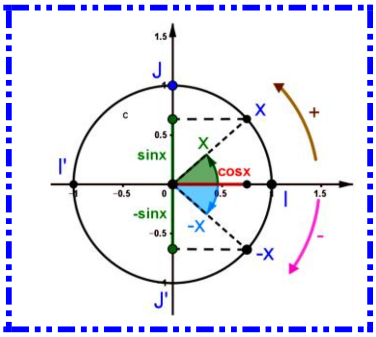
VI. Relations entre les angles :

a. Angles opposés : (x et –x)

$$\sin(-x) = -\sin x$$

$$\cos(-x) = \cos x$$

$$\tan(-x) = -\tan x$$

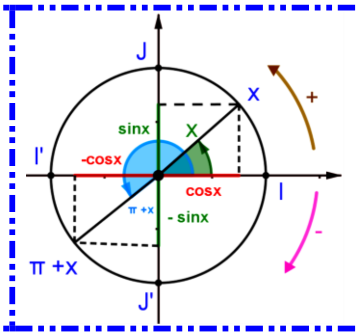


b. Angles supplémentaires : ($\pi - x$ et x)

$$\sin(\pi - x) = \sin x$$

$$\cos(\pi - x) = -\cos x$$

$$\tan(\pi - x) = -\tan x$$

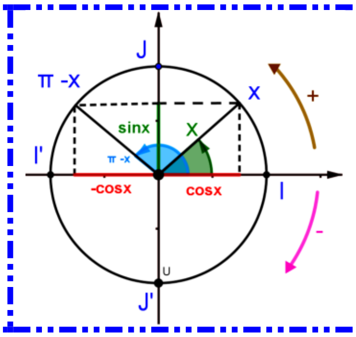


Angles opposés supplémentaires : ($\pi + x$ et x)

$$\sin(\pi + x) = -\sin x$$

$$\cos(\pi + x) = -\cos x$$

$$\tan(\pi + x) = \tan x$$

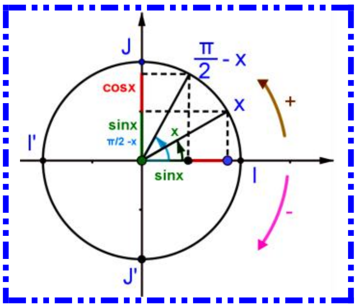


c. Angles complémentaires : ($\frac{\pi}{2} - x$ et x)

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{\tan x}$$

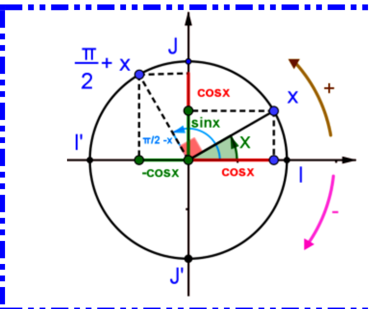


Angles opposés complémentaires : ($\frac{\pi}{2} - x$ et x)

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \frac{-1}{\tan x}$$



d. Résumer des formules précédentes :

	$-x$	$\pi - x$	$\pi + x$	$\frac{\pi}{2} - x$	$\frac{\pi}{2} + x$
sin ↗	$-\sin x$	$\sin x$	$-\sin x$	$\cos x$	$\cos x$
cos ↗	$\cos x$	$-\cos x$	$-\cos x$	$\sin x$	$-\sin x$
tan ↗	$-\tan x$	$-\tan x$	$\tan x$	$\frac{1}{\tan x}$	$\frac{-1}{\tan x}$

VII. EQUATIONS TRIGONOM2TRIQUES :

Remarque :

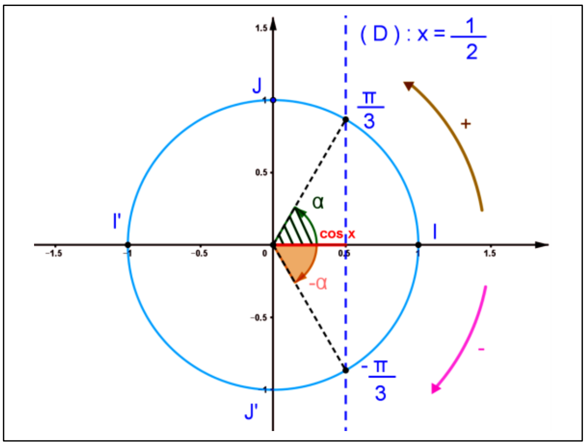
- le plan (P) est rapporté a un repère orthonormé direct $(0, \vec{i}, \vec{j})$.

- (C) est le cercle trigonométrique d'origine I lié au repère $(0,\vec{i},\vec{j})$ tel que $\overrightarrow{OI}=\vec{i}$ et $\overrightarrow{OJ}=\vec{j}$ et $\overrightarrow{OI'}=-\vec{i}$ et $\overrightarrow{OJ'}=-\vec{j}$.

A. Equations de la forme $x\in\mathbb{R}$: $\cos x=a$; $(a\in\mathbb{R})$:

a. Activité :

1. Construire sur le cercle les points M de (C) tel que $\cos\left(\vec{i},\overrightarrow{OM}\right)=\frac{1}{2}$.
2. Déterminer pour chaque cas les abscisses curvilignes de M .
3. Déterminer pour chaque cas les mesures de l'angle orienté $\left(\vec{i},\overrightarrow{OM}\right)$.
4. Que peut-on dire pour M de (C) tel que $\cos\left(\vec{i},\overrightarrow{OM}\right)=3$?



b. Conséquence :

$\cos x=\frac{1}{2}$ équivaut à $\cos x=\cos\frac{\pi}{3}=\cos\frac{-\pi}{3}$

équivaut à $\begin{cases} x=\frac{\pi}{3}+2k\pi \\ \text{ou} \\ x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi \end{cases}$

d'où l'ensemble des solutions de l'équation (E) est $S=\left\{x\in\mathbb{R} / x=\frac{\pi}{3}+2k\pi\ ,\ x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi\ /\ k\in\mathbb{Z}\right\}$.

c. Propriété :

Soit x de $\mathbb{R}$ et a un réel donné .

