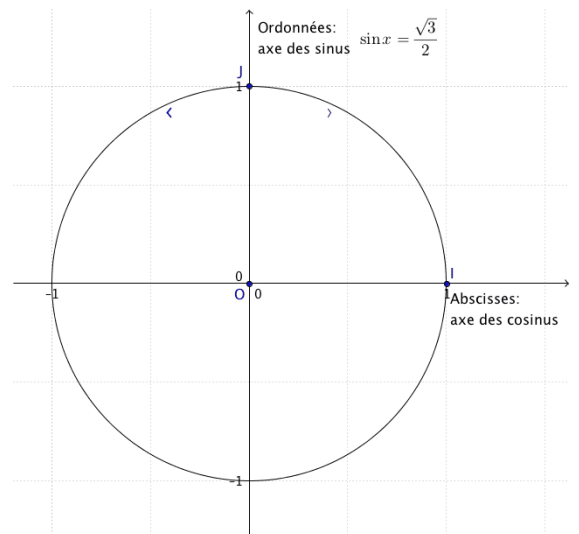
€

Résoudre dans l'intervalle $[0 ; 2\pi]$ l'équation $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Correction :



Les solutions sont $S = \left\{ \frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3} \right\}$

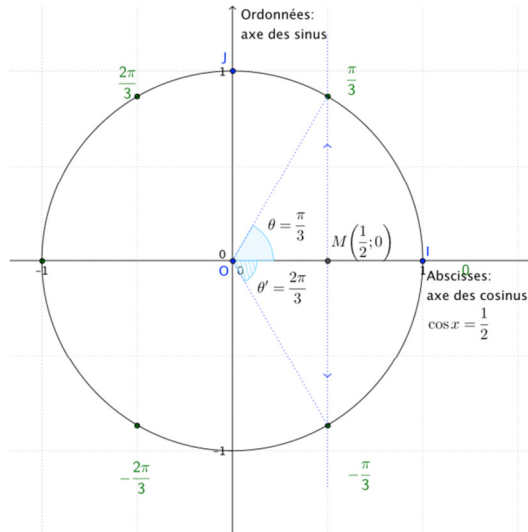


€

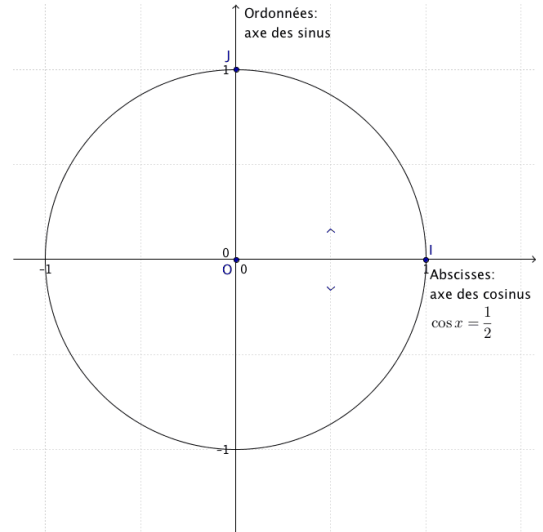
Exercice 3

Résoudre dans l'intervalle $]-\pi ; \pi]$ l'équation $\cos x = \frac{1}{2}$.

Correction :



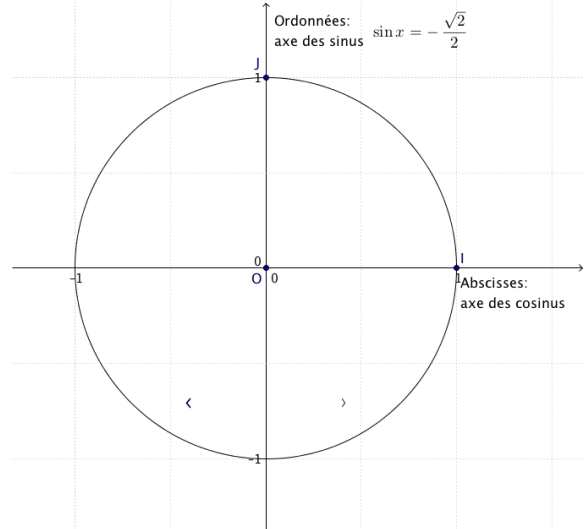
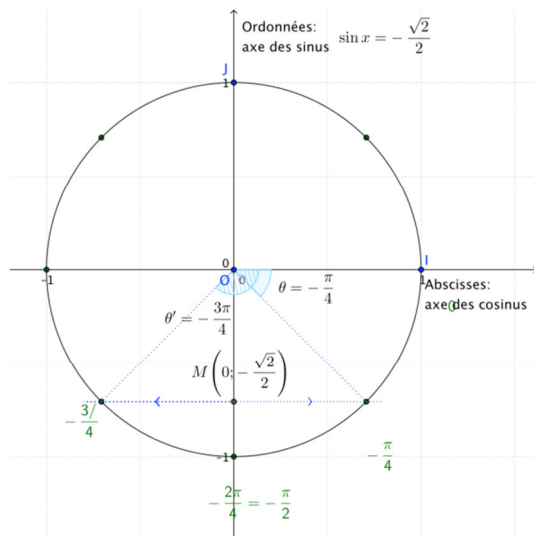
Les solutions sont $S = \left\{ -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3} \right\}$



