

TRIGONOMETRIE₁

I) Le radian et le cercle

trigonométrique :

1) Soit un cercle C de centre O et de rayon 1.

On appelle radian, noté *rad*, la mesure de l'angle au centre qui intercepte un arc de longueur 1 du cercle.

2) on appelle cercle trigonométrique tout cercle de centre O et de rayon 1 muni d'un point d'origine I et d'un sens de parcours appelé direct (sens contraire au sens des aiguilles d'une montre)

3) Les mesures en radian et en degré d'un même angle sont proportionnelles

• Si x est la mesure d'un angle en radian et y sa mesure en

degré alors : $\frac{x}{\pi} = \frac{y}{180}$

4) Correspondance degrés et radians

Ainsi, à 2π radians (tour complet), on fait correspondre un angle de 360° .

Par proportionnalité, on obtient les correspondances suivantes :

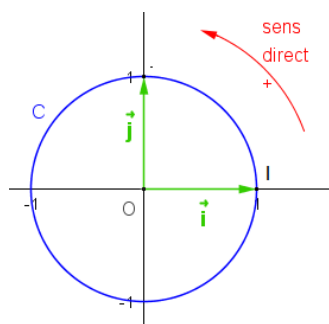
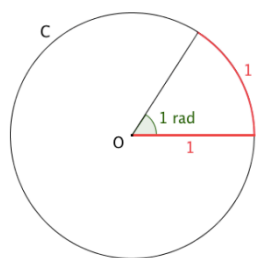
| | | | | | | | |
|----------------------------|---|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-------------|-------------|
| Mesure en radians x rad | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | π | 2π |
| Mesure en degrés y° | 0 | 30° | 45° | 60° | 90° | 180° | 360° |

II) Les abscisse curviligne d'un point sur le cercle trigonométrique

1) soit M un point du cercle trigonométrique d'origine I
Et soit α la longueur de l'arc IM (on allant de I vers M dans le sens direct) en radian

Tout réel qui s'écrit sous la forme : $\alpha + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ s'appelle abscisse curviligne de M

2) si x et x' deux abscisses curvilignes du même point M dans le cercle trigonométrique alors il existe un $k \in \mathbb{Z}$ tel que : $x - x' = 2k\pi$ on écrit : $x \equiv x' [2\pi]$: Et on lit : x est congrue à x' modulo 2π



3) abscisse curviligne principale

parmi les abscisses curvilignes d'un point M du cercle trigonométrique une seule se situe dans l'intervalle $]-\pi ; \pi]$ et on l'appelle abscisse curviligne principale

III) Relation de Chasles pour les angles orientés de deux demi-droites et de vecteurs

1) Soit $[Ox)$ et $[Oy)$ et $[Oz)$ trois demi-droites d'origine O

On a : $(Ox; Oy) + (Oy; Oz) \equiv (Ox; Oz) [2\pi]$

$$(Ox; Oy) \equiv -(Oy; Ox) [2\pi]$$

2) l'angle orienté des vecteurs non nuls \vec{u} et \vec{v} dans cet ordre est l'angle noté : $(\vec{u}; \vec{v})$

3) Pour des vecteurs non nuls, on a :

$$a) (\vec{u}; \vec{u}) \equiv 0 [2\pi] \quad b) (\vec{u}; -\vec{u}) \equiv \pi [2\pi]$$

$$c) (\vec{u}; \vec{v}) + (\vec{v}; \vec{w}) \equiv (\vec{u}; \vec{w}) [2\pi] \text{ relation de Chasles}$$

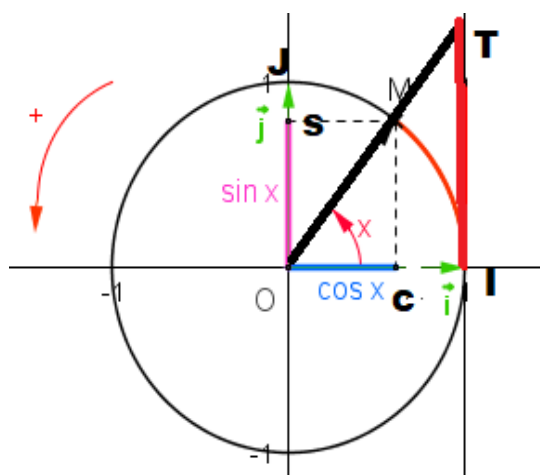
$$\text{Et on a : } (\vec{v}; \vec{u}) \equiv -(\vec{u}; \vec{v}) + 2k\pi$$

$$(-\vec{u}; \vec{v}) \equiv (\vec{u}; \vec{v}) + \pi + 2k\pi$$

$$(-\vec{u}; -\vec{v}) \equiv (\vec{u}; \vec{v}) + 2k\pi$$

$$(\vec{u}; -\vec{v}) \equiv (\vec{u}; \vec{v}) + \pi + 2k\pi$$

IV) Les rapports trigonométriques d'un nombre réel.