L'équation : $x\in\mathbb{R}$: $\cos x=a$; $(a\in\mathbb{R})$ a pour solutions :

1^er cas : $a\in\left]-\infty,-1\right[\cup\left]1,+\infty\right[$ l'équation n'a pas de solution d'où $S=\varnothing$ (ensemble des solutions)

2^ième cas : $a\in[-1,1]$ on a : $\cos x=a$ on cherche α de $\mathbb{R}$ tel que $a=\cos\alpha$ d'où :

$\cos x=a$ équivaut à $\cos x=\cos\alpha$

équivaut à $\begin{cases} x=\alpha+2k\pi \\ \text{ou} \\ x=-\alpha+2k\pi \end{cases}$; $k\in\mathbb{Z}$

ensemble des solutions de l'équation (E) est $S=\{x\in\mathbb{R} / x=\alpha+2k\pi\ ,\ x=-\alpha+2k\pi\ /\ k\in\mathbb{Z}\}$.

Cas particulier :

- ✓ $a=0$ ensemble des solutions de l'équation (E) est : $s=\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi / k\in\mathbb{Z}\right\}$.
- ✓ $a=1$ ensemble des solutions de l'équation (E) est : $s=\{2k\pi / k\in\mathbb{Z}\}$.
- ✓ $a=-1$ ensemble des solutions de l'équation (E) est : $s=\{\pi+2k\pi / k\in\mathbb{Z}\}$.

d. Exercice :

Résoudre l'équation suivante :

1. $(E_1): x \in \mathbb{R} / \cos x = \cos\frac{\pi}{4}$.
2. $(E_2): x \in \mathbb{R} / \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
3. $(E_3): x \in \mathbb{R} / \cos(2x) = -\frac{1}{2}$.

B. Equations de la forme $x \in \mathbb{R} : \sin x = a$; $(a \in \mathbb{R})$:

a. Activité :

5. Construire sur le cercle les points M de (C) tel que $\sin\left(\vec{i},\overrightarrow{OM}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
6. Déterminer pour chaque cas les abscisses curvilignes de M .
7. Déterminer pour chaque cas les mesures de l'angle orienté $\left(\vec{i},\overrightarrow{OM}\right)$.
8. Que peut-on dire pour M de (C) tel que $\sin\left(\vec{i},\overrightarrow{OM}\right) = -5$?

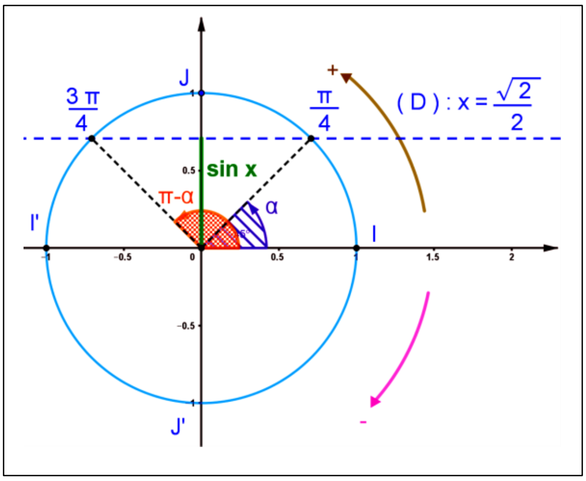
b. Conséquence :

$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ équivaut à $\sin x = \sin\frac{\pi}{4} = \sin\frac{3\pi}{4}$; $\left(\frac{3\pi}{4} = \pi - \frac{\pi}{4}\right)$

$$\text{équivaut à } \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = \pi - \frac{\pi}{4} + 2k\pi = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \end{cases} ; \ k \in \mathbb{Z}$$

d'où l'ensemble des solutions de l'équation (E) est

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} / x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \ , \ x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \ / \ k \in \mathbb{Z}\right\}.$$



c. Propriété :

Soit x de $\mathbb{R}$ et a un réel donné .

L'équation : $x \in \mathbb{R} : \cos x = a$; $(a \in \mathbb{R})$ a pour solutions :

1^er cas : $a \in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$ l'équation n'a pas de solution d'où $S = \varnothing$ (ensemble des solutions)

2^ième cas : $a \in [-1,1]$ on a : $\cos x = a$ on cherche α de $\mathbb{R}$ tel que $a = \sin\alpha$ d'où :

$\sin x = a$ équivaut à $\sin x = \sin\alpha$

$$\text{équivaut à } \begin{cases} x = \alpha + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = \pi - \alpha + 2k\pi \end{cases} ; k \in \mathbb{Z}$$

ensemble des solutions de l'équation (E) est $S = \{x \in \mathbb{R} / x = \alpha + 2k\pi \ , \ x = \pi - \alpha + 2k\pi \ / \ k \in \mathbb{Z}\}$.

d. Cas particulier :

- ✓ $a=0$ ensemble des solutions de l'équation (E) est : $s=\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi / k\in\mathbb{Z}\right\}$.
- ✓ $a=1$ ensemble des solutions de l'équation (E) est : $s=\{2k\pi / k\in\mathbb{Z}\}$.