Exercice 4

Résoudre dans l'intervalle $]-\pi ; \pi]$ l'équation $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

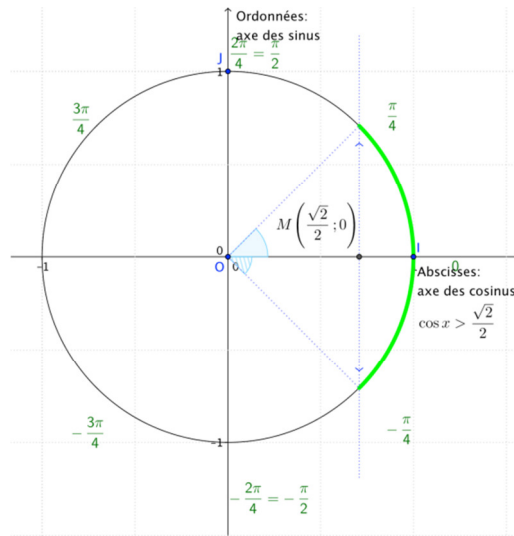
Correction :



Exercice 5

Résoudre dans l'intervalle $]-\pi ; \pi]$ l'inéquation $\cos x > \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Correction :



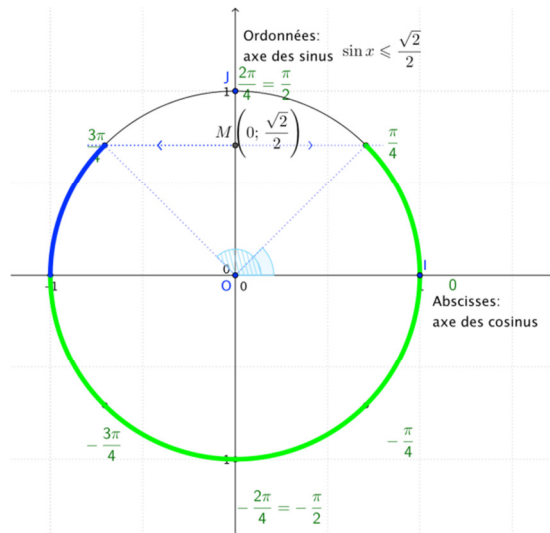
Les solutions sont $\left] -\frac{\pi}{4} ; \frac{\pi}{4} \right]$

€

Exercice 6

Résoudre dans l'intervalle $]-\pi ; \pi]$ l'inéquation $\sin x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Correction :



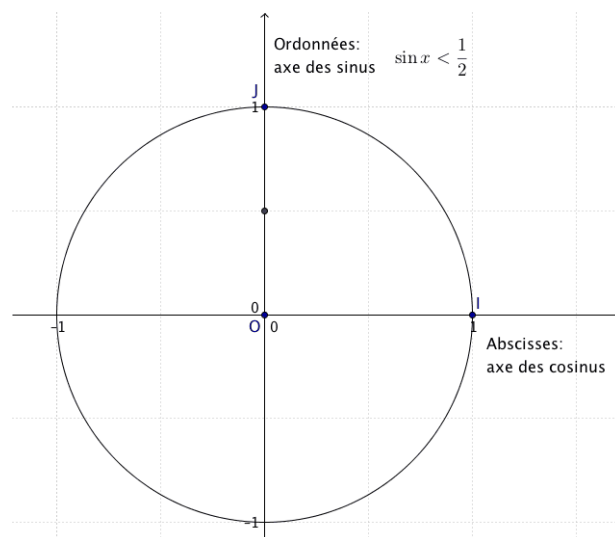
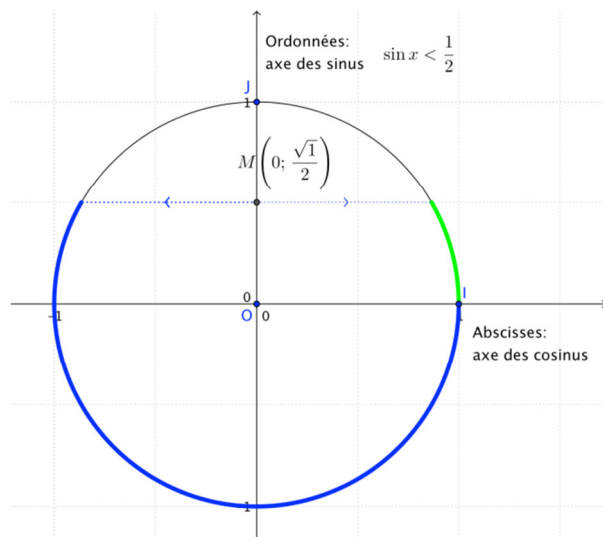
Les solutions sont $\left] -\pi ; \frac{\pi}{4} \right] \cup \left[\frac{3\pi}{4} ; \pi \right]$

