

TRIGONOMETRIE1

Exercice1 :

- 1) Donner la mesure en radians de l'angle de mesure 33° .
- 2) Donner la mesure en degrés de l'angle de mesure $\frac{3\pi}{8}$ rad.
- 3) Donner la mesure en radians de l'angle de mesure 135° .

π	?	$\frac{3\pi}{8}$
180°	33°	?

Solution :

$$1) x = 33 \times \frac{\pi}{180} = \frac{11\pi}{60} \quad 2)$$

$$y = \frac{3\pi}{8} \times \frac{\pi}{180} = 67,5^\circ$$

$$3) \text{ on a : } \frac{135}{180^\circ} = \frac{\gamma}{\pi} \text{ ssi } 135 \times \pi = \gamma \times 180$$

$$\text{Ssi } \gamma = \frac{135 \times \pi}{180} = \frac{27 \times \pi}{36} = \frac{3\pi}{4} \text{ rad}$$

Exercice2 :

- 1) Déterminer l'abscisses curviligne principale de chacune des abscisses suivantes

$$7\pi, \frac{110\pi}{3}, \frac{19\pi}{4}, -\frac{131\pi}{3}, -\frac{217\pi}{6}$$

- 2) Placer sur le cercle trigonométrique les points

$$A(0); B\left(\frac{\pi}{2}\right); C\left(\frac{\pi}{4}\right); D\left(\frac{\pi}{3}\right); E\left(\frac{\pi}{6}\right); M\left(\frac{7\pi}{2}\right)$$

$$F\left(\frac{5\pi}{6}\right); G\left(-\frac{\pi}{2}\right); H\left(-\frac{\pi}{4}\right); N\left(\frac{3\pi}{2}\right); I\left(\frac{2007\pi}{4}\right)$$

Solution :

- $x = 7\pi$ et soit α l'abscisses curviligne principale associée a x

$$\text{Alors il existe un } k \in \mathbb{Z} \text{ tel que : } \alpha - x = 2k\pi \text{ c a d } \alpha = 7\pi + 2k\pi \text{ et } \alpha \in]-\pi; \pi]$$

$$\text{c a d } -\pi < 7\pi + 2k\pi \leq \pi \text{ et } k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{ssi } \pi - 7\pi < 2k\pi \leq \pi - 7\pi \text{ ssi } -8 < 2k \leq -6 \text{ ssi } -4 < k \leq -3 \text{ et } k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{alors } k = -3 \text{ et donc}$$

$$\alpha = 7\pi + 2(-3)\pi = 7\pi - 6\pi = \pi$$

$$\text{donc l'abscisses curviligne principale associée a } x = 7\pi \text{ est } \alpha = \pi$$

- $x = \frac{110\pi}{3}$ et soit α l'abscisses curviligne principale associée a x

$$\text{Alors il existe un } k \in \mathbb{Z} \text{ tel que : } \alpha - x = 2k\pi \text{ c a d}$$

$$\alpha = \frac{110\pi}{3} + 2k\pi \text{ et } \alpha \in]-\pi; \pi]$$

$$\text{c a d } -\pi < \frac{110\pi}{3} + 2k\pi \leq \pi \text{ et } k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{ssi } -\pi - \frac{110\pi}{3} < 2k\pi \leq \pi - \frac{110\pi}{3} \text{ ssi}$$

$$-\frac{113\pi}{3} < 2k\pi \leq -\frac{107\pi}{3} \text{ ssi } -\frac{113}{6} < k \leq -\frac{107}{6}$$

$$\text{et } k \in \mathbb{Z} \text{ ssi } -18.83 < k \leq -17.83 \text{ et } k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{alors } k = -18 \text{ et donc}$$

$$\alpha = \frac{110\pi}{3} + 2k\pi = \frac{110\pi}{3} + 2(-18)\pi = \frac{110\pi - 108\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

$$\text{Donc l'abscisses curviligne principale associée a}$$

$$x = \frac{110\pi}{3} \text{ est } \alpha = \frac{2\pi}{3}$$

$$\text{▪ } x = \frac{19\pi}{4}$$

$$\text{On a } \frac{19\pi}{4} = \frac{16\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} = 4\pi + \frac{3\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + 2 \times 2\pi$$

$$\text{et } \frac{3\pi}{4} \in]-\pi; \pi] \text{ donc l'abscisses curviligne principale}$$

$$\text{associée a } \frac{19\pi}{4} \text{ est } \alpha = \frac{3\pi}{4}$$

$$\text{▪ } x = -\frac{131\pi}{3} \text{ et soit } \alpha \text{ l'abscisses curviligne principale}$$

$$\text{associée a } x$$

$$\text{Alors il existe un } k \in \mathbb{Z} \text{ tel que : } \alpha - x = 2k\pi \text{ c a d}$$

