Tronc CS — PROF : ATMANI NAJIB

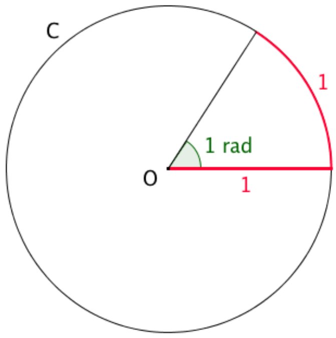
TRIGONOMÉTRIE1

Leçon: TRIGONOMÉTRIE
Présentation globale

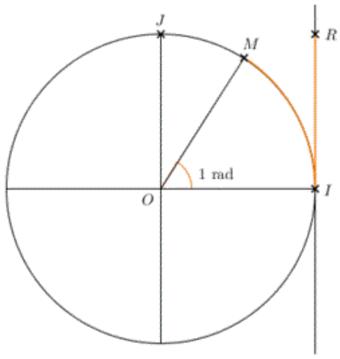
I) Le radian et le cercle trigonométrique :

1) Le radian

Définition :
Soit un cercle *C* de centre O et de rayon 1.
On appelle radian, noté *rad*, la mesure de l'angle au centre qui intercepte un arc de longueur 1 du cercle.

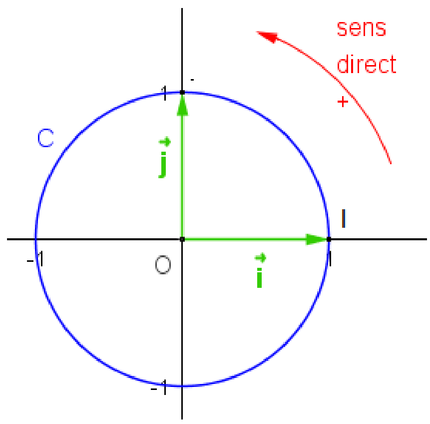


Remarque1 : On peut étendre cette définition à tout cercle de rayon R, en appelant radian la mesure d'un angle interceptant un arc dont la longueur est R.
Remarque2 :
Le radian est aussi une unité de mesure permettant de mesurer la longueur des arcs sur le cercle trigonométrique



2) Cercle trigonométrique

Définition1 :
Sur un cercle, on appelle sens direct, sens positif ou sens trigonométrique le sens contraire des aiguilles d'une montre.
Définition2 : on appelle cercle trigonométrique tout cercle centre O et de rayon 1 muni d'un point d'origine I
et d'un sens de parcours appelé direct (sens contraire au sens des aiguilles d'une montre)



3) La relation entre le degré et le radian

Proposition :
• Les mesures en radian et en degré d'un même angle sont proportionnelles
• Si x est la mesure d'un angle en radian et y sa mesure en degré alors : $\frac{x}{\pi}=\frac{y}{180}$

Exemples :

1)Un angle plein (tour complet) mesure 2π radians.

En effet on a $y = 360^\circ$

Et on a : $\frac{x}{\pi} = \frac{y}{180}$ donc $\frac{x}{\pi} = \frac{360}{180}$ donc $\frac{x}{\pi} = 2$ donc $x = 2\pi$ rad

2)on a : $\frac{1rad}{\pi} = \frac{y}{180}$ donc $\pi y = 180rad$ donc $y = \frac{180}{\pi} \simeq \frac{180}{3,14} \simeq 57,3^\circ$

Donc : $1rad \simeq 57,3^\circ$

3) <u>Correspondance degrés et radians</u>

Ainsi, à 2π radians (tour complet), on fait correspondre un angle de 360°.
Par proportionnalité, on obtient les correspondances suivantes :

Mesure en radians x rad	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	2π
Mesure en degrés y°	0	30°	45°	60°	90°	180°	360°

APPLICATION :

1) Donner la mesure en radians de l'angle de mesure 33°.

2) Donner la mesure en degrés de l'angle de mesure $\frac{3\pi}{8}$ rad.