€

Exercice 7

Résoudre dans l'intervalle $[0 ; 2\pi]$ l'inéquation $\sin x < \frac{1}{2}$.

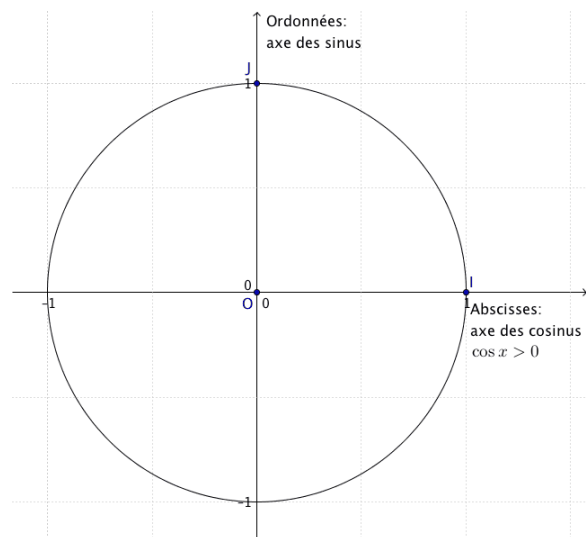
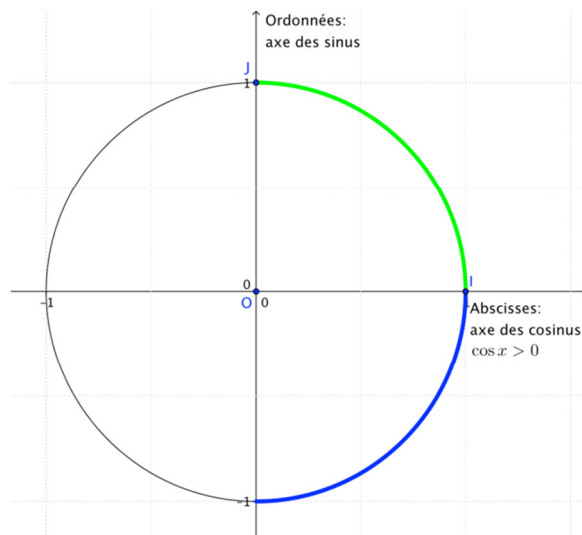
Correction :



Exercice 8

Résoudre dans l'intervalle $[0 ; 2\pi]$ l'inéquation $\cos x > 0$.

Correction :



L'ensemble des solutions est $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$

€

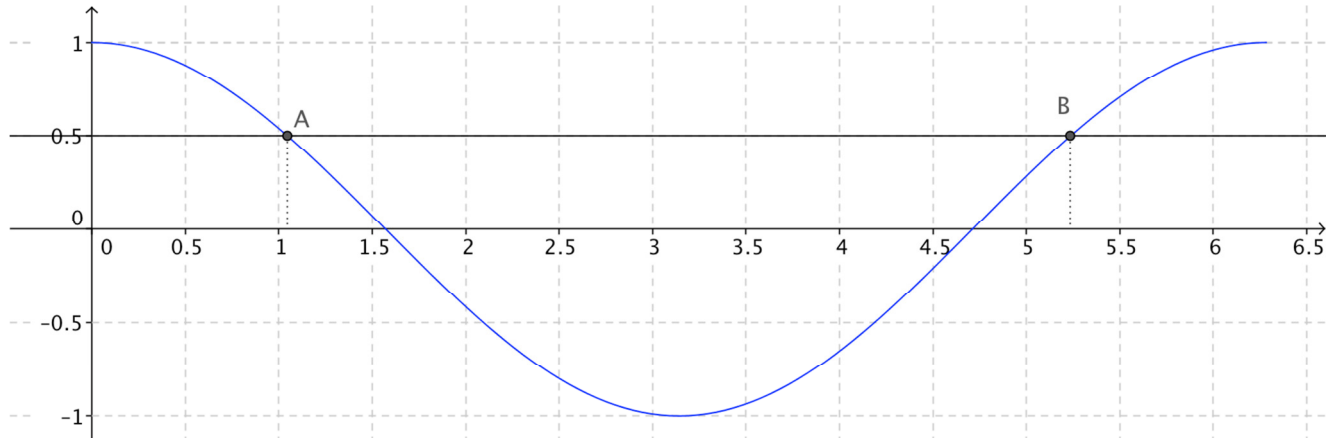
II. Résoudre graphiquement des équations

Exercice 9

On a tracé sur l'intervalle $[0 ; 2\pi]$ la représentation graphique de la fonction cosinus.