$$\alpha = -\frac{131\pi}{3} + 2k\pi \text{ et } \alpha \in]-\pi; \pi]$$

$$\text{c a d } -\pi < -\frac{131\pi}{3} + 2k\pi \leq \pi \text{ et } k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{ssi } -\pi + \frac{131\pi}{3} < 2k\pi \leq \pi + \frac{131\pi}{3} \text{ ssi}$$

$$\frac{128\pi}{3} < 2k\pi \leq \frac{134\pi}{3}$$

$$\text{ssi } \frac{128}{6} < k \leq \frac{134}{6} \text{ et } k \in \mathbb{Z} \text{ ssi}$$

$$21.33 < k \leq 22.33 \text{ et } k \in \mathbb{Z}$$

alors $k = 22$ et donc

$$\alpha = -\frac{131\pi}{3} + 2k\pi = -\frac{131\pi}{3} + 2(22)\pi = \frac{-131\pi + 132\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$$

donc l'abscisses curviligne principale associée a

$$x = -\frac{131\pi}{3} \text{ est } \alpha = \frac{\pi}{3}$$

▪ $x = -\frac{217\pi}{6}$ et soit α l'abscisses curviligne principale

associée a X

Alors il existe un $k \in \mathbb{Z}$ tel que : $\alpha - x = 2k\pi$ c a d

$$\alpha = -\frac{217\pi}{6} + 2k\pi \text{ et } \alpha \in]-\pi; \pi]$$

$$\text{c a d } -\pi < -\frac{217\pi}{6} + 2k\pi \leq \pi \text{ et } k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{ssi } -\pi + \frac{217\pi}{6} < 2k\pi \leq \pi + \frac{217\pi}{6} \text{ ssi}$$

$$\frac{211\pi}{6} < 2k\pi \leq \frac{223\pi}{6}$$

$$\text{ssi } \frac{211}{12} < k \leq \frac{223}{12} \text{ et } k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{ssi } 17.58 < k \leq 18.58 \text{ et } k \in \mathbb{Z}$$

alors $k = 18$ et donc

$$\alpha = -\frac{217\pi}{6} + 2k\pi = -\frac{217\pi}{6} + 2(18)\pi = \frac{-217\pi + 216\pi}{6} = -\frac{\pi}{6}$$

donc l'abscisses curviligne principale associée a

$$x = -\frac{217\pi}{6} \text{ est } \alpha = -\frac{\pi}{6}$$

2) Placer sur le cercle trigonométrique les points

$$A(0); B\left(\frac{\pi}{2}\right); C\left(\frac{\pi}{4}\right); D\left(\frac{\pi}{3}\right); ; M\left(\frac{7\pi}{2}\right) E\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$F\left(\frac{5\pi}{6}\right); G\left(-\frac{\pi}{2}\right); H\left(-\frac{\pi}{4}\right); N\left(\frac{3\pi}{2}\right); I\left(\frac{2007\pi}{4}\right)$$

$$\text{▪ } x = \frac{7\pi}{2} \text{ On a}$$

$$\frac{7\pi}{2} = \frac{8\pi - \pi}{2} = \frac{8\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 4\pi - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} + 2 \times 2\pi$$

$$\text{et } -\frac{\pi}{2} \in]-\pi; \pi]$$

donc l'abscisses curviligne principale associée a $x = \frac{7\pi}{2}$

$$\text{est } \alpha = -\frac{\pi}{2}$$

$$\text{▪ } x = \frac{2007\pi}{4}$$

Methode1 : On divise 2007 par 4 on trouve 501,75 on prend le nombre entier proche ex : 502

$$\text{Donc : } \frac{2007\pi}{4} - 502\pi = \frac{2007\pi}{4} - \frac{2008\pi}{4} = -\frac{\pi}{4}$$

$$\frac{2007\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} + 502\pi = -\frac{\pi}{4} + 2 \times 251\pi \text{ et } -\frac{\pi}{4} \in]-\pi; \pi]$$

donc l'abscisses curviligne principale associée a $x = \frac{2007\pi}{4}$

$$\text{est } \alpha = -\frac{\pi}{4}$$

$$\text{Methode2 : } -\pi < \frac{2007\pi}{4} + 2k\pi \leq \pi$$

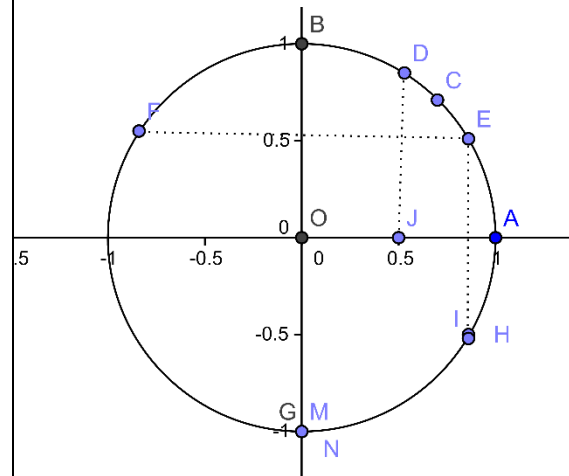
$$-1 < \frac{2007}{4} + 2k \leq 1 \text{ ssi } -1 - \frac{2007}{4} < 2k \leq 1 - \frac{2007}{4}$$

