

## **TRIGONOMÉTRIE2**

### **Leçon : les équations et inéquations trigonométriques Présentation globale**

**I) les équations trigonométriques élémentaires**

**II) les inéquations trigonométriques élémentaires**

#### **I) les équations trigonométriques élémentaires**

**1) Equation:**  $\cos x = a$

**Propriété:** Soit  $a$  un nombre réel.

Si  $a > 1$  ou  $a < -1$  alors l'équation  $\cos x = a$  n'admet pas de solution dans  $\mathbb{R}$  et on a :  $S = \emptyset$ .

Si  $a = -1$  alors on a l'équation  $\cos x = -1$

On sait que :  $\cos \pi = -1$  donc tous les réels de la forme :  $\pi + 2k\pi$  avec  $k$  un nombre relatif sont solution de l'équation dans  $\mathbb{R}$  et on a :  $S = \{\pi + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$ .

Si  $a = 1$  alors on a l'équation  $\cos x = 1$  :

On sait que :  $\cos 0 = 1$  donc tous les réels de la forme :  $0 + 2k\pi$  avec  $k$  un nombre relatif sont solution de l'équation dans  $\mathbb{R}$  et on a :  $S = \{2k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$ .

Si  $-1 < a < 1$  réels alors on a l'équation  $\cos x = a$  :

Et on sait qu'il existe un unique réels :  $\alpha$  dans  $]0; \pi]$  tel que  $\cos x = \cos \alpha$  et alors on a :

$S = \{\alpha + 2k\pi; -\alpha + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$ .

**Exemple :** Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations suivantes :

$$a) \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad b) \cos x = -\frac{1}{2} \quad c) \cos^2 x = \frac{1}{2}$$

**Correction:** a)  $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ssi  $\cos x = \cos \frac{\pi}{4}$

Donc les solutions de l'équation dans  $\mathbb{R}$  sont :  $S_{\mathbb{R}} = \left\{ \frac{\pi}{4} + 2k\pi; -\frac{\pi}{4} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$

b)  $\cos x = -\frac{1}{2}$ ssi  $\cos x = -\cos \frac{\pi}{3}$ ssi  $\cos x = \cos \left( \pi - \frac{\pi}{3} \right)$ ssi  $\cos x = \cos \left( \frac{2\pi}{3} \right)$

Donc les solutions de l'équation dans  $\mathbb{R}$  sont :  $S_{\mathbb{R}} = \left\{ \frac{2\pi}{3} + 2k\pi; -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$

c)

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos^2 x - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow \left( \cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \left( \cos x + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ou } \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos \frac{\pi}{4} \text{ ou } \cos x = \cos \frac{3\pi}{4}$$

$$\text{Ainsi : } S_{\mathbb{R}} = \left\{ \frac{\pi}{4} + 2k\pi; -\frac{\pi}{4} + 2k\pi; \frac{3\pi}{4} + 2k\pi; -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi \right\} \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

## 1) Equation: $\sin x = a$

**Propriété:** Soit  $a$  un nombre réel.

Si  $a > 1$  ou  $a < -1$  alors l'équation  $\sin x = a$  n'admet pas de solution dans  $\mathbb{R}$  et on a :  $S_{\mathbb{R}} = \emptyset$ .

Si  $a = -1$  alors on a l'équation  $\sin x = -1$ . On sait  $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$  donc les solutions dans  $\mathbb{R}$  de

l'équation sont :  $S_{\mathbb{R}} = \left\{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$ .

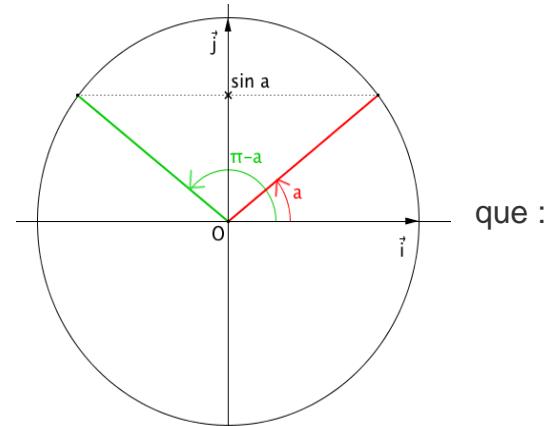
Si  $a = 1$  alors on a l'équation :  $\sin x = 1$ . On sait

$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$  donc on a :  $S_{\mathbb{R}} = \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$ .