Résoudre graphiquement dans l'intervalle $[0 ; 2\pi]$ l'équation $\cos x = \frac{1}{2}$.

Correction :



Graphiquement, on lit que les solutions sont $x_1 \approx 1,05$ (soit $x_1 = \frac{\pi}{3}$) et $x_2 \approx 5,25$ (soit $x_2 = \frac{5\pi}{3}$).

€

€

€

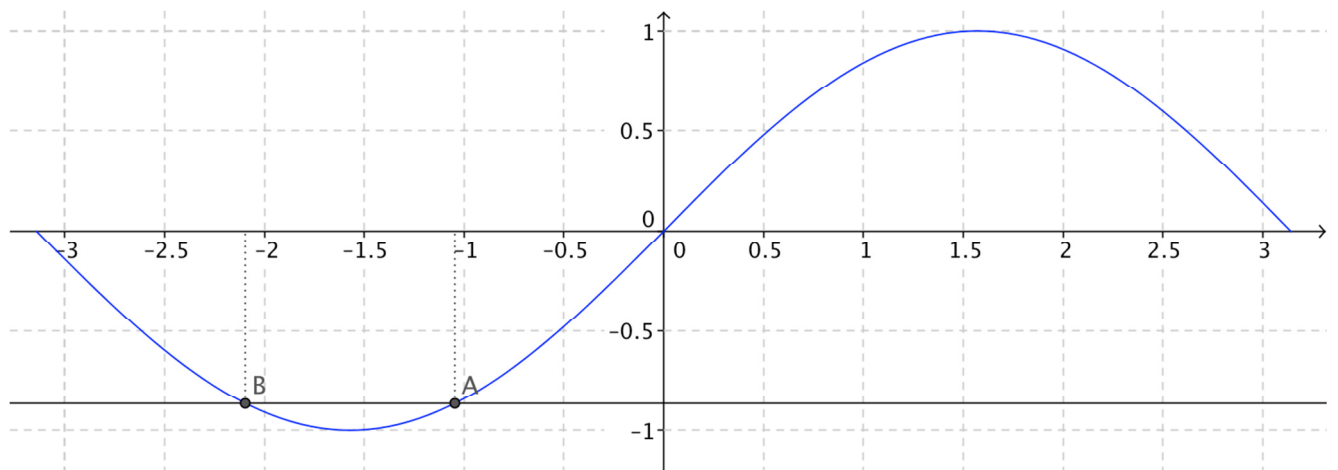
€

Exercice 10

On a tracé sur l'intervalle $]-\pi ; \pi]$ la représentation graphique de la fonction sinus.

Résoudre graphiquement dans l'intervalle $]-\pi ; \pi]$ l'équation $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Correction :



Graphiquement, on lit que les solutions sont $x_1 \approx -1,05$ (soit $x_1 = -\frac{\pi}{3}$) et $x_2 \approx -2,1$ (soit $x_2 = -\frac{2\pi}{3}$).

III. Etudier le signe d'une expression

Exercice 11

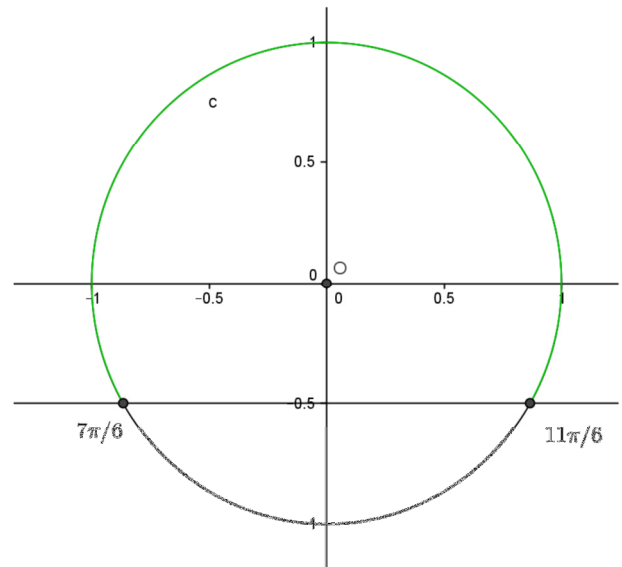
On considère la fonction définie sur $[0 ; 2\pi[$ par $f(x) = 2 \sin x + 1$.