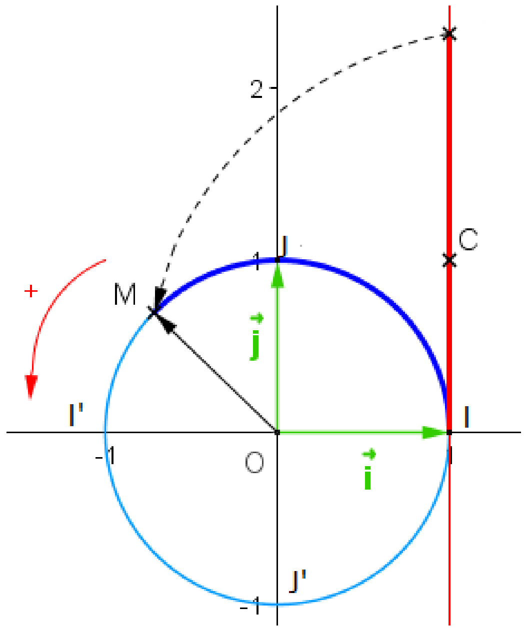
π	?	$\frac{3\pi}{8}$
180°	33°	?

1) $x = 33 \times \frac{\pi}{180} = \frac{11\pi}{60}$ 2) $y = \frac{3\pi}{8} \times \frac{\pi}{180} = 67,5°$

II) Les abscisse curviligne d'un point sur le cercle trigonométrique et l'angle orienté de deux demi- droites (ou de deux vecteurs):

1)Les abscisse curviligne d'un point sur le cercle trigonométrique

a) **<u>Enroulement d'une droite autour du cercle trigonométrique</u>**



si le zéro de droite numérique coïncide avec l'origine I cercle trigonométrique ; et on enroule la demi- droite des réels positifs sur le cercle trigonométrique Dans le sens direct et on enroule la demi- droite des réels négatifs sur le cercle trigonométrique Dans le sens inverse chaque point M du cercle est ainsi recouvert par une infinité de nombres réels qui s'appellent : abscisses curvilignes de M

b) Définition : soit M un point du cercle trigonométrique d'origine I

Et soit α la longueur de l'arc IM l(on allant de I vers M dans le sens direct) en radian

Tout réel qui s'écrit sous la forme : $\alpha + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ s'appelle abscisse curviligne de M

Proposition : si x et x' deux abscisses curvilignes du même point M dans le cercle trigonométrique alors il existe un $k \in \mathbb{Z}$ tel que : $x - x' = 2k\pi$ on écrit : $x \equiv x'[2\pi]$

Et on lit : x est congrue a x' modulo 2π

Exemples :

1) si $M = I$ alors $II = 0$ donc les abscisses curvilignes de I sont de la forme :
$0 + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ par ex : 0 , 2π , -2π, 4π , -4π.......

2) si $M = J$ alors $IJ = \frac{\pi}{2}$ donc les abscisses curvilignes de J sont de la forme :

$\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ par ex : $\frac{\pi}{2}$, $-\frac{3\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{2}$, $-\frac{7\pi}{2}$, $\frac{9\pi}{2}$.......

3) si $M = I'$ alors $II' = \pi$ donc les abscisses curvilignes de I' sont de la forme :
$\pi + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ par ex : π , $-\pi$, 3π, -3π , 5π.......

4) si $M = J'$ alors $IJ' = \frac{3\pi}{2}$ donc les abscisses curvilignes de J' sont de la forme :

$\frac{3\pi}{2} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ par ex : $\frac{3\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2}$, $-\frac{5\pi}{2}$, $\frac{7\pi}{2}$, $\frac{11\pi}{2}$.......

5) $\frac{49\pi}{6} = \frac{48\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = 8\pi + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + 4 \times 2\pi$. Par conséquent les réels $\frac{49\pi}{6}$ et $\frac{\pi}{6}$ sont représentés par un même point sur le cercle trigonométrique.

c) <u>abscisse curviligne principale</u>

Proposition et définition :

<u>Définition :</u> parmi les abscisses curvilignes d'un point M du cercle trigonométrique
Une seule se situe dans l'intervalle $]-\pi ; \pi]$.