Si  $-1 < a < 1$  réels alors on a l'équation  $\sin x = a$  :

Et on sait qu'il existe un unique réel  $\alpha$  dans  $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$  tel que  $\sin x = \sin \alpha$  et alors on

a :  $S_{\mathbb{R}} = \{\alpha + 2k\pi; \pi - \alpha + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$ .



que :

que :

**Exemple :** Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations suivantes :

$$a) \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad b) \sin x = -\frac{1}{2} \quad c) \sin^2 x = \frac{1}{2}$$

**Correction:** a)  $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ssi  $\sin x = \sin \frac{\pi}{3}$

Donc les solutions de l'équation dans  $\mathbb{R}$  sont :  $S_{\mathbb{R}} = \left\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi; \pi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$

$$S_{\mathbb{R}} = \left\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi; \frac{2\pi}{3} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$$

$$b) \sin x = -\frac{1}{2} \quad \text{ssi} \quad \sin x = -\sin \frac{\pi}{6} \quad \text{ssi} \quad \sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

L'équation a pour solution  $-\frac{\pi}{6} + 2k\pi$  et  $\pi - \left(-\frac{\pi}{6}\right) + 2k\pi = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$  où  $k \in \mathbb{Z}$

Donc les solutions de l'équation dans  $\mathbb{R}$  sont :  $S_{\mathbb{R}} = \left\{-\frac{\pi}{6} + 2k\pi; \frac{7\pi}{6} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$

c)

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow \left(\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\sin x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{ou} \quad \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin \frac{\pi}{4} \quad \text{ou} \quad \sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\text{Ainsi : } S_{\mathbb{R}} = \left\{\frac{\pi}{4} + 2k\pi; -\frac{\pi}{4} + 2k\pi; \frac{5\pi}{4} + 2k\pi; \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \right\} \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z}$$

## EXERCICE

Résoudre dans  $[-\pi, \pi]$  l'équation  $\cos 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Étape 1 : utiliser le cercle trigonométrique et/ou le tableau de valeurs remarquables afin de

retrouver une valeur dont le cosinus vaut  $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Le cosinus se lit sur l'axe des abscisses

on peut dire que  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  est le cosinus de  $\frac{\pi}{6}$  par exemple.

Étape 2 : Utiliser ce résultat pour écrire l'équation proposée sous la forme "  $\cos U = \cos V$ "

$\cos 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$  ssi  $\cos 2x = \cos \frac{\pi}{6}$  On applique alors la propriété

Donc on a :  $2x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$  ou  $2x = -\frac{\pi}{6} + 2k'\pi$

Je divise par 2 chaque membre de chaque égalité, j'obtiens :

$$x = \frac{\pi}{12} + k\pi \text{ ou } x = -\frac{\pi}{12} + k'\pi \text{ avec } k \text{ et } k' \text{ dans } \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{12} + k\pi \text{ ou } x = -\frac{\pi}{12} + k'\pi$$

• Étape 3

Mais il ne va falloir garder que les valeurs de  $x$  dans l'intervalle imposé c'est à dire dans  $]-\pi, \pi]$  on a deux méthodes soit encadrement ou on donnant des valeurs à  $k$

Pour la première série de valeurs :  $x = \frac{\pi}{12} + k\pi$  avec  $k$  dans  $\mathbb{Z}$

Prenons par exemple la valeur  $k = -2$  et remplaçons : on obtient  $x = \frac{\pi}{12} - 2\pi$  ; cette valeur n'appartient pas à  $]-\pi, \pi]$  ; il est donc évident que des valeurs de  $k$  inférieures à -2 ne conviendront pas non plus.

Par contre, si je choisis  $k = -1$  : on obtient  $x = \frac{\pi}{12} - \pi$  ; cette valeur appartient à  $]-\pi, \pi]$ .