- Résoudre, en utilisant le cercle trigonométrique, l'inéquation $\sin x > -\frac{1}{2}$ sur l'intervalle $[0 ; 2\pi[$.
- En déduire le signe de $f(x)$ sur $[0 ; 2\pi[$.

Correction :

- L'ensemble des solutions de l'inéquation $\sin x > -\frac{1}{2}$ sur

$$[0 ; 2\pi[\text{ est } \left[0 ; \frac{7\pi}{6}\right[\cup \left[\frac{11\pi}{6} ; 2\pi\right[$$



- $f(x) > 0 \Leftrightarrow 2 \sin x + 1 > 0 \Leftrightarrow 2 \sin x > -1 \Leftrightarrow \sin x > -\frac{1}{2}$.

On en déduit alors le signe de $f(x)$ sur $[0 ; 2\pi[$, en utilisant a. :

x	0	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π	
$f(x)$	+	0	-	0	+

Exercice 12

On considère la fonction définie sur $] -\pi ; \pi]$ par $f(x) = 2 \cos x - \sqrt{3}$.

- Résoudre, en utilisant le cercle trigonométrique, l'inéquation $\cos x > \frac{\sqrt{3}}{2}$ sur l'intervalle $] -\pi ; \pi]$.

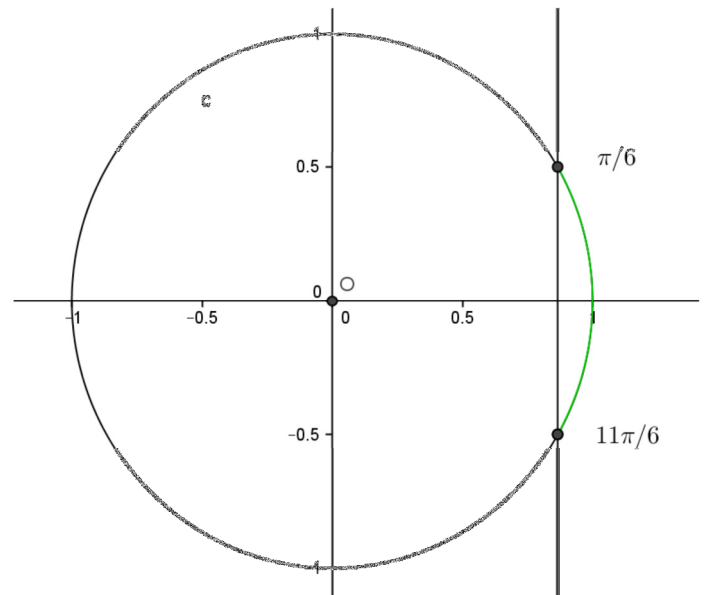
b. En déduire le signe de $f(x)$ sur $]-\pi ; \pi]$.

Correction :

a. L'ensemble des solutions de

l'inéquation $\cos x > \frac{\sqrt{3}}{2}$ sur

$[0 ; 2\pi[$ est $\left[0 ; \frac{\pi}{6}\right[\cup \left[\frac{11\pi}{6} ; 2\pi\right[$



b. $f(x) > 0 \Leftrightarrow 2\cos x - \sqrt{3} > 0 \Leftrightarrow 2\cos x > \sqrt{3} \Leftrightarrow \cos x > \frac{\sqrt{3}}{2}$.

On en déduit alors le signe de $f(x)$ sur $[0 ; 2\pi[$, en utilisant a. :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π	
$f(x)$	+	0	-	0	+

Exercice 13

On considère la fonction définie sur $]-\pi ; \pi]$ par $f(x) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$.

a. Résoudre dans $]-\pi ; \pi]$ l'équation $\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = 0$.

b. En déduire le signe de $f(x)$ sur $]-\pi ; \pi]$.

Correction :