$a=-1$ ensemble des solutions de l'équation (E) est : $s=\{\pi+2k\pi / k\in\mathbb{Z}\}$.

e. Exercice :

Résoudre l'équation suivante :

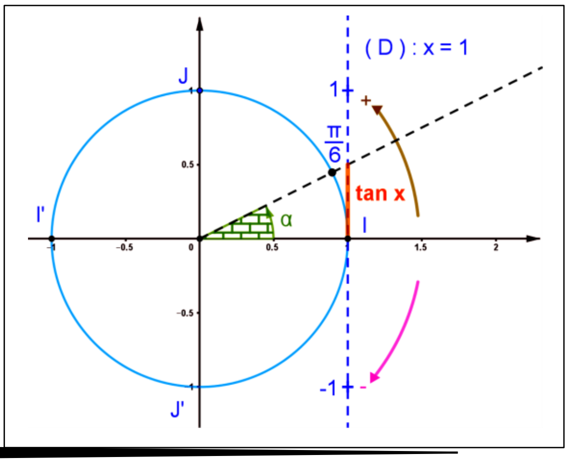
1. $(E_1): x\in\mathbb{R} / \sin x=-\frac{1}{2}$.
2. $(E_2): x\in\mathbb{R} / \sin x=1$.
3. $(E_3): x\in\mathbb{R} / \sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}$.
4. $(E_4): x\in\mathbb{R} / \sin x=\cos x$.

C. Equations de la forme $x\in\mathbb{R}$: $\tan x=a$; $(a\in\mathbb{R})$:

a. Activité :

- Il faut au départ déterminer l'ensemble de définition de l'inéquation $\left(x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi \ ,k\in\mathbb{Z}\right)$
- Soit la droite (T) tangente au cercle (C) en I , coupe la demi-droite $[OM)$ au point T (condition $M\neq J$ et $M\neq J'$).
- la droite (T) est muni du repère $(I,\vec{i})$

1. Déterminer la condition sur x pour tan(x) est définie .
2. Construire sur la droite (T) le point T tel que : $\tan\left(\overrightarrow{i},\overrightarrow{OT}\right)=\frac{1}{2}$.
3. Construire sur le cercle les points M intersection de la droite (OT) et le cercle (C) .
4. Déterminer pour chaque cas les abscisses curvilignes de M .
5. Peut-on écrire les abscisses curvilignes de M d'une façon simple ?
6. Déterminer les mesures de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{i},\overrightarrow{OM}\right)$.
7. Que peut-on dire pour M de (C) tel que $\tan\left(\overrightarrow{i},\overrightarrow{OM}\right)=-5$?



b. Conséquence :

Avec $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi \ ,k\in\mathbb{Z}$

$\tan x=\frac{1}{2}$ équivaut à $\tan x=\tan\frac{\pi}{6}=\tan\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)$

équivaut à $\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = \pi + \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \end{cases}$; $k \in \mathbb{Z}$

équivaut à $x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi \;/\; k \in \mathbb{Z}$

conclusion : d'où l'ensemble des solutions de l'équation (E) est $S = \left\{ x \in \mathbb{R} / x = \dfrac{\pi}{6} + k\pi \;/\; k \in \mathbb{Z} \right\}$.

c. Propriété :

Soit x de $\mathbb{R}$ et a un réel donné.

L'équation : $x \in \mathbb{R} : \tan x = a$; $(a \in \mathbb{R})$ a pour solutions :

Ensemble de définition de l'équation (E) est $\mathbb{R} \setminus \left\{ \dfrac{\pi}{2} + k\pi \,;\, k \in \mathbb{Z} \right\}$ (c.à.d. $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \,;\, k \in \mathbb{Z}$)

On a : $\tan x = a$ on cherche α de $\mathbb{R}$ tel que $a = \tan\alpha$ d'où :

$\tan x = a$ équivaut à $\tan x = \tan\alpha$

équivaut à $x = \alpha + 2k\pi \,;\, k \in \mathbb{Z}$

ensemble des solutions de l'équation (E) est $S = \{ x \in \mathbb{R} / x = \alpha + k\pi \;/\; k \in \mathbb{Z} \}$ avec $a = \tan\alpha$

d. Exercice :

Déterminer l'ensemble de définition de l'équation suivantes puis résoudre ces équations :

1. $(E_1) : x \in \mathbb{R} / \tan x = \sqrt{3}$.
2. $(E_2) : x \in \mathbb{R} / \tan x = 0$.
3. $(E_3) : x \in \mathbb{R} / \tan\left(2x + \dfrac{\pi}{4}\right) = -1$.

VIII. Inéquations trigonométriques dans K (avec K est un intervalle de $\mathbb{R}$:

A. $x \in K \,;\, \cos x \leq a$ ou $x \in K \,;\, \cos x < a$ ou $x \in K \,;\, \cos x \geq a$ ou $x \in K \,;\, \cos x > a$.

a. Remarques préliminaires :

- Il n'y a pas de règle générale.
- Nous allons toujours nous servir d'une illustration sur le cercle trigonométrique.
- On construit le cercle trigonométrique d'origine I (C) lié au repère orthonormé repère $(0, \vec{i}, \vec{j})$ tel que $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$ et $\overrightarrow{OJ} = \vec{j}$ et $\overrightarrow{OI'} = -\vec{i}$ et $\overrightarrow{OJ'} = -\vec{j}$.
- le premier tour de cercle à partir de son origine I dans le sens positif (antihoraire d'une montre) représente l'intervalle $[0, 2\pi[$ (intervalle fermée présente un tour du cercle et un point qui est I), le $2^{\text{ième}}$ tour représente l'intervalle $[2\pi, 4\pi[$ …etc.…

- premier tour de cercle à partir de son origine I dans le sens négatif (horaire d'une montre) représente l'intervalle $]-2\pi, 0]$ (intervalle fermée présente un tour du cercle et un point qui est I) , le 2ième tour représente l'intervalle $]-4\pi, -2\pi]$...etc....
- on trace la droite d'équation (D) : $x = a$ (parallèle à l'axe des ordonnées ou à l'axe de « sinus » .
- on trace la partie (S) du segment $[I', I]$ tel que leurs abscisses vérifient la condition suivante :
  - abscisses $\leq a$ pour l'inéquation $x \in K$; $\cos x \leq a$. abscisses $< a$ pour l'inéquation $x \in K$; $\cos x < a$.
  - abscisses $\geq a$ pour l'inéquation $x \in K$; $\cos x \geq a$. abscisses $> a$ pour l'inéquation $x \in K$; $\cos x > a$.
- On détermine tous les points $M_{(\alpha)}$ du cercle dont leurs projections appartiennent à (S) . (α abscisses curvilignes de M) .
- Finalement l'ensemble des solutions de l'inéquation c'est l'ensembles des α qui appartiennent à K .