Il s'agit donc de trouver toutes les valeurs de  $k$  telles que les solutions trouvées appartiennent bien à l'intervalle imposé, en appliquant cette démarche de manière systématique.

pour  $k = -1$   $x_1 = \frac{\pi}{12} - \pi = -\frac{11\pi}{12}$  convient car appartient à  $]-\pi, \pi]$

pour  $k = 0$   $x_2 = \frac{\pi}{12}$  convient car appartient à  $]-\pi, \pi]$

pour  $k = 1$   $x = \frac{\pi}{12} + \pi = \frac{13\pi}{12}$  ne convient pas car n'appartient pas à  $]-\pi, \pi]$

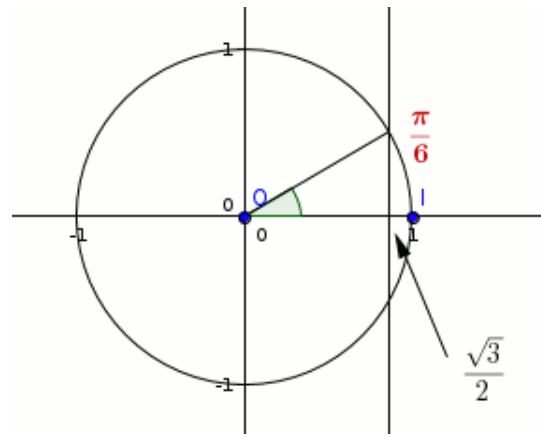
Il est inutile de poursuivre pour la première série de valeur (car si pour  $k = 1$ , la valeur trouvée n'appartient plus à l'intervalle, il en sera de même *a fortiori* pour des valeurs supérieures de  $k$ ) Faisons de même pour la deuxième série de valeurs

$x = -\frac{\pi}{12} + k'\pi$  avec  $k'$  dans  $\mathbb{Z}$

pour  $k' = -1$   $x = -\frac{\pi}{12} - \pi = -\frac{13\pi}{12}$  ne convient pas car n'appartient pas à  $]-\pi, \pi]$

pour  $k' = 0$   $x_3 = -\frac{\pi}{12}$  convient car appartient à  $]-\pi, \pi]$

pour  $k' = 1$   $x = -\frac{\pi}{12} + \pi = \frac{11\pi}{12}$  convient pas car appartient à  $]-\pi, \pi]$



pour  $k' = 2$   $x = -\frac{\pi}{12} + 2\pi$  ne convient pas car n'appartient pas à  $]-\pi, \pi]$

**Donc L'ensemble solution de l'équation dans  $]-\pi, \pi]$  est donc:**  $S = \left\{ -\frac{11\pi}{12}, -\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{12}, \frac{11\pi}{12} \right\}$

### 3) Equation : $\tan x = a$

**Propriété :** Soit  $a$  un nombre réel.

L'équation  $\tan x = a$  est définie dans  $\mathbb{R}$  ssi  $x \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}$  avec  $k$  un nombre relatif

Donc  $D = \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$

Dans  $D$  il existe un unique réel :  $\alpha$  dans  $\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$  tel que  $\tan x = \tan \alpha$  et alors on a :

$$S_{\mathbb{R}} = \{ \alpha + k\pi / k \in \mathbb{Z} \} .$$

### EXERCICE

1) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équations suivantes :  $4 \tan x + 4 = 0$

2) Résoudre dans  $\left[ -\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{2} \right]$  l'équations suivantes :  $2\sqrt{2} \sin x + 2 = 0$

**Correction:** 1) on a  $4 \tan x + 4 = 0$  est définie dans  $\mathbb{R}$  ssi  $x \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}$  avec  $k$  un

nombre relatif Donc  $D = \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$

$$4 \tan x + 4 = 0 \quad \text{ssi} \quad \tan x = -1 \quad \text{ssi} \quad \tan x = -\tan \frac{\pi}{4} \quad \text{ssi} \quad \tan x = \tan \left( -\frac{\pi}{4} \right)$$

Donc les solutions de l'équation dans  $\mathbb{R}$  sont :  $S_{\mathbb{R}} = \left\{ -\frac{\pi}{4} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$

$$2) 2\sqrt{2} \sin x + 2 = 0 \quad \text{ssi} \quad \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{ssi} \quad \sin x = -\sin \frac{\pi}{4}$$

L'équation a pour solution  $-\frac{\pi}{4} + 2k\pi$  et  $\pi - \left( -\frac{\pi}{4} \right) + 2k\pi = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$  où  $k \in \mathbb{Z}$