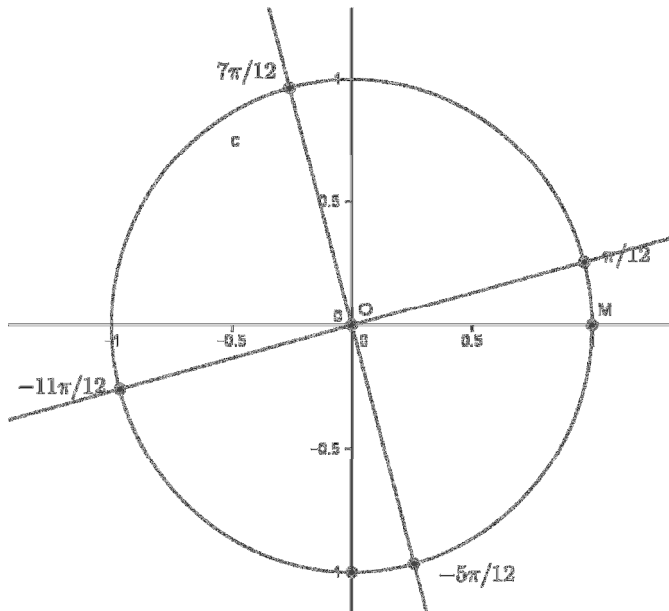
$$\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow 2x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + k2\pi \quad \text{ou} \quad 2x + \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} + k2\pi \quad \text{ou} \quad 2x = -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \quad \text{ou} \quad 2x = -\frac{5\pi}{6} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{12} + k\pi \quad \text{ou} \quad x = -\frac{5\pi}{12} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Dans l'intervalle $]-\pi ; \pi]$, les solutions sont $-\frac{11\pi}{12}$; $-\frac{5\pi}{12}$; $\frac{\pi}{12}$; $\frac{7\pi}{12}$.



Sur l'intervalle $]-\pi ; -\frac{11\pi}{12}[$,

$$-\pi < x < -\frac{11\pi}{12} \quad \text{puis} \quad -2\pi < 2x < -\frac{11\pi}{6} \quad \text{et} \quad -2\pi + \frac{\pi}{3} < 2x + \frac{\pi}{3} < -\frac{11\pi}{6} + \frac{\pi}{3} \quad \text{donc}$$

$$-\frac{7\pi}{3} < 2x + \frac{\pi}{3} < -\frac{3\pi}{2} \quad \text{et} \quad \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) > 0 ;$$

Sur l'intervalle $]-\frac{11\pi}{12} ; -\frac{5\pi}{12}[$,

$$-\frac{11\pi}{12} < x < -\frac{5\pi}{12} \quad \text{puis} \quad -\frac{11\pi}{6} < 2x < -\frac{5\pi}{6} \quad \text{et} \quad -\frac{11\pi}{6} + \frac{\pi}{3} < 2x + \frac{\pi}{3} < -\frac{5\pi}{6} + \frac{\pi}{3} \quad \text{donc}$$

$$-\frac{3\pi}{2} < 2x + \frac{\pi}{3} < -\frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) < 0 ;$$

Sur l'intervalle $\left] -\frac{5\pi}{12} ; \frac{\pi}{12} \right[$,

$$-\frac{5\pi}{12} < x < \frac{\pi}{12} \text{ puis } -\frac{5\pi}{6} < 2x < \frac{\pi}{6} \text{ et } -\frac{5\pi}{6} + \frac{\pi}{3} < 2x + \frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} \text{ donc}$$

$$-\frac{\pi}{2} < 2x + \frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{2} \text{ et } \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) > 0 ;$$

Sur l'intervalle $\left] \frac{\pi}{12} ; \frac{7\pi}{12} \right[$,

$$\frac{\pi}{12} < x < \frac{7\pi}{12} \text{ puis } \frac{\pi}{6} < 2x < \frac{7\pi}{6} \text{ et } \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} < 2x + \frac{\pi}{3} < \frac{7\pi}{6} + \frac{\pi}{3} \text{ donc}$$

$$\frac{\pi}{2} < 2x + \frac{\pi}{3} < \frac{3\pi}{2} \text{ et } \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) < 0 ;$$

Sur l'intervalle $\left] \frac{7\pi}{12} ; \pi \right[$,

$$\frac{7\pi}{12} < x < \pi \text{ puis } \frac{7\pi}{6} < 2x < 2\pi \text{ et } \frac{7\pi}{6} + \frac{\pi}{3} < 2x + \frac{\pi}{3} < 2\pi + \frac{\pi}{3} \text{ donc}$$

$$\frac{3\pi}{2} < 2x + \frac{\pi}{3} < \frac{7\pi}{3} \text{ et } \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) > 0.$$

On peut alors résumer ces résultats :

x	$-\pi$	$-\frac{11\pi}{12}$	$-\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{7\pi}{12}$	π			
$f(x)$	+	0	-	0	+	0	-	0	+

IV. Utiliser la parité et la périodicité des fonctions sinus et cosinus

Exercice 14

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x \sin x$. Démontrer que f est paire.

Correction :

La fonction f est définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x \sin x$.

Pour tout réel x , $f(-x) = (-x) \sin(-x)$, or $\sin(-x) = -\sin x$, donc

$$f(-x) = -x(-\sin x) = x \sin x = f(x) ; \text{ la fonction } f \text{ est donc paire.}$$

Exercice 15

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x + \sin x$. Démontrer que f est impaire.

Correction :

La fonction f est définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x + \sin x$.

