

TRIGONOMÉTRIE1

I) Le radian et le cercle trigonométrique :

1) Soit un cercle C de centre O et de rayon 1.

On appelle radian, noté rad , la mesure de l'angle au centre qui intercepte un arc de longueur 1 du cercle.

2) on appelle cercle trigonométrique tout cercle de centre O et de rayon 1 muni d'un point d'origine I et d'un sens de parcours appelé direct (sens contraire au sens des aiguilles d'une montre)

3) Les mesures en radian et en degré d'un même angle sont proportionnelles

- Si x est la mesure d'un angle en radian et y sa mesure en degré alors : $\frac{x}{\pi} = \frac{y}{180}$

4) Correspondance degrés et radians

Ainsi, à 2π radians (tour complet), on fait correspondre un angle de 360° .

Par proportionnalité, on obtient les correspondances suivantes :

Mesure en radians x rad	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	2π
Mesure en degrés y $^\circ$	0	30°	45°	60°	90°	180°	360°

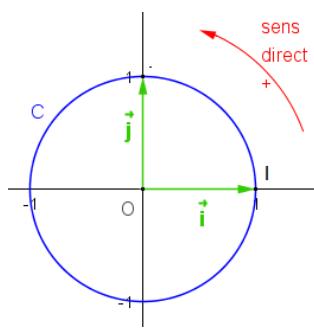
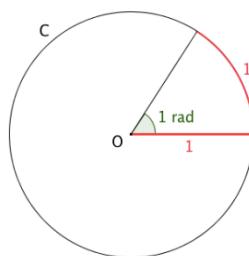
II) Les abscisses curvilignes d'un point sur le cercle trigonométrique

1) soit M un point du cercle trigonométrique d'origine I

Et soit α la longueur de l'arc IM (on allant de I vers M dans le sens direct) en radian

Tout réel qui s'écrit sous la forme : $\alpha + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ s'appelle abscisse curviligne de M

2) si x et x' deux abscisses curvilignes du même point M dans le cercle trigonométrique alors il existe un $k \in \mathbb{Z}$ tel que : $x - x' = 2k\pi$ on écrit : $x \equiv x' [2\pi]$: Et on lit : x est congrue a x' modulo 2π



3) abscisse curviligne principale

parmi les abscisses curvilignes d'un point M du cercle trigonométrique une seule se situe dans l'intervalle $]-\pi ; \pi]$ et on l'appelle abscisse curviligne principale

III) Relation de Chasles pour les angles orientés de deux demi-droites et de vecteurs

1) Soit $[Ox)$ et $[Oy)$ et $[Oz)$ trois demi-droites d'origine O

$$\begin{aligned} \text{On a : } & \overline{(Ox; Oy)} + \overline{(Oy; Oz)} \equiv \overline{(Ox; Oz)}[2\pi] \\ & \overline{(Ox; Oy)} \equiv -\overline{(Oy; Ox)}[2\pi] \end{aligned}$$

2) l'angle orienté des vecteurs non nuls \vec{u} et \vec{v} dans cet ordre est l'angle noté : $(\vec{U}; \vec{V})$

3) Pour des vecteurs non nuls, on a :

$$\begin{aligned} \text{a) } & \overline{(\vec{u}; \vec{u})} \equiv 0[2\pi] \quad \text{b) } \overline{(\vec{u}; -\vec{u})} \equiv \pi[2\pi] \\ \text{c) } & \overline{(\vec{u}; \vec{v})} + \overline{(\vec{v}; \vec{w})} \equiv \overline{(\vec{u}; \vec{w})}[2\pi] \text{ relation de Chasles} \end{aligned}$$

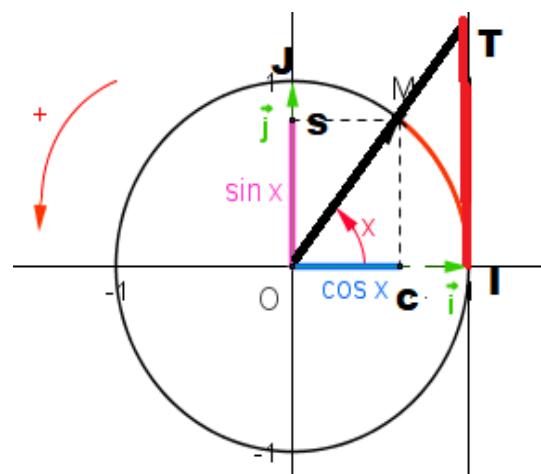
Et on a : $(\vec{v}, \vec{u}) = -(\vec{u}, \vec{v}) + 2k\pi$

$$(-\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}) + \pi + 2k\pi$$

$$(-\vec{u}, -\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}) + 2k\pi$$

$$(\vec{u}, -\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}) + \pi + 2k\pi$$

IV) Les rapports trigonométriques d'un nombre réel.