$$\text{ssi } -\frac{2011}{8} < k \leq -\frac{2003}{8} \text{ donc}$$

$$-251,3 \approx -\frac{2011}{8} < k \leq -\frac{2003}{8} \approx -250,3$$

Donc $k = -251$ Donc

$$\alpha = \frac{2007\pi}{4} + 2(-251)\pi = -\frac{\pi}{4}$$



Exercice3 : Déterminer l'abscisses curviligne principale de chacune des points suivants

$$M_0\left(\frac{9\pi}{2}\right); M_1\left(\frac{11\pi}{3}\right); M_2\left(\frac{67\pi}{4}\right); M_3\left(\frac{19\pi}{3}\right)$$

Solution :

$$\text{▪ } x = \frac{9\pi}{2}$$

$$\text{Methode1: } \frac{9\pi}{2} = \frac{8\pi + \pi}{2} = \frac{8\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = 4\pi + \frac{\pi}{2} = 2 \times 2\pi + \frac{\pi}{2}$$

et $\frac{\pi}{2} \in]-\pi; \pi]$ donc l'abscisses curviligne principale du

point M_0 est $\alpha = \frac{\pi}{2}$

Methode2: $-\pi < \frac{9\pi}{2} + 2k\pi \leq \pi$ et $k \in \mathbb{Z}$

Donc $-1 < \frac{9}{2} + 2k \leq 1$ Donc

$-1 - \frac{9}{2} < -\frac{9}{2} + \frac{9}{2} + 2k \leq 1 - \frac{9}{2}$

Donc $-\frac{11}{2} < 2k \leq -\frac{7}{2}$ Donc $-\frac{11}{4} < k \leq -\frac{7}{4}$

Donc $-2,7 \approx -\frac{11}{4} < k \leq -\frac{7}{4} \approx -1,7$ et $k \in \mathbb{Z}$

Donc $k = -2$ Donc

$\alpha = \frac{9\pi}{2} + 2(-2)\pi = \frac{9\pi}{2} - 4\pi = \frac{9\pi - 8\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$

donc l'abscisses curviligne principale du point M_0 est $\alpha = \frac{\pi}{2}$

▪ $M_1\left(\frac{11\pi}{3}\right)$

Methode1: On a $\frac{11\pi}{3} = \frac{12\pi - \pi}{3} = 4\pi - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{3} + 2 \times 2\pi$

et $-\frac{\pi}{3} \in]-\pi; \pi]$ donc l'abscisses curviligne principale du

point M_1 est $\alpha = -\frac{\pi}{3}$

Methode2: $-\pi < \frac{11\pi}{3} + 2k\pi \leq \pi$ et $k \in \mathbb{Z}$

Donc $-1 < \frac{11}{3} + 2k \leq 1$ Donc

$-1 - \frac{11}{3} < -\frac{11}{3} + \frac{11}{3} + 2k \leq 1 - \frac{11}{3}$

Donc $-\frac{14}{3} < 2k \leq -\frac{8}{3}$ Donc $-\frac{7}{3} < k \leq -\frac{4}{3}$

Donc $-2,3 \approx -\frac{7}{3} < k \leq -\frac{4}{3} \approx -1,3$ et $k \in \mathbb{Z}$

Donc $k = -2$ Donc

$\alpha = \frac{11\pi}{3} + 2(-2)\pi = \frac{11\pi}{3} - 4\pi = \frac{11\pi - 12\pi}{3} = -\frac{\pi}{3}$

Donc l'abscisses curviligne principale du point

M_1 est $\alpha = -\frac{\pi}{3}$

▪ $M_2\left(\frac{67\pi}{4}\right)$

Methode1: On a

$\frac{67\pi}{4} = \frac{64\pi + 3\pi}{4} = \frac{64\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} = 16\pi + \frac{3\pi}{4} = 2 \times 8\pi + \frac{3\pi}{4}$

et $\frac{3\pi}{4} \in]-\pi; \pi]$ donc l'abscisses curviligne principale du

point M_2 est $\alpha = \frac{3\pi}{4}$

Methode2: $-\pi < \frac{67\pi}{4} + 2k\pi \leq \pi$ et $k \in \mathbb{Z}$

Donc $-1 < \frac{67}{4} + 2k \leq 1$

Donc $-1 - \frac{67}{4} < -\frac{67}{4} + \frac{67}{4} + 2k \leq 1 - \frac{67}{4}$