Pour tout réel x , $f(-x) = -x + \sin(-x)$; or $\sin(-x) = -\sin x$, donc

$f(-x) = -x - \sin(x) = -(x + \sin x) = -f(x)$; la fonction f est donc impaire.

Exercice 16

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \sin 2x$. Démontrer que f est périodique de période π .

Correction :

La fonction f est définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \sin 2x$. Pour tout réel x ,

$$f(x + \pi) = \sin(2(x + \pi)) = \sin(2x + 2\pi) ; \text{ or } \sin(a + 2\pi) = \sin a , \text{ donc}$$

$$f(x + \pi) = \sin(2x) = f(x) ; \text{ la fonction } f \text{ est donc périodique de période } \pi .$$

Exercice 17

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \cos\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{4}\right)$. Démontrer que f est périodique de période 6π .

Correction :

La fonction f est définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \cos\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{4}\right)$.

$$\text{Pour tout réel } x, f(x + 6\pi) = \cos\left(\frac{x + 6\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{x}{3} + \frac{6\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{4} + 2\pi\right), \text{ or}$$

$$\cos(a + 2\pi) = \cos a , \text{ donc } f(x + 6\pi) = \cos\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = f(x) ; \text{ la fonction } f \text{ est donc périodique de période } 6\pi .$$

V. Etudier des limites

Exercice 18

Etudier la limite en 0 de la fonction f définie sur \mathbb{R}^* par $f(x) = \frac{3 \sin x}{x}$.

Correction :

La fonction f est définie sur \mathbb{R}^* par $f(x) = \frac{3 \sin x}{x}$.

$$f(x) = 3 \times \frac{\sin x}{x}, \text{ or on sait d'après le cours que } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \text{ donc par produit : } \lim_{x \rightarrow 0} 3 \frac{\sin x}{x} = 3$$

Exercice 19

Etudier la limite en 0 de la fonction f définie sur \mathbb{R}^* par $f(x) = \frac{\cos x - 1}{2x}$.

Correction :

La fonction f est définie sur \mathbb{R}^* par $f(x) = \frac{\cos x - 1}{2x}$.

$f(x) = \frac{\cos x - 1}{2x} = \frac{1}{2} \times \frac{\cos x - 1}{x}$, or on sait d'après le cours que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$, donc par produit :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{2x} = 0.$$

Exercice 20

Etudier la limite en $+\infty$ de la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \sin x - x$.

Correction :

La fonction f est définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \sin x - x$.

On sait que, pour tout réel x , $-1 \leq \sin x \leq 1$, donc $-1 - x \leq \sin x - x \leq 1 - x$, puis $f(x) \leq 1 - x$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - x) = -\infty, \text{ donc d'après le théorème de comparaison, } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty.$$

Exercice 21

Etudier la limite en $-\infty$ de la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \cos 2x + x$.

Correction :

La fonction f est définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \cos 2x + x$.

On sait que, pour tout réel x , $-1 \leq \cos(2x) \leq 1$, donc $-1 + x \leq \cos(2x) + x \leq 1 + x$, puis $f(x) \leq 1 + x$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (1 + x) = -\infty, \text{ donc d'après le théorème de comparaison, } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty.$$

VI. Calculer des dérivées

Exercice 22

On considère la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x \sin x$. Calculer $f'(x)$.

Correction :

La fonction est définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x \sin x$.

On remarque que $f = u \times v$ avec $\begin{cases} u(x) = x & ; u'(x) = 1 \\ v(x) = \sin x & ; v'(x) = \cos x \end{cases}$;

Pour tout réel x , $f'(x) = 1 \times \sin x + x \times \cos x = \sin x + x \cos x$.

Exercice 23

On considère la fonction définie sur \mathbb{R}^* par $f(x) = \frac{\cos x}{x}$. Calculer $f'(x)$.

Correction :

La fonction est définie sur \mathbb{R}^* par $f(x) = \frac{\cos x}{x}$.

On remarque que $f = \frac{u}{v}$ avec $\begin{cases} u(x) = \cos x & ; u'(x) = -\sin x \\ v(x) = x & ; v'(x) = 1 \end{cases}$;

Pour tout réel x , $f'(x) = \frac{-(\sin x) \times x - \cos x}{x^2} = \frac{-x \sin x - \cos x}{x^2}$.

Exercice 24

On considère la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \sin(2x)$. Calculer $f'(x)$.

Correction :

La fonction est définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \sin(2x)$.

On remarque que $f = \sin u$ avec $u(x) = 2x$; $u'(x) = 2$;

On sait que $(\sin u)' = u' \cos u$, donc pour tout réel x , $f'(x) = 2 \cos(2x)$.

Exercice 25

On considère la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right)$. Calculer $f'(x)$.

Correction :

La fonction est définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right)$.