On l'appelle abscisse curviligne principale d'un point M

Exemples :

1) les abscisses curvilignes de I sont de la forme : $0 + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$
Donc 0 est l'abscisses curviligne principale de I car $0 \in]-\pi ; \pi]$

2) pour J on a $\frac{\pi}{2} \in]-\pi ; \pi]$ Donc $\frac{\pi}{2}$ est l'abscisses curviligne principale de J

3) de même J on a $\pi \in]-\pi ; \pi]$ Donc π est l'abscisses curviligne principale de I'

4) de même J' on a $-\frac{\pi}{2} \in]-\pi ; \pi]$ Donc $-\frac{\pi}{2}$ est l'abscisses curviligne principale de J'

APPLICATION :

1)Déterminer l'abscisses curviligne principale de chacune des abscisses suivantes

7π , $\frac{110\pi}{3}$, $\frac{19\pi}{4}$, $-\frac{131\pi}{3}$, $-\frac{217\pi}{6}$

2)Placer sur le cercle trigonométrique les points $A(0)$; $B\left(\frac{\pi}{2}\right)$; $C\left(\frac{\pi}{4}\right)$; $D\left(\frac{\pi}{3}\right)$; $E\left(\frac{\pi}{6}\right)$

$M\left(\frac{7\pi}{2}\right)$; $H\left(-\frac{\pi}{4}\right)$; $G\left(-\frac{\pi}{2}\right)$; $F\left(\frac{5\pi}{6}\right)$; $I\left(\frac{2007\pi}{4}\right)$; $N\left(\frac{3\pi}{2}\right)$

Correction :

- $x=7\pi$ et soit α l'abscisses curviligne principale associée a x

Alors il existe un $k\in\mathbb{Z}$ tel que : $\alpha-x=2k\pi$ c a d $\alpha=7\pi+2k\pi$ et $\alpha\in]-\pi;\pi]$

c a d $-\pi<7\pi+2k\pi\leq\pi$ et $k\in\mathbb{Z}$

ssi $\pi-7\pi<2k\pi\leq\pi-7\pi$ ssi $-8<2k\leq-6$ ssi $-4<k\leq-3$ et $k\in\mathbb{Z}$

alors $k=-3$ et donc $\alpha=7\pi+2(-3)\pi=7\pi-6\pi=\pi$

donc l'abscisses curviligne principale associée a $x=7\pi$ est $\alpha=\pi$

- $x=\frac{110\pi}{3}$ et soit α l'abscisses curviligne principale associée a x

Alors il existe un $k\in\mathbb{Z}$ tel que : $\alpha-x=2k\pi$ c a d $\alpha=\frac{110\pi}{3}+2k\pi$ et $\alpha\in]-\pi;\pi]$

c a d $-\pi<\frac{110\pi}{3}+2k\pi\leq\pi$ et $k\in\mathbb{Z}$

ssi $-\pi-\frac{110\pi}{3}<2k\pi\leq\pi-\frac{110\pi}{3}$ ssi $-\frac{113\pi}{3}<2k\pi\leq-\frac{107\pi}{3}$ ssi

$-\frac{113}{6}<k\leq-\frac{107}{6}$ et $k\in\mathbb{Z}$ ssi $-18.83<k\leq-17.83$ et $k\in\mathbb{Z}$

alors $k=-18$ et donc $\alpha=\frac{110\pi}{3}+2k\pi=\frac{110\pi}{3}+2(-18)\pi=\frac{110\pi-108\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}$

donc l'abscisses curviligne principale associée a $x=\frac{110\pi}{3}$ est $\alpha=\frac{2\pi}{3}$

- $x=\frac{19\pi}{4}$

On a $\frac{19\pi}{4}=\frac{16\pi}{4}+\frac{3\pi}{4}=4\pi+\frac{3\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}+2\times2\pi$ et $\frac{3\pi}{4}\in]-\pi;\pi]$

donc l'abscisses curviligne principale associée a $\frac{19\pi}{4}$ est $\alpha=\frac{3\pi}{4}$