Donc $-\frac{71}{4} < 2k \leq -\frac{63}{4}$

Donc $-8,8 \approx -\frac{71}{8} < k \leq -\frac{63}{8} \approx -7,8$ et $k \in \mathbb{Z}$

Donc $k = -8$ Donc :

$\alpha = \frac{67\pi}{4} + 2(-8)\pi = \frac{67\pi}{4} - 16\pi = \frac{67\pi - 64\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$

donc l'abscisses curviligne principale du point M_2

est $\alpha = \frac{3\pi}{4}$

▪ $M_3\left(\frac{19\pi}{3}\right)$

On a $\frac{19\pi}{3} = \frac{18\pi + \pi}{3} = \frac{18\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = 6\pi + \frac{\pi}{3} = 2 \times 3\pi + \frac{\pi}{3}$

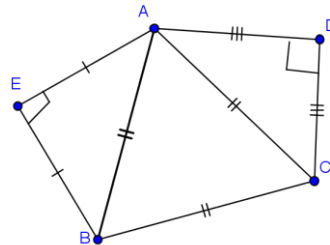
et $\frac{\pi}{3} \in]-\pi; \pi]$ donc l'abscisses curviligne principale du

point M_3 est $\alpha = \frac{\pi}{3}$

Exercice4 : d'après la figure suivante donner la mesure principale des angles orientés suivant :

$(\overline{AB}; \overline{AC})$ et $(\overline{AE}; \overline{AD})$ et $(\overline{BC}; \overline{BE})$ et $(\overline{CB}; \overline{CD})$

Et $(\overline{EB}; \overline{EA})$ et $(\overline{DC}; \overline{DA})$



Le triangle : ACD est rectangle et isocèle en D et Le triangle : ABC est équilatérale

• La mesure principale de l'angle orienté $(\overline{AB}; \overline{AC})$ est $\frac{\pi}{3}$

Et on écrit : $(\overline{AB}; \overline{AC}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$

• La mesure principale de l'angle orienté $(\overrightarrow{DC}; \overrightarrow{DA})$ est $-\frac{\pi}{2}$

Et on écrit : $(\overrightarrow{DC}; \overrightarrow{DA}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$

• on a : $(\overrightarrow{CB}; \overrightarrow{CD}) = (\overrightarrow{CB}; \overrightarrow{CA}) + (\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{CD})$

donc : La mesure principale de l'angle orienté $(\overrightarrow{CB}; \overrightarrow{CD})$

est : $-\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \text{ rad} - \frac{7\pi}{12}$

• Le triangle : AEB est rectangle et isocèle en E

Donc : $(\overrightarrow{AE}; \overrightarrow{AD}) = (\overrightarrow{AE}; \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AD})$

Ssi $(\overrightarrow{AE}; \overrightarrow{AD}) \equiv \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} [2\pi]$

Donc : La mesure principale de l'angle $(\overrightarrow{AE}; \overrightarrow{AD})$ est $\frac{5\pi}{6}$

• on a : $(\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BE}) = (\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BE})$

Donc : La mesure principale de l'angle $(\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BE})$ est :

$\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} \text{ rad} \frac{7\pi}{12}$

• La mesure principale de l'angle $(\overrightarrow{BE}; \overrightarrow{EA})$ est : $\frac{\pi}{2}$

Exercice5 :

Calculer les rapports trigonométriques des nombre réel

suivantes 7π , $\frac{5\pi}{6}$, $\frac{7\pi}{6}$, $\frac{3\pi}{4}$, $-\frac{4\pi}{3}$

Solution :

$$\checkmark \cos(7\pi) = \cos(\pi + 6\pi) = \cos(\pi + 2 \times 3\pi) = \cos(\pi) = -1$$

$$\sin(7\pi) = \sin(\pi + 6\pi) = \sin(\pi + 2 \times 3\pi) = \sin(\pi) = 0$$

$$\tan(7\pi) = \tan(0 + 7\pi) = \tan(0) = 0$$

$$\checkmark \text{ On a : } \frac{5\pi}{6} = \frac{6\pi - \pi}{6} = \frac{6\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{6}$$

$$\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\tan\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \tan\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \tan\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\checkmark \text{ On a : } \frac{7\pi}{6} = \frac{6\pi + \pi}{6} = \frac{6\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = \pi + \frac{\pi}{6}$$

$$\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$\tan\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \tan\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\checkmark \text{ On a : } \frac{3\pi}{4} = \frac{4\pi - \pi}{4} = \frac{4\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = \pi - \frac{\pi}{4}$$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \tan\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1$$

$$\checkmark \text{ On a : } \frac{4\pi}{3} = \frac{3\pi + \pi}{3} = \frac{3\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = \pi + \frac{\pi}{3}$$

$$\cos\left(-\frac{4\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$\sin\left(-\frac{4\pi}{3}\right) = -\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan\left(-\frac{4\pi}{3}\right) = -\tan\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\tan\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$$