- Encadrement de  $-\frac{\pi}{4} + 2k\pi$  :  $-\frac{\pi}{2} \leq -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \leq \frac{5\pi}{2}$  et  $k \in \mathbb{Z}$

$$\text{Donc } -\frac{1}{2} \leq -\frac{1}{4} + 2k \leq \frac{5}{2} \quad \text{Donc } -\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \leq 2k \leq \frac{5}{2} + \frac{1}{4}$$

$$\text{Donc } -\frac{1}{8} \leq k \leq \frac{11}{8} \quad \text{Donc } -0,12 \leq k \leq 1,37 \text{ et } k \in \mathbb{Z}$$

Donc  $k = 0$  ou  $k = 1$

$$\text{Pour } k = 0 \text{ on trouve } x_1 = -\frac{\pi}{4} + 2 \times 0\pi = -\frac{\pi}{4}$$

$$\text{Pour } k = 1 \text{ on trouve } x_2 = -\frac{\pi}{4} + 2 \times 1\pi = \frac{7\pi}{4}$$

- Encadrement de  $\frac{5\pi}{4} + 2k\pi$  :  $-\frac{\pi}{2} \leq \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \leq \frac{5\pi}{2}$  et  $k \in \mathbb{Z}$

$$\text{Donc } -\frac{1}{2} \leq \frac{5}{4} + 2k \leq \frac{5}{2} \quad \text{Donc } -\frac{1}{2} - \frac{5}{4} \leq 2k \leq \frac{5}{2} - \frac{5}{4}$$

Donc  $-\frac{7}{8} \leq k \leq \frac{5}{8}$  Donc  $-0,8 \leq k \leq 0,6$  et  $k \in \mathbb{Z}$

Donc  $k=0$

Pour  $k=0$  on trouve  $x_3 = \frac{5\pi}{4} + 2 \times 0\pi = \frac{5\pi}{4}$

Donc  $S = \left\{-\frac{\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}\right\}$

## EXERCICE

1) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équations suivantes :  $\cos 2x = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

2) Résoudre dans  $[0; \pi]$  l'équations suivantes :  $\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$

3) Résoudre dans  $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$  l'équations suivantes :  $\tan\left(2x - \frac{\pi}{5}\right) = 1$

**Correction:** 1) on a  $\cos 2x = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$  ssi  $2x = x - \frac{\pi}{3} + 2k\pi$  ou  $2x = -\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 2k\pi$

Ssi  $2x - x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$  ou  $2x + x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$  Ssi  $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$  ou  $x = \frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}$  et  $k \in \mathbb{Z}$

$$S_{\mathbb{R}} = \left\{-\frac{\pi}{3} + 2k\pi; \frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3} / k \in \mathbb{Z}\right\}$$

2) on a  $\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$  ssi  $2x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4} - x + 2k\pi$  ou  $2x - \frac{\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{4} + x + 2k\pi$

sси  $3x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} + 2k\pi$  ou  $x = \pi - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} + 2k\pi$

Donc  $x = \frac{7\pi}{36} + \frac{2k\pi}{3}$  ou  $x = \frac{13\pi}{12} + 2k\pi$

- Encadrement de  $\frac{7\pi}{36} + \frac{2k\pi}{3}$  :  $0 \leq \frac{7\pi}{36} + \frac{2k\pi}{3} \leq \pi$  et  $k \in \mathbb{Z}$

Donc  $0 \leq \frac{7}{36} + \frac{2k}{3} \leq 1$  Donc  $-\frac{7}{24} \leq k \leq \frac{29}{36}$  Donc  $-0,29 \leq k \leq 1,2$  et  $k \in \mathbb{Z}$

Donc  $k=0$  ou  $k=1$

Pour  $k=0$  on trouve  $x_1 = \frac{7\pi}{36}$

Pour  $k=1$  on trouve  $x_2 = \frac{7\pi}{36} + \frac{2\pi}{3} = \frac{31\pi}{36}$

- Encadrement de  $x = \frac{13\pi}{12} + 2k\pi$   $0 \leq \frac{13\pi}{12} + 2k\pi \leq \pi$  et  $k \in \mathbb{Z}$