On remarque que $f = \cos u$ avec $u(x) = \frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}$; $u'(x) = \frac{1}{2}$;

On sait que $(\cos u)' = -u' \sin u$, donc pour tout réel x , $f'(x) = -\frac{1}{2} \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right)$.

VII. Etude d'une fonction

Exercice 26

Soit f la fonction dérivable sur $[0; \pi]$, définie par $f(x) = -\frac{1}{2} \cos(2x) + \cos(x) + \frac{3}{2}$.

Vérifier que $f'(x) = \sin(x)[2 \cos(x) - 1]$ et en déduire le signe de $f'(x)$ sur $[0; \pi]$.

Dresser le tableau de variation de f sur $[0; \pi]$

Correction :

La fonction est définie sur $[0; \pi]$, par $f(x) = -\frac{1}{2}\cos(2x) + \cos(x) + \frac{3}{2}$.

Elle est dérivable sur $[0; \pi]$ et pour tout x de $[0; \pi]$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{1}{2}(-2\sin(2x)) - \sin(x) \\ &= \sin(2x) - \sin(x) \\ &= 2\sin(x)\cos(x) - \sin(x) \\ &= \sin(x)[2\cos(x) - 1] \end{aligned}$$

Sur $[0; \pi]$, $\sin(x)$ est positif et s'annule en 0 et en π ; $f'(x)$ est donc du signe de $2\cos(x) - 1$.

Sur $[0; \pi]$, $2\cos(x) - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3}$ et

$$2\cos(x) - 1 > 0 \Leftrightarrow \cos(x) > \frac{1}{2} \Leftrightarrow 0 \leq x < \frac{\pi}{3}.$$

On en déduit le tableau de variation de f :

x	0	$\frac{\pi}{3}$	π		
$f'(x)$	0	+	0	-	0
f					

VIII. Pour aller plus loin....Etude de la fonction tangente

Exercice 27

1. Définition

La fonction tangente, notée \tan , est la fonction définie pour tout réel x différent de $-\frac{\pi}{2} + k\pi$, avec

$$k \text{ entier, par } \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Valeurs particulières à connaître :

Compléter le tableau suivant

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	π
$\tan x$					

--	--	--	--	--	--

2. Propriétés

a. Montrer que, pour tout réel x différent de $-\frac{\pi}{2} + k\pi$, avec k entier, $\tan(x + \pi) = \tan x$.

La fonction tangente est donc périodique de période π .

b. Montrer que, pour tout réel x différent de $-\frac{\pi}{2} + k\pi$, avec k entier, $\tan(-\pi) = \tan x$.

La fonction tangente est donc impaire.

On peut alors réduire l'intervalle d'étude de la fonction tangente à l'intervalle $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$.

3. Etude de la fonction tangente

a. Montrer que : $\lim_{\substack{x \rightarrow \frac{\pi}{2} \\ x < \frac{\pi}{2}}} \tan x = +\infty$.

La droite d'équation $x = \frac{\pi}{2}$ est donc asymptote à la courbe représentant la fonction tangente.

b. La fonction tangente est dérivable sur $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$ (quotient de deux fonctions dérivables sur $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$, le dénominateur ne s'annulant pas sur $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$).

Montrer que, pour tout x de $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$, $\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$.

En déduire le sens de variation de la fonction tangente sur $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$.

c. Tracer la courbe représentative de la fonction tangente sur $[-2\pi ; 2\pi]$.

Correction :

1.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	π
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	0

2. a. Soit x un réel différent de $-\frac{\pi}{2} + k\pi$, avec k entier,

$$\tan(x + \pi) = \frac{\sin(x + \pi)}{\cos(x + \pi)} = \frac{-\sin x}{-\cos x} = \tan x.$$

b. Soit x un réel différent de $-\frac{\pi}{2} + k\pi$, avec k entier,

$$\tan(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin x}{\cos x} = -\tan x$$

3. a. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \sin x = 1$ et $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \cos x = 0$ avec $\cos x > 0$, lorsque $x \in \left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$. Donc :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow \frac{\pi}{2} \\ x < \frac{\pi}{2}}} \tan x = +\infty.$$

La droite d'équation $x = \frac{\pi}{2}$ est donc asymptote à la courbe représentant la fonction tangente.

b. La fonction tangente est dérivable sur $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$ (quotient de deux fonctions dérivables sur

$\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$, le dénominateur ne s'annulant pas sur $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$).

Et pour tout x de $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$, $\tan'(x) = \frac{\cos x \times \cos x - \sin x \times (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$

$$\text{et } \tan'(x) = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x.$$

Pour tout x de $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$, $\tan'(x) > 0$. La fonction tangente est strictement croissante sur

$$\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right].$$

Courbe