Exercice6 :

Calculer : $\cos\frac{10\pi}{3}$; $\sin\frac{53\pi}{6}$; $\cos\frac{34\pi}{3}$; $\cos\frac{13\pi}{6}$; $\tan\frac{37\pi}{4}$

Solution : on peut utiliser les résultats du tableau :

	$-\alpha$	$\pi - \alpha$	$\pi + \alpha$	$\frac{\pi}{2} - \alpha$	$\frac{\pi}{2} + \alpha$
$\cos \alpha$	$\cos \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$
$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\cos \alpha$
$\tan \alpha$	$-\tan \alpha$	$-\tan \alpha$	$\tan \alpha$	$\frac{1}{\tan \alpha}$	$-\frac{1}{\tan \alpha}$

$$\cos\frac{10\pi}{3} = \cos\left(\frac{9\pi + \pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{9\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(3\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(2\pi + \pi + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\cos\frac{10\pi}{3} = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$\cos\frac{13\pi}{6} = \cos\left(\frac{12\pi + \pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{12\pi}{6} + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(2\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin\frac{53\pi}{6} = \sin\left(\frac{54\pi - \pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{54\pi}{6} - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(9\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(8\pi + \pi - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$\sin\frac{53\pi}{6} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\cos\frac{34\pi}{3} = \cos\left(\frac{33\pi + \pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{33\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(11\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(10\pi + \pi + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\frac{34\pi}{3} = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$\tan\frac{37\pi}{4} = \tan\left(\frac{36\pi + \pi}{4}\right) = \tan\left(\frac{36\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) = \tan\left(9\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$$

Exercice7: montrer que : $1 + (\tan x)^2 = \frac{1}{(\cos x)^2}$ si $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

Solution :

$$1 + (\tan x)^2 = 1 + \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^2 = 1 + \frac{(\sin x)^2}{(\cos x)^2} = \frac{(\cos x)^2 + (\sin x)^2}{(\cos x)^2}$$

Et on a : $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ donc : $1 + (\tan x)^2 = \frac{1}{(\cos x)^2}$

Exercice8: on a : $\tan x = \frac{1}{3}$ et $\frac{\pi}{2} < x < \pi$

Calculer : 1) $\cos x$ 2) $\sin x$

Solution : 1) on a : $1 + (\tan x)^2 = \frac{1}{(\cos x)^2}$ donc

$$1 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Donc $1 + \frac{1}{9} = \frac{1}{\cos^2 x}$ Donc $\frac{10}{9} = \frac{1}{\cos^2 x}$ Donc

$$10 \cos^2 x = 9$$

Donc $\cos^2 x = \frac{9}{10}$ Donc $\cos x = \sqrt{\frac{9}{10}}$ et $\cos x = -\sqrt{\frac{9}{10}}$

Et on a $\frac{\pi}{2} < x < \pi$: donc $\cos x \leq 0$ Donc :

$$\cos x = -\sqrt{\frac{9}{10}} = -\frac{3\sqrt{10}}{10}$$

2) on a : $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ donc $\sin x = \tan x \times \cos x$ donc

$$\sin x = -\frac{1}{3} \times \frac{3\sqrt{10}}{10} = -\frac{\sqrt{10}}{10}$$

Exercice9: on a : $\sin x = -\frac{4}{5}$ et $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

Calculer : $\cos x$ et $\tan x$

Solution : on a : $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ donc $(\cos x)^2 + \frac{16}{25} = 1$

Donc $(\cos x)^2 = 1 - \frac{16}{25}$ donc : $(\cos x)^2 = \frac{9}{25}$

Donc : $\cos x = \sqrt{\frac{9}{25}}$ ou $\cos x = -\sqrt{\frac{9}{25}}$

Donc : $\cos x = \frac{3}{5}$ ou $\cos x = -\frac{3}{5}$

Or on a $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ donc : $\cos x \geq 0$

Par suite : $\cos x = \frac{3}{5}$

On a : $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{-\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = -\frac{4}{3}$

Exercice10:1) sachant que : $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{3}$ et $\frac{\pi}{2} < x < \pi$

Calculer : $\cos x$ et $\tan x$

2) sachant que : $-\pi < x < -\frac{\pi}{2}$ et $\tan x = 2\sqrt{3}$

Calculer : $\cos x$ et $\sin x$

3) sachant que : $\cos x > \sin x > 0$ et $\cos x \cdot \sin x = \frac{\sqrt{2}}{3}$

Calculer : $\cos x + \sin x$ et $\cos x - \sin x$

Et en déduire $\cos x$ et $\sin x$

Solution :