- $x=-\frac{131\pi}{3}$ et soit α l'abscisses curviligne principale associée a x

Alors il existe un $k\in\mathbb{Z}$ tel que : $\alpha-x=2k\pi$ c a d $\alpha=-\frac{131\pi}{3}+2k\pi$ et $\alpha\in]-\pi;\pi]$

c a d $-\pi<-\frac{131\pi}{3}+2k\pi\leq\pi$ et $k\in\mathbb{Z}$

ssi $-\pi+\frac{131\pi}{3}<2k\pi\leq\pi+\frac{131\pi}{3}$ ssi $\frac{128\pi}{3}<2k\pi\leq\frac{134\pi}{3}$

ssi $\frac{128}{6}<k\leq\frac{134}{6}$ et $k\in\mathbb{Z}$ ssi $21.33<k\leq 22.33$ et $k\in\mathbb{Z}$

alors $k=22$ et donc $\alpha=-\frac{131\pi}{3}+2k\pi=-\frac{131\pi}{3}+2(22)\pi=\frac{-131\pi+132\pi}{3}=\frac{\pi}{3}$

donc l'abscisses curviligne principale associée a $x=-\frac{131\pi}{3}$ est $\alpha=\frac{\pi}{3}$

- $x=-\frac{217\pi}{6}$ et soit α l'abscisses curviligne principale associée a x

Alors il existe un $k\in\mathbb{Z}$ tel que : $\alpha-x=2k\pi$ c a d $\alpha=-\frac{217\pi}{6}+2k\pi$ et $\alpha\in]-\pi;\pi]$

c a d $-\pi<-\frac{217\pi}{6}+2k\pi\leq\pi$ et $k\in\mathbb{Z}$

ssi $-\pi+\frac{217\pi}{6}<2k\pi\leq\pi+\frac{217\pi}{6}$ ssi $\frac{211\pi}{6}<2k\pi\leq\frac{223\pi}{6}$

ssi $\frac{211}{12}<k\leq\frac{223}{12}$ et $k\in\mathbb{Z}$ ssi $17.58<k\leq 18.58$ et $k\in\mathbb{Z}$

alors $k=18$ et donc $\alpha=-\frac{217\pi}{6}+2k\pi=-\frac{217\pi}{6}+2(18)\pi=\frac{-217\pi+216\pi}{6}=-\frac{\pi}{6}$

donc l'abscisses curviligne principale associée a $x=-\frac{217\pi}{6}$ est $\alpha=-\frac{\pi}{6}$

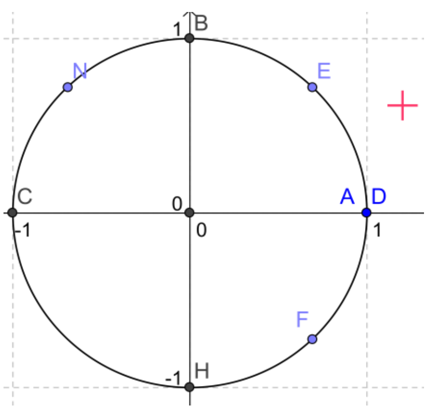
2)Placer sur le cercle trigonométrique les points $A(0)$; $B\left(\frac{\pi}{2}\right)$; $C\left(\frac{\pi}{4}\right)$; $D\left(\frac{\pi}{3}\right)$; $E\left(\frac{\pi}{6}\right)$

$M\left(\frac{7\pi}{2}\right)$; $H\left(-\frac{\pi}{4}\right)$; $G\left(-\frac{\pi}{2}\right)$; $F\left(\frac{5\pi}{6}\right)$; $I\left(\frac{2007\pi}{4}\right)$; $N\left(\frac{3\pi}{2}\right)$

- $x=\frac{7\pi}{2}$ On a $\frac{7\pi}{2}=\frac{8\pi-\pi}{2}=\frac{8\pi}{2}-\frac{\pi}{2}=4\pi-\frac{\pi}{2}=-\frac{\pi}{2}+2\times 2\pi$ et $-\frac{\pi}{2}\in]-\pi;\pi]$

donc l'abscisses curviligne principale associée a $x=\frac{7\pi}{2}$ est $\alpha=-\frac{\pi}{2}$

- $x=\frac{2007\pi}{4}$



Methode1 : On divise 2007 par 4 on trouve $501,75$ on prend le nombre entier proche ex : 502

Donc : $\frac{2007\pi}{4}-502\pi=\frac{2007\pi}{4}-\frac{2008\pi}{4}=-\frac{\pi}{4}$