Remarque : Pour certaines inéquations en utilise d'autres méthodes .

b. Exemple n° 1 :

1. Résoudre l'inéquation suivante : $(E_1) x \in [0, 2\pi]$; $\cos x \leq \frac{1}{2}$.
2. En déduit l'ensembles des solutions de l'inéquation suivante : $(E_2) x \in [0, 4\pi]$; $\cos x \leq \frac{1}{2}$.
3. En déduit l'ensembles des solutions de l'inéquation suivante : $(E_3) x \in [-2\pi, 0]$; $\cos x \leq \frac{1}{2}$.

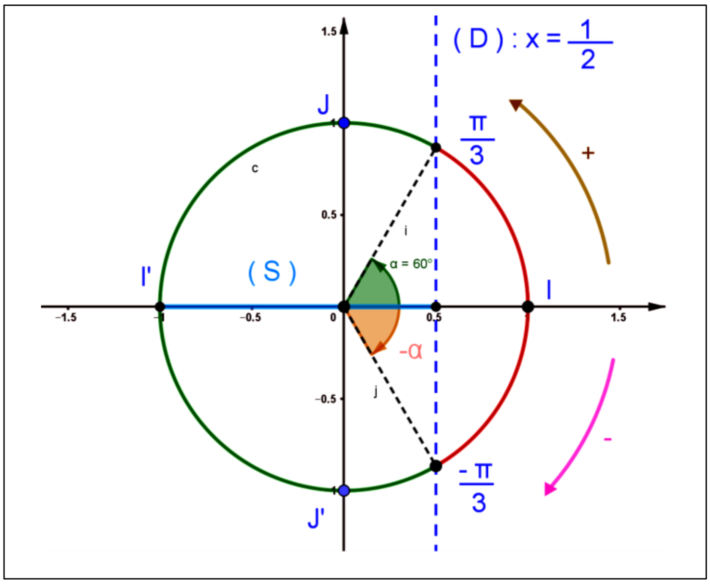
Correction :

1. On résout l'inéquation $(E_1) x \in [0, 2\pi]$; $\cos x \leq \frac{1}{2}$

✓ On construit le cercle trigonométrique d'origine I (C) lié au repère orthonormé repère $(0, \vec{i}, \vec{j})$.

✓ On construit la droite (D) : $x = \frac{1}{2}$ (parallèle à l'axe des ordonnées)

✓ On trace la partie (S) de $[I'I]$ (qui vérifie les abscisses $\leq \frac{1}{2}$) .



Conclusion :

1. L'ensemble des solutions de (E_1) est : $S_1 = \left[\frac{\pi}{3}, 2\pi - \frac{\pi}{3}\right] = \left[\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right]$

2. En déduit l'ensembles des solutions de l'inéquation (E_2) est $S_2 = \left[\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{\pi}{3} + 2\pi, \frac{5\pi}{3} + 2\pi\right] = \left[\frac{7\pi}{3}, \frac{11\pi}{3}\right]$

3. En déduit l'ensembles des solutions de l'inéquation (E_3) est :

$$S_3 = \left[\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{\pi}{3} - 2\pi, \frac{5\pi}{3} - 2\pi\right] = \left[\frac{-7\pi}{3}, \frac{-11\pi}{3}\right]$$

c. **Exemple n° 2 :**

1. Résoudre l'inéquation suivante : $(E_1) x \in [0, 2\pi]$; $\cos x > \frac{1}{2}$.
2. En déduit l'ensembles des solutions de l'inéquation suivante : $(E_2) x \in [0, 4\pi]$; $\cos x > \frac{1}{2}$.
3. En déduit l'ensembles des solutions de l'inéquation suivante : $(E_3) x \in [-2\pi, 0]$; $\cos x > \frac{1}{2}$.

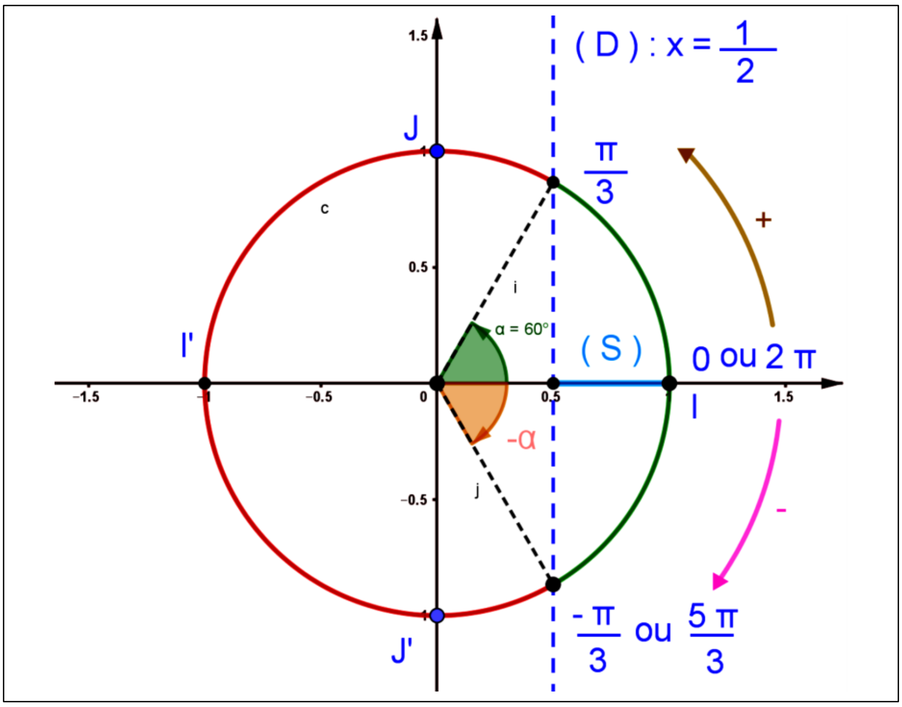
Correction :

1. On résout l'inéquation $(E_1) x \in [0, 2\pi]$; $\cos x > \frac{1}{2}$

✓ On construit le cercle trigonométrique d'origine I (C) lié au repère orthonormé repère $(0, \vec{i}, \vec{j})$.