Donc  $0 \leq \frac{13}{12} + 2k \leq 1$  Donc  $-\frac{13}{24} \leq k \leq -\frac{1}{24}$  Donc  $-0,54 \leq k \leq 0,04$  et  $k \in \mathbb{Z}$

Donc  $k$  n'existe pas

- Donc  $S_{[0,\pi]} = \left\{\frac{7\pi}{36}, \frac{31\pi}{36}\right\}$

3) on a  $\tan\left(2x - \frac{\pi}{5}\right) = 1$  est définie ssi  $2x - \frac{\pi}{5} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$  ssi  $2x \neq \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{5} + k\pi$

sси  $2x \neq \frac{7\pi}{10} + k\pi$  ssi  $x \neq \frac{7\pi}{20} + \frac{k\pi}{2}$  Donc  $D = \mathbb{R} - \left\{\frac{7\pi}{20} + \frac{k\pi}{2} ; k \in \mathbb{Z}\right\}$

or on sait que :  $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$  Donc  $\tan\left(2x-\frac{\pi}{5}\right)=\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)$

$$\text{Donc } 2x-\frac{\pi}{5}=\frac{\pi}{4}+k\pi \text{ ssi } 2x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{5}+k\pi \text{ ssi } 2x=\frac{9\pi}{20}+k\pi \text{ ssi } x=\frac{9\pi}{40}+\frac{k\pi}{2}$$

Encadrement de  $\frac{9\pi}{40}+\frac{k\pi}{2}$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \frac{9\pi}{40}+\frac{k\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2} \text{ et } k \in \mathbb{Z} \quad \text{donc } -\frac{1}{2} \leq \frac{9}{40}+\frac{k}{2} \leq \frac{1}{2} \text{ donc } -\frac{29}{40} \leq k \leq \frac{11}{40}$$

$$\text{donc } -\frac{29}{40} \leq k \leq \frac{11}{40} \text{ donc } -\frac{29}{20} \leq k \leq \frac{11}{20} \text{ Donc } -1,45 \leq k \leq 0,55 \text{ et } k \in \mathbb{Z}$$

Donc  $k=0$  ou  $k=-1$

$$\text{Pour } k=0 \text{ on trouve } x_1 = \frac{9\pi}{40}$$

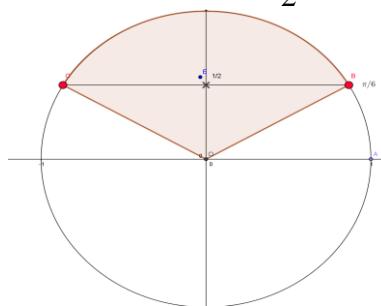
$$\text{Pour } k=-1 \text{ on trouve } x_2 = \frac{9\pi}{40} - \frac{\pi}{2} = -\frac{11\pi}{40} \quad \text{Donc } S = \left\{-\frac{11\pi}{40}; \frac{9\pi}{40}\right\}$$

## II) les inéquations trigonométriques élémentaires

**Exemple1 :** Résoudre dans  $[0, 2\pi[$  l'inéquation suivante :  $\sin x \geq \frac{1}{2}$

$$\sin x \geq \frac{1}{2} \text{ ssi } \sin x \geq \sin \frac{\pi}{6}$$

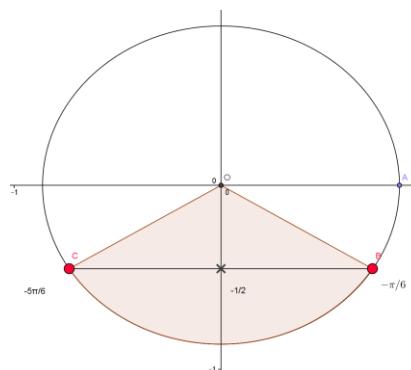
$$\text{donc } S = \left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right]$$



**Exemple2 :** Résoudre dans  $]-\pi, \pi]$  l'inéquation suivante :  $\sin x \leq -\frac{1}{2}$

$$\sin x \leq -\frac{1}{2} \text{ ssi } \sin x \leq \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\text{donc } S = \left[-\frac{5\pi}{6}; -\frac{\pi}{6}\right]$$