1) Soit (C) un cercle trigonométrique de centre O et d'origine I et Soit $x \in \mathbb{R}$ il existe un point M de (C) unique tel que x est une abscisse curviligne de M

Soit C le projeté orthogonal de M sur (OI)

Et soit S le projeté orthogonal de M sur (OJ)

- Le cosinus du nombre réel x est l'abscisse de M

Et on note $\cos x$.

- Le sinus du nombre réel x est l'ordonnée de M et on note $\sin x$.

- Soit (Δ) la droite tangente à (C) en I

Si $M \neq J$ et $M \neq J'$ alors la droite (OM) coupe la tangente (Δ) en un point T

Le nombre réel \overline{IT} l'abscisse de T sur l'axe (Δ) est La tangente du nombre réel x et on note $\tan x$.

Remarques :

✓ Les rapports trigonométriques : $\cos x$ et $\sin x$ et $\tan x$. sont aussi appelés cosinus et sinus et tangente de l'angle orienté $(\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OM})$

✓ $\tan x$ existe ssi $x \neq -\frac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

✓ La cotangente de x est le nombre réel x noté cotant x et on a : $\cotan x = \frac{1}{\tan x}$

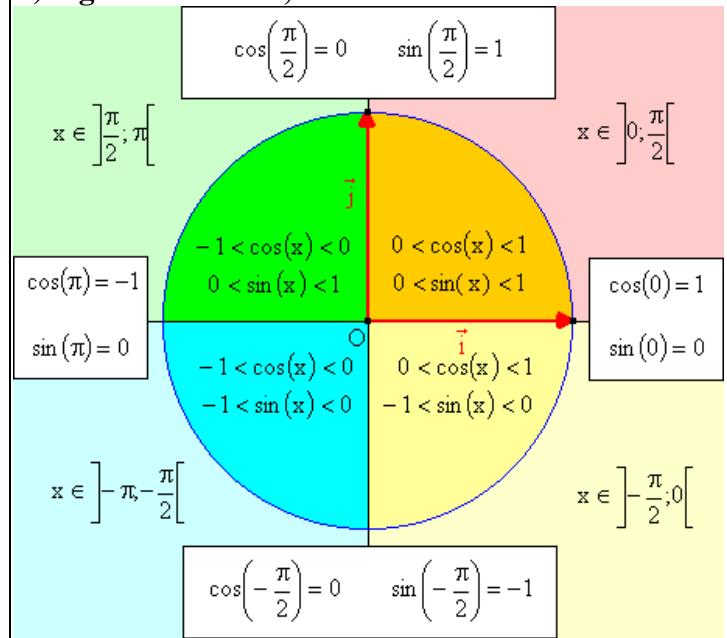
2) Cosinus, sinus et tangente d'angles remarquables :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0

3) Propriétés : Pour tout nombre réel x , on a :

- 1) $-1 \leq \cos x \leq 1$
- 2) $-1 \leq \sin x \leq 1$
- 3) $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$
- 4) $\cos x = \cos(x + 2k\pi)$ où $k \in \mathbb{Z}$
- 5) $\sin x = \sin(x + 2k\pi)$ où k entier relatif
- 6) si $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ alors : $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$
- 7) si $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ alors : $\tan(x + k\pi) = \tan x$
- 8) $: 1 + (\tan x)^2 = \frac{1}{(\cos x)^2}$ si $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$
- 9) $\cos(-x) = \cos x$ et $\sin(-x) = -\sin x$
- 10) $\cos(\pi + x) = -\cos x$ et $\sin(\pi + x) = -\sin x$
- 11) $\cos(\pi - x) = -\cos x$ et $\sin(\pi - x) = \sin x$
- 12) $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$
- 13) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$
- 14) $\tan(\pi - x) = -\tan x$ et $\tan(\pi + x) = \tan x$ si $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$
- 15) $\tan(\pi - x) = -\tan x$ et $\tan(\pi + x) = \tan x$ si $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

V) Signe de Cosinus, sinus



- Si $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ alors $\cos x \geq 0$
- Si $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$ alors $\cos x \leq 0$
- Si $0 \leq x \leq \pi$ alors $\sin x \geq 0$
- Si $\pi \leq x \leq 2\pi$ alors $\sin x \leq 0$

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices

Que l'on devient un mathématicien