1) Soit (C) un cercle trigonométrique de centre O et d'origine I et Soit $x \in \mathbb{R}$ il existe un point M de (C) unique tel que x est une abscisse curviligne de M

Soit C le projeté orthogonal de M sur (OI)

Et soit S le projeté orthogonal de M sur (OJ)

- Le cosinus du nombre réel x est l'abscisse de M

Et on note $\cos x$.

- Le sinus du nombre réel x est l'ordonnée de M

et on note $\sin x$.

- Soit (Δ) la droite tangente à (C) en I

Si $M \neq J$ et $M \neq J'$ alors la droite (OM) coupe la tangente (Δ) en un point T

Le nombre réel \overline{IT} l'abscisse de T sur l'axe (Δ) est la tangente du nombre réel x et on note $\tan x$.

Remarques :

✓ Les rapports trigonométriques : $\cos x$ et $\sin x$ et $\tan x$ sont aussi appelés cosinus et sinus et tangente de l'angle orienté $(\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OM})$

✓ $\tan x$ existe ssi $x \neq -\frac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

✓ La cotangente de x est le nombre réel x noté cotangente x et on a : $\cotan x = \frac{1}{\tan x}$

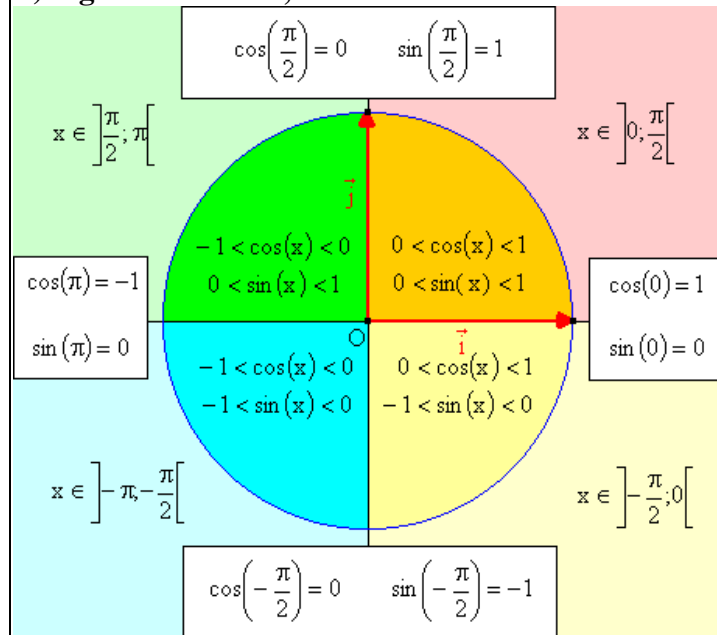
2) Cosinus, sinus et tangente d'angles remarquables :

| x | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | π |
|----------|---|----------------------|----------------------|----------------------|-----------------|-------|
| $\cos x$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 | -1 |
| $\sin x$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 | 0 |

3) Propriétés : Pour tout nombre réel x , on a :

- 1) $-1 \leq \cos x \leq 1$ 2) $-1 \leq \sin x \leq 1$
- 3) $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ 4) $\cos x = \cos(x + 2k\pi)$ où $k \in \mathbb{Z}$
- 5) $\sin x = \sin(x + 2k\pi)$ où k entier relatif
- 6) si $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ alors : $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$
- 7) si $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ alors : $\tan(x + k\pi) = \tan x$
- 8) $1 + (\tan x)^2 = \frac{1}{(\cos x)^2}$ si $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$
- 9) $\cos(-x) = \cos x$ et $\sin(-x) = -\sin x$
- 10) $\cos(\pi + x) = -\cos x$ et $\sin(\pi + x) = -\sin x$
- 11) $\cos(\pi - x) = -\cos x$ et $\sin(\pi - x) = \sin x$
- 12) $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$
- 13) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$
- 14) $\tan(\pi - x) = -\tan x$ et $\tan(\pi + x) = \tan x$ si $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$
- 15) $\tan(\pi - x) = -\tan x$ et $\tan(\pi + x) = \tan x$ si $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

V) Signe de Cosinus, sinus



- Si $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ alors $\cos x \geq 0$
- Si $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$ alors $\cos x \leq 0$
- Si $0 \leq x \leq \pi$ alors $\sin x \geq 0$
- Si $\pi \leq x \leq 2\pi$ alors $\sin x \leq 0$

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices

Que l'on devient un mathématicien