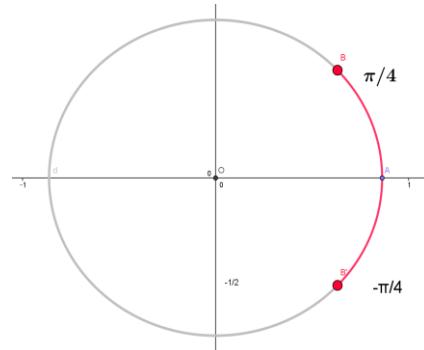
**Exemple3 :**

Résoudre dans  $]-\pi, \pi]$  l'inéquation suivante :

$$\cos x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos x \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ssi } \cos x \geq \cos \frac{\pi}{4}$$

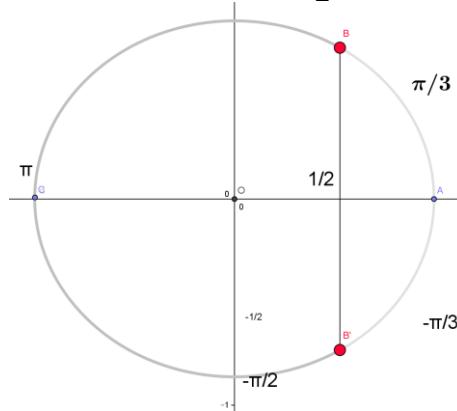
$$\text{donc } S = \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$$



**Exemple4 :** Résoudre dans  $\left]-\frac{\pi}{2}, \pi\right]$  l'inéquation suivante :  $\cos x \leq \frac{1}{2}$

$$\cos x \leq \frac{1}{2} \text{ ssi } \cos x \leq \cos \frac{\pi}{3}$$

$$\text{Donc } S = \left]-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{\pi}{3}, \pi\right]$$



**Exemple5 :** Résoudre dans  $]-\pi, \pi]$  les inéquations suivantes : 1)  $\cos x \leq 0$  2)  $\sin x \geq 0$

$$1) S = \left]-\pi, -\frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$$

$$2) S = [0, \pi]$$

**Exemple6 :** Résoudre dans  $S = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$  l'inéquation suivante :  $\tan x \geq 1$

$$S = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$$

**Exemple7 :** Résoudre dans  $[0 ; 2\pi]$  l'inéquation suivante :  $\sin x > -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\text{On sait que : } \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ et } \sin\left(\frac{7\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

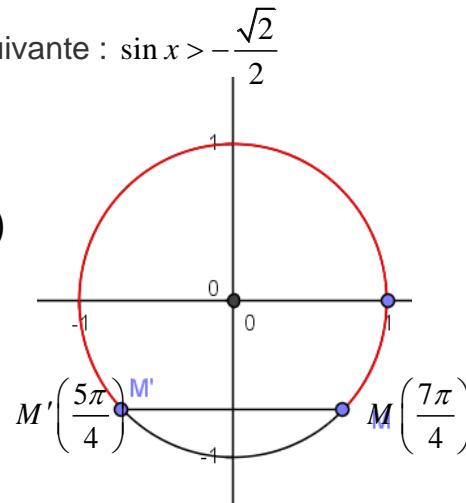
L'arc  $MM'$  en rouge correspond à tous les points  $M(x)$

$$\text{tq } x \text{ vérifie } \sin x > -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Donc

$$\sin x \geq \frac{1}{2} \text{ ssi } \sin x \geq \sin \frac{\pi}{6}$$

$$\text{donc } S = \left[0; \frac{5\pi}{4}\right[ \cup \left]\frac{7\pi}{4}; 2\pi\right]$$



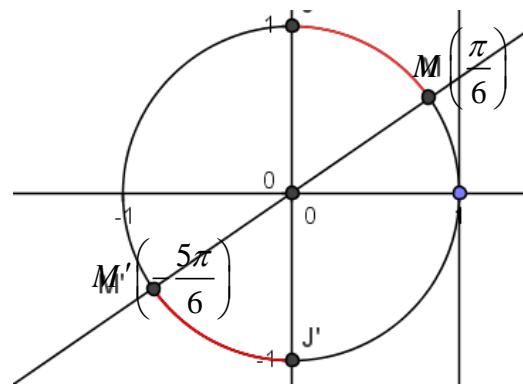
**Exemple8 :** Résoudre dans  $[-\pi ; \pi]$  l'inéquation suivante :  $3\tan x - \sqrt{3} \geq 0$

$$\text{On a } 3\tan x - \sqrt{3} \geq 0 \text{ ssi } \tan x \geq \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{On sait que : } \tan \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Les arcs  $MJ$  et  $M'J'$  en rouge correspondent à tous les points  $M(x)$  tq  $x$  vérifie  $3\tan x - \sqrt{3} \geq 0$ . Donc

$$S = \left[-\frac{5\pi}{6}; -\frac{\pi}{2}\right[ \cup \left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right[$$