✓ On construit la droite (D) : $x = \frac{1}{2}$ (parallèle à l'axe des ordonnées)

✓ On trace la partie (S) de $[I'I]$ (qui vérifie les abscisses $\leq \frac{1}{2}$) .



Conclusion :

1. L'ensemble des solutions de (E_1) est : $S_1 = \left]0,\frac{\pi}{3}\right[\cup \left]\frac{5\pi}{3},2\pi\right[$

2. En déduit l'ensembles des solutions de l'inéquation (E_2) est

$$S_2 = \left(\left]0,\frac{\pi}{3}\right[\cup \left]\frac{5\pi}{3},2\pi\right[\right) \cup \left(\left]0+2\pi,\frac{\pi}{3}+2\pi\right[\cup \left]\frac{5\pi}{3}+2\pi,2\pi+2\pi\right[\right)$$
$$= \left(\left]0,\frac{\pi}{3}\right[\cup \left]\frac{5\pi}{3},2\pi\right[\right) \cup \left(\left]2\pi,\frac{7\pi}{3}\right[\cup \left]\frac{11\pi}{3},4\pi\right[\right)$$

3. En déduit l'ensembles des solutions de l'inéquation (E_3) est :

$$S_3 = \left(\left]0-2\pi,\frac{\pi}{3}-2\pi\right[\cup \left]\frac{5\pi}{3}-2\pi,2\pi-2\pi\right[\right) = \left(\left]-2\pi,\frac{-5\pi}{3}\right[\cup \left]\frac{-\pi}{3},0\right[\right)$$

B. $x \in K$; $\sin x \le a$ ou $x \in K$; $\sin x < a$ ou $x \in K$; $\sin x \ge a$ ou $x \in K$; $\sin x > a$.

a. **Remarques préliminaires :**

- Il n'y a pas de règle générale .
- Nous allons toujours nous servir d'une illustration sur le cercle trigonométrique .
- On construit le cercle trigonométrique d'origine I (C) lié au repère orthonormé repère $(0,\vec{i},\vec{j})$ tel que $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$ et $\overrightarrow{OJ} = \vec{j}$ et $\overrightarrow{OI'} = -\vec{i}$ et $\overrightarrow{OJ'} = -\vec{j}$.
- le premier tour de cercle à partir de son origine I dans le sens positif (antihoraire d'une montre) représente l'intervalle $[0,2\pi[$ (intervalle fermée présente un tour du cercle et un point qui est I) , le $2^{\text{ième}}$ tour représente l'intervalle $[2\pi,4\pi[$ …etc.…
- premier tour de cercle à partir de son origine I dans le sens négatif (horaire d'une montre) représente l'intervalle $]-2\pi,0]$ (intervalle fermée présente un tour du cercle et un point qui est I) , le $2^{\text{ième}}$ tour représente l'intervalle $]-4\pi,-2\pi]$…etc.…
- on trace la droite d'équation $(\Delta) : y = a$ (parallèle à l'axe des ordonnées ou à l'axe de « cosinus » .
- on trace la partie (S') du segment $[J',J]$ tel que leurs ordonnées qui vérifient la condition suivante :

➢ ordonnées $\le a$ pour l'inéquation $x \in K$; $\cos x \le a$. ordonnées $< a$ pour l'inéquation $x \in K$; $\cos x < a$.
➢ ordonnées $\ge a$ pour l'inéquation $x \in K$; $\cos x \ge a$. ordonnées $> a$ pour l'inéquation $x \in K$; $\cos x > a$.

- On détermine tous les points $M_{(\alpha)}$ du cercle dont leurs projections appartiennent à (S') . (α abscisses curvilignes de M) .
- Finalement l'ensemble des solutions de l'inéquation c'est l'ensembles des α qui appartiennent à K .

- **Remarque :** Pour certaines inéquations en utilise d'autres méthodes .

b. **Exemple :**

1. Résoudre l'inéquation suivante : $(E_1)\, x \in [0,2\pi]$; $\sin x \le \frac{\sqrt{3}}{2}$.

2. En déduit l'ensembles des solutions de l'inéquation suivante : $(E_2)\, x \in [0,4\pi]$; $\sin x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$.