• on a $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{3}$ et on a : $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

donc : $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ donc $\cos^2 x = 1 - \frac{2}{9}$

donc : $\cos^2 x = \frac{7}{9}$ donc : $\cos x = \sqrt{\frac{7}{9}}$ ou $\cos x = -\sqrt{\frac{7}{9}}$

or $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ donc : $\cos x < 0$ donc : $\cos x = -\sqrt{\frac{7}{9}}$

$$\tan x = \frac{\frac{\sqrt{2}}{3}}{-\frac{\sqrt{7}}{3}} = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}} = -\frac{\sqrt{14}}{7}$$

2) on a : $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ et $\tan x = 2\sqrt{3}$

Donc : $\cos^2 x = \frac{1}{1 + \tan^2 x}$ donc : $\cos^2 x = \frac{1}{1 + 12}$

Donc : $\cos^2 x = \frac{1}{13}$ donc : $\cos x = \frac{\sqrt{13}}{13}$ ou $\cos x = -\frac{\sqrt{13}}{13}$

or $-\pi < x < -\frac{\pi}{2}$ donc $\cos x < 0$

donc : $\cos x = -\frac{\sqrt{13}}{13}$

on a : $\tan x \cdot \cos x = \sin x$ donc : $\sin x = 2\sqrt{3} \cdot \left(-\frac{\sqrt{13}}{13}\right)$

donc : $\sin x = -\frac{2\sqrt{39}}{13}$

3) on a : $\cos x > \sin x > 0$ et $\cos x \cdot \sin x = \frac{\sqrt{2}}{3}$

Et on a : $(\cos x + \sin x)^2 = \cos^2 x + 2\cos x \sin x + \sin^2 x$

Ssi $(\cos x + \sin x)^2 = 1 + \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{3 + 2\sqrt{2}}{3} = \frac{(\sqrt{2} + 1)^2}{(\sqrt{3})^2}$

Ssi $\cos x + \sin x = \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{3}}$ (1) car $\cos x + \sin x > 0$

Et on a : $(\cos x - \sin x)^2 = \cos^2 x - 2\cos x \sin x + \sin^2 x$

$$\text{Donc : } (\cos x - \sin x)^2 = 1 - \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{3-2\sqrt{2}}{3} = \frac{(\sqrt{2}-1)^2}{(\sqrt{3})^2}$$

$$\text{Donc : } \cos x - \sin x = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{3}} \quad (2) \quad \text{car } \cos x - \sin x > 0$$

$$(1) + (2) \text{ donne : } \cos x = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$(1) - (2) \text{ donne : } \sin x = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Exercice 11: simplifier les expressions suivantes :

$$A = \sin(\pi - x) \times \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \times \cos(\pi - x)$$

$$B = \frac{\sin x + \sin(\pi - x)}{\cos(\pi - x)}$$

$$C = \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) - \tan\left(\frac{5\pi}{6}\right)$$

$$D = \sin(11\pi - x) + \cos(5\pi + x) + \cos(14\pi - x)$$

$$E = \tan(\pi - x) + \tan(\pi + x)$$

$$F = \cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right) + \sin^2\left(\frac{3\pi}{10}\right)$$

$$G = \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{5\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{6\pi}{7}\right)$$

$$H = \sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) + \sin^2\left(\frac{3\pi}{8}\right) + \sin^2\left(\frac{5\pi}{8}\right) + \sin^2\left(\frac{7\pi}{8}\right)$$

Solution : on a : donc

$$A = \sin(\pi - x) \times \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \times \cos(\pi - x)$$

$$A = \sin(x) \times \sin(x) - \cos x \times (-\cos x) = \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$B = \frac{\sin x + \sin(\pi - x)}{\cos(\pi - x)} = \frac{\sin x + \sin x}{-\cos x} = -\frac{2\sin x}{\cos x} = -2\tan x$$

$$C = \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) - \tan\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{6\pi-\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{6\pi-\pi}{6}\right) - \tan\left(\frac{6\pi-\pi}{6}\right)$$

$$C = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) - \tan\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) + \tan\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$C = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} + \frac{\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} + \frac{2}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3} = -\frac{3\sqrt{3}}{6} + \frac{3}{6} + \frac{2\sqrt{3}}{6}$$

$$\text{Donc : } C = \frac{3-\sqrt{3}}{6}$$

$$D = \sin(11\pi - x) + \cos(5\pi + x) + \cos(14\pi - x)$$

$$D = \sin(10\pi + \pi - x) + \cos(4\pi + \pi + x) + \cos(2 \times 7\pi - x)$$

$$D = \sin(\pi - x) + \cos(\pi + x) + \cos(-x)$$

$$D = \sin(x) - \cos(x) + \cos(x) = \sin(x)$$

$$E = \tan(\pi - x) + \tan(\pi + x) = -\tan(x) + \tan(x) = 0$$

$$F = \cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right) + \sin^2\left(\frac{3\pi}{10}\right)$$