$\frac{2007\pi}{4}=-\frac{\pi}{4}+502\pi=-\frac{\pi}{4}+2\times 251\pi$ et $-\frac{\pi}{4}\in]-\pi;\pi]$

donc l'abscisses curviligne principale associée a

$x=\frac{2007\pi}{4}$ est $\alpha=-\frac{\pi}{4}$

Methode2 : $-\pi<\frac{2007\pi}{4}+2k\pi\leq\pi$

$-1<\frac{2007}{4}+2k\leq 1$ ssi $-1-\frac{2007}{4}<2k\leq 1-\frac{2007}{4}$

ssi $-\frac{2011}{8}<k\leq -\frac{2003}{8}$ donc $-251,3\simeq -\frac{2011}{8}<k\leq -\frac{2003}{8}\simeq -250,3$

Donc $k=-251$ Donc $\alpha=\frac{2007\pi}{4}+2(-251)\pi=-\frac{\pi}{4}$

Exercice :
1)Déterminer l'abscisses curviligne principale de chacune des points suivants
$M_0\left(\frac{9\pi}{2}\right)$; $M_1\left(\frac{11\pi}{3}\right)$; $M_2\left(\frac{67\pi}{4}\right)$; $M_3\left(\frac{19\pi}{3}\right)$

Correction :

- $x=\frac{9\pi}{2}$

Methode1: $\frac{9\pi}{2}=\frac{8\pi+\pi}{2}=\frac{8\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=4\pi+\frac{\pi}{2}=2\times 2\pi+\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}\in\left]-\pi\,;\pi\right]$

donc l'abscisses curviligne principale du point M_0 est $\alpha=\frac{\pi}{2}$

Methode2: $-\pi<\frac{9\pi}{2}+2k\pi\leq\pi$ et $k\in\mathbb{Z}$

Donc $-1<\frac{9}{2}+2k\leq 1$ Donc $-1-\frac{9}{2}<-\frac{9}{2}+\frac{9}{2}+2k\leq 1-\frac{9}{2}$

Donc $-\frac{11}{2}<2k\leq -\frac{7}{2}$ Donc $-\frac{11}{4}<k\leq -\frac{7}{4}$

Donc $-2,7\simeq -\frac{11}{4}<k\leq -\frac{7}{4}\simeq -1,7$ et $k\in\mathbb{Z}$

Donc $k=-2$ Donc $\alpha=\frac{9\pi}{2}+2(-2)\pi=\frac{9\pi}{2}-4\pi=\frac{9\pi-8\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$

donc l'abscisses curviligne principale du point M_0 est $\alpha=\frac{\pi}{2}$

- $M_1\left(\frac{11\pi}{3}\right)$

Methode1: On a $\frac{11\pi}{3}=\frac{12\pi-\pi}{3}=4\pi-\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{3}+2\times 2\pi$ et $-\frac{\pi}{3}\in\left]-\pi\,;\pi\right]$

donc l'abscisses curviligne principale du point M_1 est $\alpha=-\frac{\pi}{3}$

Methode2: $-\pi<\frac{11\pi}{3}+2k\pi\leq\pi$ et $k\in\mathbb{Z}$

Donc $-1<\frac{11}{3}+2k\leq 1$ Donc $-1-\frac{11}{3}<-\frac{11}{3}+\frac{11}{3}+2k\leq 1-\frac{11}{3}$

Donc $-\frac{14}{3}<2k\leq -\frac{8}{3}$ Donc $-\frac{7}{3}<k\leq -\frac{4}{3}$

Donc $-2,3 \simeq -\frac{7}{3} < k \leq -\frac{4}{3} \simeq -1,3$ et $k \in \mathbb{Z}$

Donc $k = -2$ Donc $\alpha = \frac{11\pi}{3} + 2(-2)\pi = \frac{11\pi}{3} - 4\pi = \frac{11\pi - 12\pi}{3} = -\frac{\pi}{3}$

donc l'abscisses curviligne principale du point M_1 est $\alpha = -\frac{\pi}{3}$

- $M_2\left(\frac{67\pi}{4}\right)$

Methode1: On a $\frac{67\pi}{3} = \frac{64\pi + 3\pi}{4} = \frac{64\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} = 16\pi + \frac{3\pi}{4} = 2\times 8\pi + \frac{3\pi}{4}$ et $\frac{3\pi}{4} \in \left]-\pi\,;\pi\right]$

donc l'abscisses curviligne principale du point M_2 est $\alpha = \frac{3\pi}{4}$