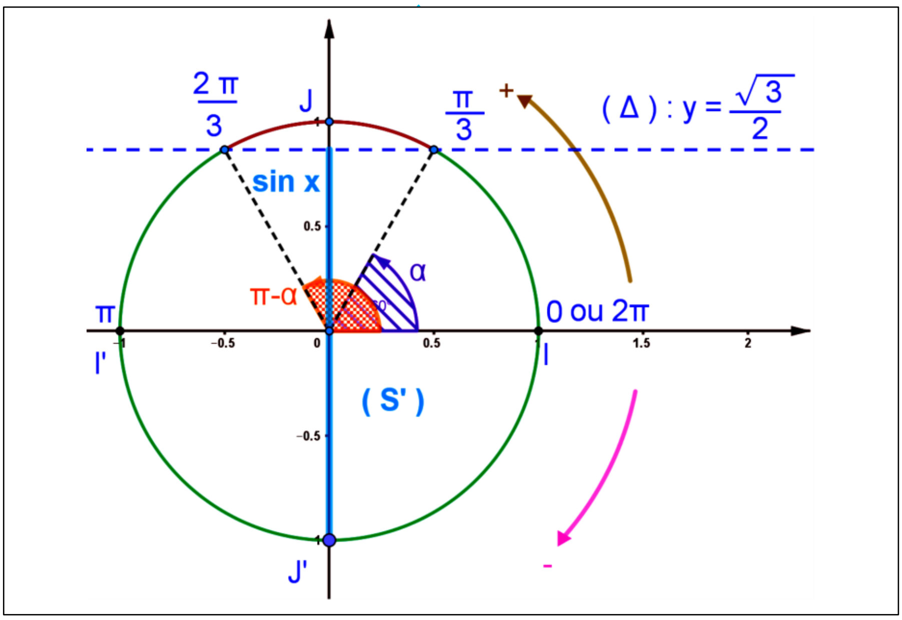
3. En déduit l'ensembles des solutions de l'inéquation suivante : $(E_3)\, x \in [-2\pi,0]$; $\sin x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$.

4. En déduit l'ensembles des solutions de l'inéquation suivante : $(E_4)\, x \in]-\pi,\pi[$; $\sin x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Correction :

1. On résout l'inéquation $(E_1)\, x \in [0,2\pi]$; $\sin x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$

- ✓ On construit le cercle trigonométrique d'origine I (C) lié au repère orthonormé repère $(0,\vec{i},\vec{j})$.
- ✓ On construit la droite (D) : $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (parallèle à l'axe des abscisses)
- ✓ On trace la partie (S') de $[J'J]$ (qui vérifie les ordonnées $\leq \frac{\sqrt{3}}{2}$).



Conclusion :

L'ensemble des solutions de (E_1) est : $S_1 = \left[0,\frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{2\pi}{3},2\pi\right]$

2. En déduit l'ensembles des solutions de l'inéquation (E_2) est

$$S_2 = \left(\left[0,\frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{2\pi}{3},2\pi\right]\right) \cup \left(\left[0+2\pi,\frac{\pi}{3}+2\pi\right] \cup \left[\frac{2\pi}{3}+2\pi,2\pi+2\pi\right]\right)$$

$$= \left(\left[0,\frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{2\pi}{3},2\pi\right]\right) \cup \left(\left[2\pi,\frac{7\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{8\pi}{3}\pi,4\pi\right]\right)$$

$$= \left[0,\frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{2\pi}{3},\frac{7\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{8\pi}{3}\pi,4\pi\right]$$

Conclusion : L'ensemble des solutions de (E_1) est : $S_2=\left[0,\frac{\pi}{3}\right]\cup\left[\frac{2\pi}{3},\frac{7\pi}{3}\right]\cup\left[\frac{8\pi}{3}\pi,4\pi\right]$.

3. En déduit l'ensembles des solutions de l'inéquation (E_3) est :

$$S_3=\left[0-2\pi,\frac{\pi}{3}-2\pi\right]\cup\left[\frac{2\pi}{3}-2\pi,2\pi-2\pi\right]=\left[-2\pi,\frac{-5\pi}{3}\right]\cup\left[\frac{-4\pi}{3},0\right].$$

Conclusion : L'ensemble des solutions de (E_1) est : $S_3=\left[-2\pi,\frac{-5\pi}{3}\right]\cup\left[\frac{-4\pi}{3},0\right]$.

4. En déduit l'ensembles des solutions de l'inéquation suivante : $(E_4)\, x\in\left]-\pi,\pi\right[\ ;\ \sin x\leq\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$$S_4=\left(S_1\cap[0,\pi[\right)\cup\left(S_3\cap\left]-\pi,0\right]\right)$$
$$=\left(\left[0,\frac{\pi}{3}\right]\cup\left[\frac{2\pi}{3},\pi\right[\right)\cup\left(\left]-\pi,0\right]\right)$$
$$=\left]-\pi,\frac{\pi}{3}\right]\cup\left[\frac{2\pi}{3},\pi\right[$$

Conclusion : L'ensemble des solutions de (E_1) est : $S_4=\left]-\pi,\frac{\pi}{3}\right]\cup\left[\frac{2\pi}{3},\pi\right[$.

C. $x\in K$; $\tan x\leq a$ ou $x\in K$; $\tan x<a$ ou $x\in K$; $\tan x\geq a$ ou $x\in K$; $\tan x>a$.

a. Remarques préliminaires :

- Il n'y a pas de règle générale .
- Nous allons toujours nous servir d'une illustration sur le cercle trigonométrique .
- On construit le cercle trigonométrique d'origine I (C) lié au repère orthonormé repère $(0,\vec{i},\vec{j})$ tel que $\overrightarrow{OI}=\vec{i}$ et $\overrightarrow{OJ}=\vec{j}$ et $\overrightarrow{OI'}=-\vec{i}$ et $\overrightarrow{OJ'}=-\vec{j}$.
- le premier demi-tour de cercle à partir de son origine I dans le sens positif (antihoraire d'une montre) représente l'intervalle $[0,\pi]$ (intervalle fermée présente un tour du cercle et un point qui est I) , le 3ième demi-tour représente l'intervalle $[2\pi,3\pi]$ ...etc....(car $\tan(\pi+x)=\tan x$)
- premier demi-tour de cercle à partir de son origine I dans le sens négatif (horaire d'une montre) représente l'intervalle $[-\pi,0]$ (intervalle fermée présente un tour du cercle et un point qui est I) , le 3ième demi-tour représente l'intervalle $[-4\pi,-3\pi]$ ...etc....
- on trace la droite (Δ_T) tangente au cercle au point I (parallèle à l'axe des ordonnées ou à l'axe de « sinus ») tel que la droite (Δ_T) est muni du repère $(I,\vec{j})$.
- on trace la partie (S_T) de la droite (Δ_T) tel que leurs abscisses (par rapport de la droite (Δ_T)) vérifient la condition suivante :

➢ abscisses $\leq a$ pour l'inéquation $x\in K$; $\cos x\leq a$. abscisses $<a$ pour l'inéquation $x\in K$; $\cos x<a$.
➢ abscisses $\geq a$ pour l'inéquation $x\in K$; $\cos x\geq a$. abscisses $>a$ pour l'inéquation $x\in K$; $\cos x>a$.