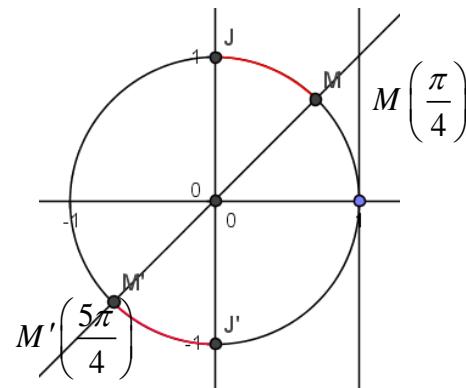
**Exemple9 :** Résoudre dans  $[0; 2\pi]$  l'inéquation suivante :  $\tan x - 1 \geq 0$

On a  $\tan x - 1 \geq 0$  ssi  $\tan x \geq 1$

On sait que :  $\tan \frac{\pi}{4} = 1$

Les arcs  $MJ$  et  $M'J'$  en rouge correspondent à tous les points  $M(x)$  tq  $x$  vérifie  $\tan x \geq 1$ . Donc

$$S = \left[ \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2} \right] \cup \left[ \frac{5\pi}{4}; \frac{3\pi}{2} \right]$$



**Activités :** 1) a) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équations suivantes :  $2\sin^2 x - 9\sin x - 5 = 0$  et en déduire les solutions dans  $[0; 2\pi]$

b) résoudre dans  $[0; 2\pi]$  l'inéquation suivante :  $2\sin^2 x - 9\sin x - 5 \leq 0$

2) Résoudre dans  $[0; \pi]$  l'inéquation suivante :  $(2\cos x - 1)(\tan x + 1) \geq 0$

**Correction:** 1) a) on pose  $t = \sin x$

$$2\sin^2 x - 9\sin x - 5 \leq 0 \text{ ssi } 2t^2 - 9t - 5 \leq 0$$

On cherche les racines du trinôme  $2t^2 - 9t - 5$ :

$$\text{Calcul du discriminant : } \Delta = (-9)^2 - 4 \times 2 \times (-5) = 121$$

$$\text{Les racines sont : } t_1 = \frac{9 - \sqrt{121}}{2 \times 2} = -\frac{1}{2} \text{ et } t_2 = \frac{9 + \sqrt{121}}{2 \times 2} = 5 \text{ Donc } \sin x = -\frac{1}{2} \text{ et } \sin x = 5$$

Or on sait que  $-1 \leq \sin x \leq 1$  donc l'équation  $\sin x = 5$  n'admet pas de solutions dans  $\mathbb{R}$

$$\sin x = -\frac{1}{2} \text{ ssi } \sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \text{ ssi } x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \pi - \left(-\frac{\pi}{6}\right) + 2k\pi$$

$$\text{ssi } x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \text{ et } k \in \mathbb{Z}$$

$$S_{\mathbb{R}} = \left\{ -\frac{\pi}{6} + 2k\pi; \frac{7\pi}{6} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$$

- Encadrement de  $-\frac{\pi}{6} + 2k\pi$  :  $0 \leq -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq 2\pi$  et  $k \in \mathbb{Z}$

$$\text{Donc } 0 \leq -\frac{1}{6} + 2k \leq 2 \quad \text{Donc } \frac{1}{12} \leq k \leq \frac{13}{12} \quad \text{Donc } 0,08 \leq k \leq 1,02 \text{ et } k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Donc } k = 1$$

$$\text{Pour } k = 1 \text{ on remplace on trouve } x_1 = -\frac{\pi}{6} + 2\pi = \frac{11\pi}{6}$$