Methode2: $-\pi < \frac{67\pi}{4} + 2k\pi \leq \pi$ et $k \in \mathbb{Z}$

Donc $-1 < \frac{67}{4} + 2k \leq 1$ Donc $-1 - \frac{67}{4} < -\frac{67}{4} + \frac{67}{4} + 2k \leq 1 - \frac{67}{4}$

Donc $-\frac{71}{4} < 2k \leq -\frac{63}{4}$ Donc $-8,8 \simeq -\frac{71}{8} < k \leq -\frac{63}{8} \simeq -7,8$ et $k \in \mathbb{Z}$

Donc $k = -8$ Donc $\alpha = \frac{67\pi}{4} + 2(-8)\pi = \frac{67\pi}{4} - 16\pi = \frac{67\pi - 64\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$

donc l'abscisses curviligne principale du point M_2 est $\alpha = \frac{3\pi}{4}$

- $M_3\left(\frac{19\pi}{3}\right)$

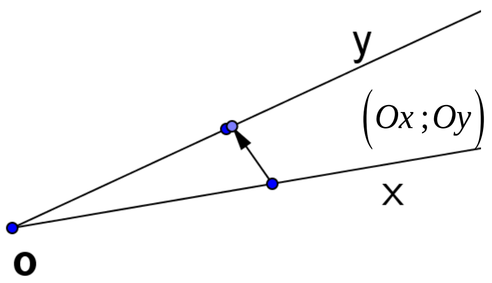
On a $\frac{19\pi}{3} = \frac{18\pi + \pi}{3} = \frac{18\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = 6\pi + \frac{\pi}{3} = 2\times 3\pi + \frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{3} \in \left]-\pi\,;\pi\right]$

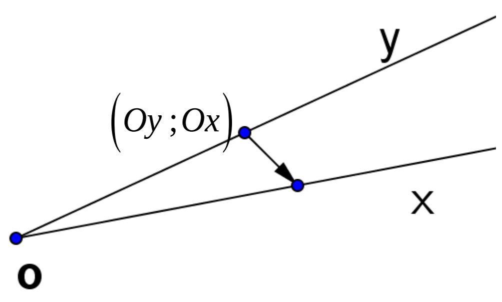
donc l'abscisses curviligne principale du point M_3 est $\alpha = \frac{\pi}{3}$

3)L'angle orienté de deux demi-droites

- **Définition :** Soit $[Ox)$ et $[Oy)$ deux demi-droites ayant même origine O

Le couple $\left([Ox);[Oy)\right)$ constitué des demi-droites $[Ox)$ et $[Oy)$ (dans cet ordre) détermine un angle orienté qu'on le note : $\left(\widehat{[Ox);[Oy)}\right)$



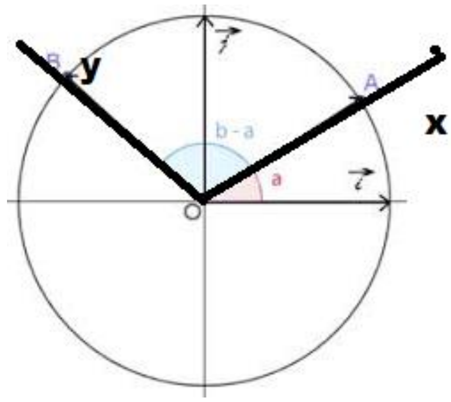


Remarque : Le couple $([Oy);[Ox))$ constitué des demi-droites $[Oy)$ et $[Ox)$ (dans cet ordre) détermine un angle orienté qu'on le note : $([Oy);[Ox))$

- **Mesures de l'angle orienté de deux demi-droites**

Soit $[Ox)$ et $[Oy)$ deux demi-droites d'origine O et soit (C) le cercle trigonométrique de cercle O

Soit A et B les points d'intersections de (C) avec les demi-droites $[Ox)$ et $[Oy)$ respectivement si a et b sont deux abscisses curvilignes respectives de A et B .