- On détermine tous les points $M_{(\alpha)}$ du cercle tel que la demi-droite $[OM)$ coupe la partie (S_T).

  (α abscisses curvilignes de M) . (on élimine J et J')
- Finalement l'ensemble des solutions de l'inéquation c'est l'ensembles des α qui appartiennent à K .

Remarque :

- Il faut au départ déterminer l'ensemble de définition de l'inéquation
- Pour certaines inéquations en utilise d'autres méthodes .

b. Exemple n° 1 :

1. Résoudre l'inéquation suivante : $(E_1)x \in [0,\pi]$; $\tan x > \frac{1}{2}$.
2. En déduit l'ensembles des solutions de l'inéquation suivante : $(E_2)x \in [0,2\pi]$; $\tan x > \frac{1}{2}$.
3. En déduit l'ensembles des solutions de l'inéquation suivante : $(E_3)x \in [-\pi,0]$; $\tan x > \frac{1}{2}$.

Correction :

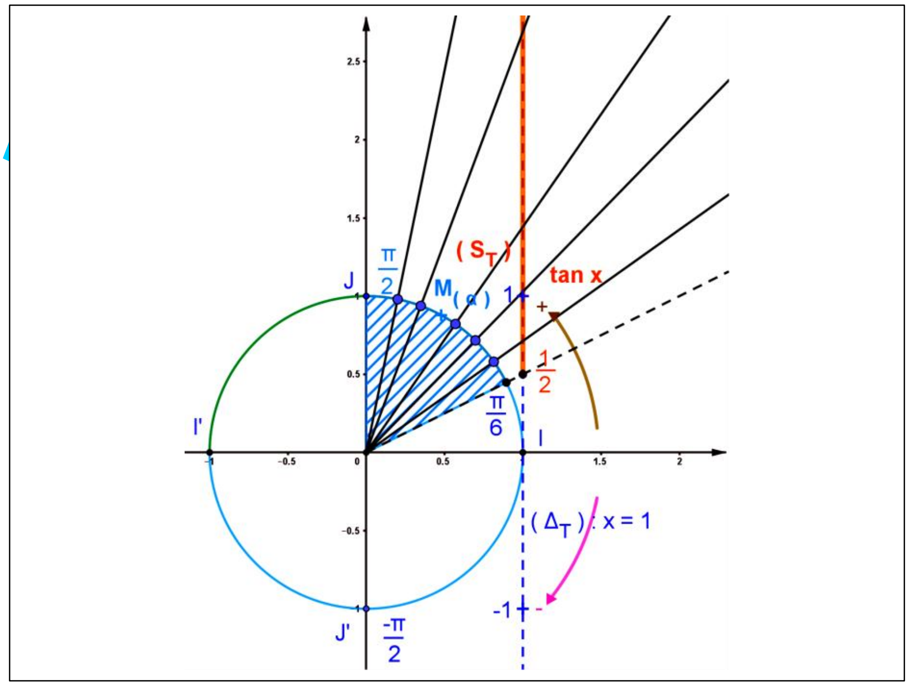
1. On résout l'inéquation $(E_1)x \in [0,\pi]$; $\tan x > \frac{1}{2}$

- ✓ On construit le cercle trigonométrique d'origine I (C) lié au repère orthonormé repère $(0,\vec{i},\vec{j})$.
- ✓ On construit la droite (Δ_T) tangente au cercle au point I l'origine du cercle (parallèle à l'axe des ordonnées)
- ✓ On trace la partie (S_T) de (Δ_T) (qui vérifie les abscisses $> \frac{1}{2}$) .

- On cherche tous les points $M_{(\alpha)}$ de (C) tel que la demi-droite $[OM)$ coupe la partie (S_T).

  (α abscisses curvilignes de M) . (on élimine J et J')

✓



Conclusion :

2. L'ensemble des solutions de (E_1) est : $S_1 = \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right[$

3. En déduit l'ensembles des solutions de l'inéquation (E_2) est

$$S_2 = \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left[\frac{\pi}{6} + \pi, \frac{\pi}{2} + \pi\right[= \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left[\frac{7\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}\right[$$

En déduit l'ensembles des solutions de l'inéquation (E_3) est : $S_3 = \left[\frac{\pi}{6} - \pi, \frac{\pi}{2} - \pi\right[= \left[\frac{-5\pi}{6}, \frac{-\pi}{2}\right[$.

IX. Exercices :

Résoudre les équations suivantes :

1. $(E_1)\, x \in [0, 2\pi]$; $\cos\left(\frac{\pi}{12} - x\right) = \frac{1}{2}$.