$$\text{On a } \frac{\pi}{5} + \frac{3\pi}{10} = \frac{2\pi}{10} + \frac{3\pi}{10} = \frac{5\pi}{10} = \frac{\pi}{2} \text{ donc : } \frac{3\pi}{10} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5}$$

$$F = \cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5}\right) = \cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right) = 1$$

$$G = \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{5\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{6\pi}{7}\right)$$

$$\text{On a } \frac{\pi}{7} + \frac{6\pi}{7} = \pi \text{ donc : } \frac{\pi}{7} = \pi - \frac{6\pi}{7}$$

$$\text{Et on a } \frac{2\pi}{7} + \frac{5\pi}{7} = \pi \text{ donc : } \frac{5\pi}{7} = \pi - \frac{2\pi}{7}$$

$$\text{Et on a } \frac{3\pi}{7} + \frac{4\pi}{7} = \pi \text{ donc : } \frac{4\pi}{7} = \pi - \frac{3\pi}{7}$$

Donc :

$$G = \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{7}\right) + \cos\left(\pi - \frac{3\pi}{7}\right) + \cos\left(\pi - \frac{2\pi}{7}\right) + \cos\left(\pi - \frac{\pi}{7}\right)$$

Donc :

$$G = \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{7}\right) - \cos\left(\frac{3\pi}{7}\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) = 0$$

$$H = \sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) + \sin^2\left(\frac{3\pi}{8}\right) + \sin^2\left(\frac{5\pi}{8}\right) + \sin^2\left(\frac{7\pi}{8}\right)$$

$$\text{On a } \frac{\pi}{8} + \frac{7\pi}{8} = \pi \text{ donc : } \frac{7\pi}{8} = \pi - \frac{\pi}{8}$$

$$\text{Et on a } \frac{3\pi}{8} + \frac{5\pi}{8} = \pi \text{ donc : } \frac{5\pi}{8} = \pi - \frac{3\pi}{8}$$

Donc :

$$H = \sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) + \sin^2\left(\frac{3\pi}{8}\right) + \sin^2\left(\pi - \frac{3\pi}{8}\right) + \sin^2\left(\pi - \frac{\pi}{8}\right)$$

Donc :

$$H = \sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) + \sin^2\left(\frac{3\pi}{8}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = 2\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) + 2\sin^2\left(\frac{3\pi}{8}\right)$$

$$\text{Et on a } \frac{\pi}{8} + \frac{3\pi}{8} = \frac{\pi}{2} \text{ donc : } \frac{3\pi}{8} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$$

$$\text{Donc on a : } H = 2\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) + 2\sin^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}\right)$$

Donc

$$H = 2\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) + 2\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = 2\left(\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right)\right) = 2 \times 1 = 2$$

Exercice 12: simplifier les expressions suivantes :

$$1) A = \cos\frac{\pi}{5} + \sin\frac{\pi}{5} + \cos\frac{4\pi}{5} - 2\sin\frac{4\pi}{5} + \cos\frac{3\pi}{10}$$

$$2) B = \cos^2\frac{\pi}{8} + \cos^2\frac{3\pi}{8} + \cos^2\frac{7\pi}{8} + \cos^2\frac{5\pi}{8}$$

$$C = \sin^2\frac{\pi}{12} + \sin^2\frac{3\pi}{12} + \sin^2\frac{5\pi}{12} + \sin^2\frac{7\pi}{12} + \sin^2\frac{9\pi}{12} + \sin^2\frac{11\pi}{12}$$

$$3) \text{ Solution : } 1) A = \cos\frac{\pi}{5} + \sin\frac{\pi}{5} + \cos\frac{4\pi}{5} - 2\sin\frac{4\pi}{5} + \cos\frac{3\pi}{10}$$

$$\text{On remarque que : } \frac{\pi}{5} + \frac{3\pi}{10} = \frac{\pi}{2} \text{ et } \frac{\pi}{5} + \frac{4\pi}{5} = \pi$$

Donc : $\frac{3\pi}{10} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5}$ et $\frac{4\pi}{5} = \pi - \frac{\pi}{5}$ donc :

$$A = \cos \frac{\pi}{5} + \sin \frac{\pi}{5} + \cos \left(\pi - \frac{\pi}{5} \right) - 2 \sin \left(\pi - \frac{\pi}{5} \right) + \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5} \right)$$

$$A = \cos \frac{\pi}{5} + \sin \frac{\pi}{5} - \cos \left(\frac{\pi}{5} \right) - 2 \sin \left(\frac{\pi}{5} \right) + \sin \left(\frac{\pi}{5} \right) = 0$$

$$2) B = \cos^2 \frac{\pi}{8} + \cos^2 \frac{3\pi}{8} + \cos^2 \frac{5\pi}{8} + \cos^2 \frac{7\pi}{8}$$