- Encadrement de  $\frac{7\pi}{6} + 2k\pi$  :  $0 \leq \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \leq 2\pi$  et  $k \in \mathbb{Z}$

$$\text{Donc } 0 \leq \frac{7}{6} + 2k \leq 2 \quad \text{Donc } -\frac{7}{12} \leq k \leq \frac{5}{12} \quad \text{Donc } -0,5 \leq k \leq 0,41 \text{ et } k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Donc } k = 0 \text{ on remplace on trouve } x_2 = \frac{7\pi}{6}$$

$$\text{Donc } S_{[0; 2\pi]} = \left\{ \frac{11\pi}{6}; \frac{7\pi}{6} \right\}$$

$$1) b) 2\sin^2 x - 9\sin x - 5 \leq 0 \text{ ssi } 2\left(\sin x + \frac{1}{2}\right)(\sin x - 5) \leq 0$$

Or on sait que  $-1 \leq \sin x \leq 1$  donc  $-1 \leq \sin x \leq 1 < 5$  Donc  $\sin x - 5 < 0$

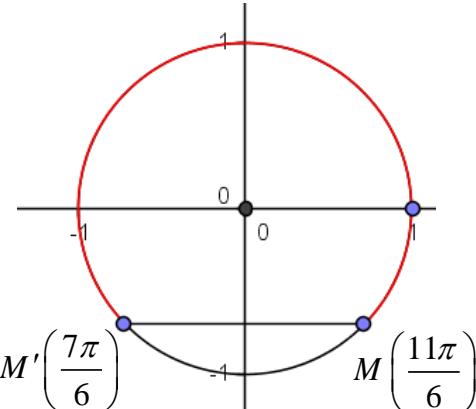
Puisque  $\sin x - 5 < 0$  et  $2 > 0$  alors  $2\left(\sin x + \frac{1}{2}\right)(\sin x - 5) \leq 0$  ssi  $\sin x + \frac{1}{2} \geq 0$

ssi  $\sin x \geq -\frac{1}{2}$  ssi  $\sin x \geq \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

L'arc en rouge correspond à tous les points  $M(x)$

tq  $x$  vérifie  $\sin x \geq -\frac{1}{2}$

$$\text{donc } S = \left[0; \frac{7\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{11\pi}{6}; 2\pi\right]$$

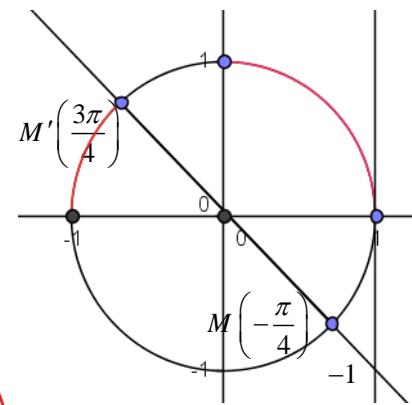
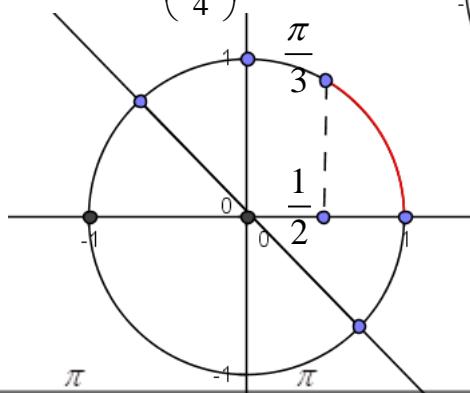


2) l'inéquation  $(2\cos x - 1)(\tan x + 1) \geq 0$  est définie dans  $[0; \pi]$  ssi  $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

$$\text{Donc } D = [0; \pi] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$$

$2\cos x - 1 \geq 0$  ssi  $\cos x = \frac{1}{2}$  ssi  $\cos x \geq \cos \frac{\pi}{3}$

$\tan x + 1 \geq 0$  ssi  $\tan x \geq -1$  ssi  $\tan x \geq \tan\left(\frac{3\pi}{4}\right)$



$x$	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\pi$
$2\cos x - 1$	+	0	-	-	-
$\tan x + 1$	+		+		+
$(2\cos x - 1)(\tan x + 1)$	+		-	+	-

$$\text{donc } S = \left[0; \frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4}\right]$$