Définitions :

✓ On appelle mesure de l'angle orienté $(Ox;Oy)$ tout réel qui s'écrit sous la forme :

$b-a+2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ et on le note :

$\overline{(Ox;Oy)} = b-a+2k\pi$

✓ Parmi Toute les mesures de $(Ox;Oy)$

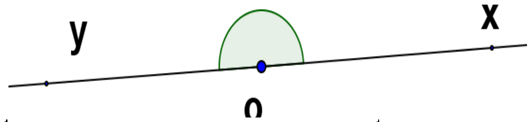
Une seule se situe dans l'intervalle $]-\pi\,;\pi]$ .et elle s'appelle abscisse curviligne principale de l'angle $(Ox;Oy)$

Cas particuliers :

1)L'angle orienté nul :

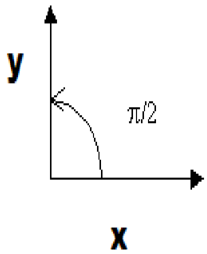
$\overline{(Ox;Ox)} = 0+2k\pi$ ou $\overline{(Ox;Ox)} \equiv 0[2\pi]$

2)L'angle orienté plat : $[Ox)$ et $[Oy)$ opposées



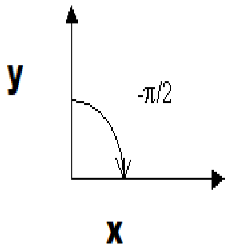
$\overline{(Ox;Oy)} = \pi+2k\pi$ ou $\overline{(Ox;Oy)} \equiv \pi[2\pi]$

2)L'angle orienté droit direct



$\overline{(Ox;Oy)} = \frac{\pi}{2}+2k\pi$ ou $\overline{(Ox;Oy)} \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

L'angle orienté droit indirect



$\overline{(Ox;Oy)} = -\frac{\pi}{2}+2k\pi$ ou $\overline{(Ox;Oy)} \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$

- **Relation de Chasles pour les angles orientés de deux demi-droites**

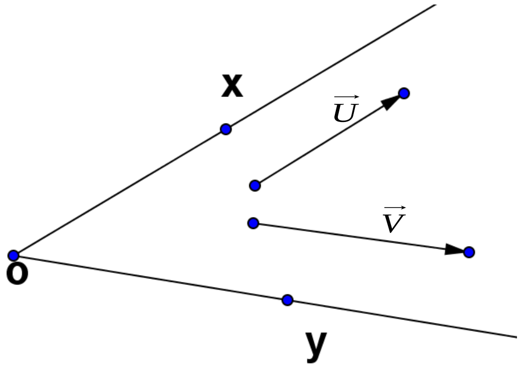
Soit $[Ox)$ et $[Oy)$ et $[Oz)$ trois demi-droites d'origine O

On a : $\overline{(Ox;Oy)} + \overline{(Oy;Oz)} \equiv \overline{(Ox;Oz)}[2\pi]$

Conséquence :

$\overline{(Ox;Oy)} \equiv -\overline{(Oy;Ox)}[2\pi]$

4)L'angle orienté de deux demi-droites



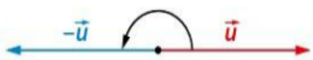
Soit $\vec{U}$ et $\vec{V}$ deux vecteurs non nuls et $[Ox)$ et $[Oy)$ deux demi-droites dirigées respectivement par $\vec{U}$ et $\vec{V}$

Définition : l'angle orienté des vecteurs non nuls $\vec{U}$ et $\vec{V}$ dans cet ordre est l'angle orienté $(Ox;Oy)$ et on le note : $(\vec{U};\vec{V})$

- ✓ Les mesures de $(\vec{U};\vec{V})$ sont Les mesures de l'angle orienté $(Ox;Oy)$
- ✓ La mesure principale de $(\vec{U};\vec{V})$ est La mesure principale de $(Ox;Oy)$ et on la note : $\overline{(\vec{U};\vec{V})}$

Propriétés : Pour tout vecteur $\vec{u}$ non nul, on a :

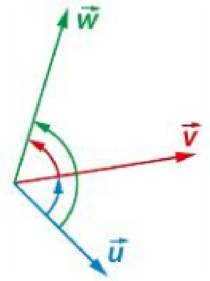
1) $\overline{(\vec{u};\vec{u})} \equiv 0[2\pi]$ 2) $\overline{(\vec{u};-\vec{u})} \equiv \pi[2\pi]$



- **Relation de Chasles pour les angles orientés de deux vecteurs**

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ non nuls, on a :