On a :

$$\cos\left(\frac{\pi}{12} - x\right) = \frac{1}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{12} - x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ \frac{\pi}{12} - x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} ;\ (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} - 2k\pi \\ x = \frac{5\pi}{12} - 2k\pi \end{cases} ;\ (k \in \mathbb{Z})$$

Conclusion : l'ensemble des solution de l'équation dans $\mathbb{R}$ est $S = \left\{-\frac{\pi}{4} - 2k\pi; \frac{5\pi}{12} - 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$

On cherche les solutions qui appartiennent à $[0, 2\pi]$

• Pour les solutions $x_2 = \frac{5\pi}{12} - 2k\pi$, on a :

$$\frac{5\pi}{12} - 2k\pi \in [0, 2\pi] \Leftrightarrow 0 \le \frac{5\pi}{12} - 2k\pi \le 2\pi \quad ;\ (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow -\frac{5}{12} \le -2k \le 2 - \frac{5}{12}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} \times \frac{19}{12} \le k \le -\frac{5}{12} \times \left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow -\frac{19}{24} \le k \le \frac{5}{24}$$

Puisque $k \in \mathbb{Z}$ donc : $k = 0$ d'où : $x_2 = \frac{5\pi}{12} - 2k\pi = \frac{5\pi}{12} \in [0, 2\pi]$

Conclusion 1 : l'ensemble des solution de l'équation dans $\mathbb{R}$ est $S = \left\{-\frac{\pi}{4} - 2k\pi; \frac{5\pi}{12} - 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$

- **Pour les solutions** $x_1 = -\frac{\pi}{4} - 2k\pi$ **, on a :**

$$-\frac{\pi}{4} - 2k\pi \in [0,2\pi] \Leftrightarrow 0 \le -\frac{\pi}{4} - 2k\pi \le 2\pi \quad ; (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{4} \le -2k\pi \le 2\pi + \frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4} \le -2k \le \frac{9}{4}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} \times \frac{9}{4} \le k \le -\frac{1}{2} \times \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{9}{8} \le k \le \frac{-1}{8}$$

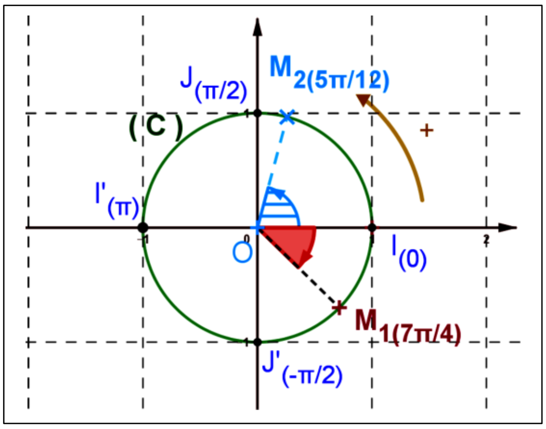
Conclusion 2 : Puisque $k \in \mathbb{Z}$ **donc :** $k = -1$ **d'où :** $x_1 = -\frac{\pi}{4} - 2k\pi = \frac{7\pi}{4} \in [0,2\pi]$

Conclusion : l'ensemble des solution de l'équation dans $[0,2\pi]$ **est :** $S = \left\{\frac{5\pi}{12}; \frac{7\pi}{4}\right\}$.

On peut utiliser la méthode suivante :
On utilise le cercle trigonométrique puis on construit sur le cercle les points $M_{(\alpha)}$ **(approximatif pour certain abscisses curvilignes) tel que** α **est solution de l'équation donner puis on donne les solutions qui appartiennent à l'intervalle donné de la façon suivante**

- **1**[er] **tour antihoraire présente l'intervalle** $[0,2\pi]$.
- **2**[ième] **tour antihoraire présente l'intervalle** $[2\pi,4\pi]$ **….etc.**
- **1**[er] **tour horaire présente l'intervalle** $[-2\pi,0]$.
- **2**[ième] **tour antihoraire présente l'intervalle** $[-4\pi,-2\pi]$ **….etc.**

D'après le cercle trigonométrique l'ensemble des solution sur l'intervalle



✓ $[0,2\pi]$ **est** $S = \left\{\frac{5\pi}{12}; \frac{7\pi}{4}\right\}$

✓ $[-2\pi,0]$ **est** $S = \left\{\frac{-19\pi}{12}; \frac{-\pi}{4}\right\}$

✓ $[-\pi,\pi]$ **est** $S = \left\{\frac{5\pi}{12}; \frac{-\pi}{4}\right\}$

2. $(E_2) x \in [0,\pi]$; $\sqrt{2}\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$.

On a :

$$\sqrt{2}\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \sqrt{2}\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+k\pi \;\;;\;\; k\in\mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow 2x=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}+k\pi \;\;;\;\; k\in\mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{3\pi}{8}+\frac{k\pi}{2} \;\;;\;\; k\in\mathbb{Z}$$

Conclusion : Les solutions sur sont de la forme $S=\left\{\frac{3\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}/k\in\mathbb{Z}\right\}$

3. $(E_3)\, x\in\mathbb{R}\;;\cos 2x=\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$.

On a :

$$\cos 2x=\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)=\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right) \quad ; \left(\text{car} \cos y=\sin\left(\frac{\pi}{2}-y\right)\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\frac{\pi}{2}-2x=x-\frac{\pi}{4}+2k\pi\\ \frac{\pi}{2}-2x=\pi-\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+2k\pi\end{cases} \;;\; (k\in\mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}-2x-x=-\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}+2k\pi\\ -2x+x=\pi+\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{2}+2k\pi\end{cases} \;;\; (k\in\mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}-3x=-\frac{3\pi}{4}+2k\pi\\ -x=\frac{3\pi}{4}+2k\pi\end{cases} \;;\; (k\in\mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x=\frac{\pi}{4}-\frac{2}{3}k\pi\\ x=-\frac{3\pi}{4}-2k\pi\end{cases} \;;\; (k\in\mathbb{Z})$$

Conclusion :

Les solutions sur sont de la forme $S=\left\{x=\frac{\pi}{4}-\frac{2}{3}k\pi, x=-\frac{3\pi}{4}-2k\pi/k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Remarque : pour trouver le nombres des points à construire pour le première solution :

- $x=\frac{\pi}{4}-\frac{2}{3}k\pi$ on pose $\frac{2}{3}k\pi=2\pi$ donc $k=3$ d'où on a trois points à construire .
- $x=-\frac{3\pi}{4}-2k\pi$ on pose $2k\pi=2\pi$ donc $k=1$ d'où on a un point à construire .