On remarque que : $\frac{\pi}{8} + \frac{7\pi}{8} = \pi$ Et $\frac{3\pi}{8} + \frac{5\pi}{8} = \pi$

$$\text{Donc : } \frac{7\pi}{8} = \pi - \frac{\pi}{8} \text{ et } \frac{5\pi}{8} = \pi - \frac{3\pi}{8}$$

$$\text{Donc : } B = \cos^2 \frac{\pi}{8} + \cos^2 \frac{3\pi}{8} + \cos^2 \left(\pi - \frac{3\pi}{8} \right) + \cos^2 \left(\pi - \frac{\pi}{8} \right)$$

$$B = \cos^2 \frac{\pi}{8} + \cos^2 \frac{3\pi}{8} + \left(-\cos \frac{3\pi}{8} \right)^2 + \left(-\cos \frac{\pi}{8} \right)^2$$

$$B = \cos^2 \frac{\pi}{8} + \cos^2 \frac{3\pi}{8} + \left(-\cos \frac{3\pi}{8} \right)^2 + \left(-\cos \frac{\pi}{8} \right)^2$$

$$B = \cos^2 \frac{\pi}{8} + \cos^2 \frac{3\pi}{8} + \cos^2 \frac{3\pi}{8} + \cos^2 \frac{\pi}{8} = 2 \cos^2 \frac{\pi}{8} + 2 \cos^2 \frac{3\pi}{8}$$

$$B = 2 \left(\cos^2 \frac{\pi}{8} + \cos^2 \frac{3\pi}{8} \right)$$

Et on remarque aussi que : $\frac{\pi}{8} + \frac{3\pi}{8} = \frac{\pi}{2}$ $\frac{3\pi}{8} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$

$$\text{Donc : } B = 2 \left(\cos^2 \frac{\pi}{8} + \cos^2 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8} \right) \right) = 2 \left(\cos^2 \frac{\pi}{8} + \sin^2 \left(\frac{\pi}{8} \right) \right) = 2 \times 1 = 2$$

$$3) C = \sin^2 \frac{\pi}{12} + \sin^2 \frac{3\pi}{12} + \sin^2 \frac{5\pi}{12} + \sin^2 \frac{7\pi}{12} + \sin^2 \frac{9\pi}{12} + \sin^2 \frac{11\pi}{12}$$

on remarque que : $\frac{\pi}{12} + \frac{11\pi}{12} = \pi$ donc $\frac{11\pi}{12} = \pi - \frac{\pi}{12}$

$$\frac{3\pi}{12} + \frac{9\pi}{12} = \pi \text{ donc } \frac{9\pi}{12} = \pi - \frac{3\pi}{12}$$

$$\text{Et } \frac{5\pi}{12} + \frac{7\pi}{12} = \pi \text{ donc } \frac{7\pi}{12} = \pi - \frac{5\pi}{12}$$

Donc on a :

$$C = \sin^2 \frac{\pi}{12} + \sin^2 \frac{3\pi}{12} + \sin^2 \frac{5\pi}{12} + \sin^2 \left(\pi - \frac{5\pi}{12} \right) + \sin^2 \left(\pi - \frac{3\pi}{12} \right) + \sin^2 \left(\pi - \frac{\pi}{12} \right)$$

$$C = \sin^2 \frac{\pi}{12} + \sin^2 \frac{3\pi}{12} + \sin^2 \frac{5\pi}{12} + \sin^2 \left(\frac{5\pi}{12} \right) + \sin^2 \left(\frac{3\pi}{12} \right) + \sin^2 \left(\frac{\pi}{12} \right)$$

$$C = 2 \sin^2 \frac{\pi}{12} + 2 \sin^2 \frac{3\pi}{12} + 2 \sin^2 \frac{5\pi}{12} = 2 \sin^2 \frac{\pi}{12} + 2 \sin^2 \frac{5\pi}{12} + 2 \sin^2 \frac{\pi}{4}$$

$$C = 2 \sin^2 \frac{\pi}{12} + 2 \sin^2 \frac{3\pi}{12} + 2 \sin^2 \frac{5\pi}{12} = 2 \left(\sin^2 \frac{\pi}{12} + \sin^2 \frac{5\pi}{12} \right) + 2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2$$

Et on remarque aussi que : $\frac{\pi}{12} + \frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{2}$

$$\frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}$$

On a donc :

$$C = 2 \left(\sin^2 \frac{\pi}{12} + \sin^2 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12} \right) \right) + 1 = 2 \left(\sin^2 \frac{\pi}{12} + \cos^2 \left(\frac{\pi}{12} \right) \right) + 1 = 2 \times 1 + 1 = 3$$

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices

Que l'on devient un mathématicien

