

Série 7 : Trigonométrie I

Exercice 1 :

Soit x un nombre réel, simplifier les expressions suivantes :

$$A(x) = 2\sin^2(x) + 3\cos^2(x) - 1$$

$$B(x) = (\cos(x) + \sin(x))^2 - 1$$

$$C(x) = \cos^2(x) - \cos^2(x) \cdot \sin^2(x)$$

$$D(x) = (2\cos(x) + \sin(x))^2 + (2\cos(x) - \sin(x))^2$$

$$E(x) = \cos^5(x) + \cos^3(x) \cdot \sin^2(x)$$

$$F(x) = \cos^4(x) - \cos^2(x) + \sin^2(x) - \sin^4(x)$$

$$G(x) = \cos^6(x) + \sin^6(x) + 3\sin^2(x) \cdot \cos^2(x)$$

$$H(x) = \cos^6(x) + \sin^6(x) - 2\sin^4(x) - \cos^4(x) + \sin^2(x)$$

$$K(x) = 2(\cos^6(x) + \sin^6(x)) - 3(\cos^4(x) + \sin^4(x))$$

$$L(x) = \sqrt{\sin^4 x + 4\cos^2 x} + \sqrt{\cos^4 x + 4\sin^2 x}$$

$$P(x) = \frac{\cos(x)}{1 + \sin(x)} + \frac{\sin(x)}{1 + \cos(x)} + \frac{(1 - \cos(x))(1 - \sin(x))}{\cos(x) \cdot \sin(x)}$$

Exercice 2 :

Simplifier les expressions suivantes :

$$A = \cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) + \cos^2\left(\frac{3\pi}{8}\right) + \cos^2\left(\frac{5\pi}{8}\right) + \cos^2\left(\frac{7\pi}{8}\right)$$

$$B = \sin^2\left(\frac{\pi}{12}\right) + \sin^2\left(\frac{5\pi}{12}\right) + \sin^2\left(\frac{7\pi}{12}\right) + \sin^2\left(\frac{11\pi}{12}\right)$$

$$C = \cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right) + \cos^2\left(\frac{11\pi}{12}\right) + 2\cos^2\left(\frac{5\pi}{12}\right)$$

$$D = \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) \cdot \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) \cdot \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$$

$$B = \sin^2\left(\frac{\pi}{12}\right) + \sin^2\left(\frac{3\pi}{12}\right) + \sin^2\left(\frac{5\pi}{12}\right) + \sin^2\left(\frac{7\pi}{12}\right) + \sin^2\left(\frac{9\pi}{12}\right) + \sin^2\left(\frac{11\pi}{12}\right)$$

Exercice 3 :

On considère que : $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$

1°/- Calculer : $\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$

2°/- Déduire : $\sin\left(-\frac{2\pi}{5}\right)$; $\sin\left(\frac{3\pi}{5}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{10}\right)$

Exercice 4 :

Soit x un nombre réel, montrer que :

$$1^\circ / \sin^4(x) - \cos^4(x) = \sin^2(x) - \cos^2(x)$$

$$2^\circ / \sin^4(x) + \cos^4(x) = 1 - 2\sin^2(x)\cos^2(x)$$

$$3^\circ / \sin^6(x) + \cos^6(x) = 1 - 3\sin^2(x)\cos^2(x)$$

$$4^\circ / \sin^2\left(\frac{2\pi}{5}\right) - \cos^2\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \cos^2\left(\frac{\pi}{10}\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{10}\right)$$

Exercice 5 :

Soit x un nombre réel, on pose : $A(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

Montrer que : $A(-x) = A(x)$ et $A(\pi - x) = -A(x)$

Exercice 6 :

Simplifier les expressions suivantes :

$$A = \tan\left(\frac{17\pi}{2} - x\right) + \tan\left(\frac{51\pi}{2} + x\right) + \tan\left(\frac{25\pi}{2} + x\right)$$

$$B = \tan\left(\frac{83\pi}{2} + x\right) \times \cos\left(\frac{51\pi}{2} - x\right)$$

$$C = \tan\left(\frac{\pi}{8}\right) + \tan\left(\frac{3\pi}{8}\right) + \tan\left(\frac{5\pi}{8}\right) + \tan\left(\frac{7\pi}{8}\right)$$

Exercice 7 :

Soit x un nombre réel ;

1°/ Montrer que : $\cos^6 x + \sin^6 x = 1 - 3\cos^2 x + 3\cos^4 x$

2°/ Déduire que : $\cos^6 x + \sin^6 x \geq \frac{1}{4}$

Exercice 8 :

1°/ Calculer $\cos(x)$ et $\sin(x)$ sachant que $\tan(x) = 2$ et $-\pi < x < -\frac{\pi}{2}$

2°/ Calculer $\cos(x)$ et $\tan(x)$ sachant que $\sin(x) = \frac{-4}{5}$ et $\pi < x < -\frac{3\pi}{2}$

3°/ Calculer $\sin(x)$ et $\tan(x)$ sachant que $\cos(x) = -0,6$ et $\frac{\pi}{2} < x < \pi$

Exercice 9 :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls tel que : $\widehat{(\vec{u}, \vec{v})} \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$

Déterminer les mesures des angles orientés : $\widehat{(\vec{v}, \vec{u})}$; $\widehat{(\vec{u}, -\vec{v})}$; $\widehat{(-\vec{u}, -\vec{v})}$; $\widehat{(-\vec{u}, \vec{v})}$; $\widehat{(-3\vec{u}, 2\vec{v})}$

Exercice 10 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$$\cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad ; \quad 2\sin(x - \frac{\pi}{3}) = 1 \quad ; \quad \sqrt{3} - 2\cos(2x) = 0 \quad ; \quad \tan(2x - \frac{\pi}{6}) = 1$$