$\overline{(\vec{u};\vec{v})} + \overline{(\vec{v};\vec{w})} \equiv \overline{(\vec{u};\vec{w})}[2\pi]$



Voici des propriétés sur les angles orientés que nous allons démontrer à l'aide de la relation de Chasles :

Propriété : On considère deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

1. $(\vec{v}, \vec{u}) = -(\vec{u}, \vec{v}) + 2k\pi$
2. $(-\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}) + \pi + 2k\pi$
3. $(-\vec{u}, -\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}) + 2k\pi$
4. $(\vec{u}, -\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}) + \pi + 2k\pi$ où k est entier relatif

Démonstration :

1. D'après la relation de Chasles :

$(\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}, \vec{u}) = (\vec{u}, \vec{u}) = 0 + 2k\pi$

Donc $(\vec{v}, \vec{u}) = -(\vec{u}, \vec{v}) + 2k\pi$

2. D'après la relation de Chasles :

$(-\vec{u}, \vec{v}) = (-\vec{u}, \vec{u}) + (\vec{u}, \vec{v}) + 2k\pi = \pi + (\vec{u}, \vec{v}) + 2k\pi$

Donc $(-\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}) + \pi + 2k\pi$

3. D'après la relation de Chasles :

$(-u, -v) = (-u, u) + (u, v) + (v, -v) + 2k\pi = \pi + (\vec{u}, \vec{v}) + \pi + 2k\pi$

Donc $(-\vec{u}, -\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}) + 2k'\pi$

4. D'après la relation de Chasles :

$(\vec{u}, -\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}, -\vec{v}) + 2k\pi = (\vec{u}, \vec{v}) + \pi + 2k\pi$

Donc $(\vec{u}, -\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}) + \pi + 2k\pi$

III)Les rapports trigonométriques d'un nombre réel.

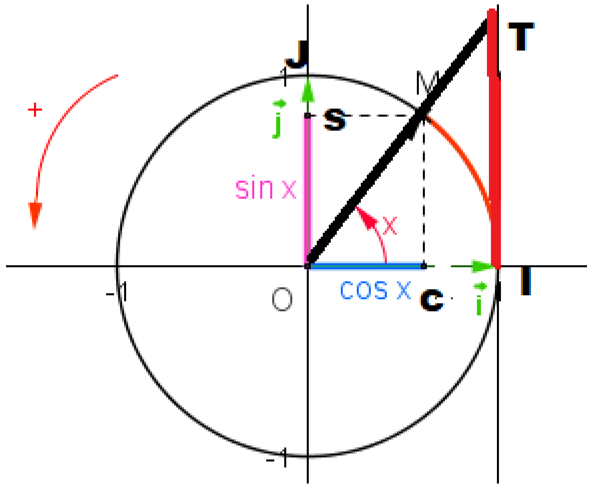
1)Repère orthonormé lié au cercle trigonométrique

Soit (C) un cercle trigonométrique de centre O et d'origine I

Soit J un point de (C) tel que L'angle orienté $(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OJ})$ soit droit et direct

On a donc $OI=OJ=1$ et $(OI)\perp(OJ)$

Le Repère orthonormé $(O;\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OJ})$ est appelé Repère orthonormé lié au cercle trigonométrique (C)



2)Les rapports trigonométriques d'un nombre réel.

Soit $x\in\mathbb{R}$ il existe un point M de (C) unique tel que x est une abscisse curviligne de M

✓ **Sinus et cosinus du nombre réel x**

Soit C le projeté orthogonal de M sur (OI)

Et soit S le projeté orthogonal de M sur (OJ)

Définitions :

- Le <u>cosinus du nombre réel</u> x est l'abscisse de M et on note **cos** x.
- Le <u>sinus du nombre réel</u> x est l'ordonnée de M et on note **sin** x.

✓ **Tangente du nombre réel x**

Soit (Δ) la droite tangente a (C) en I

Si $M\neq J$ et $M\neq J'$ alors la droite (OM) coupe la tangente (Δ) en un point T

Le nombre réel $\overline{IT}$ l'abscisse de T sur l'axe (Δ) est appelé : La tangente du nombre réel x et on note **tan** x.

Remarques :

✓ Les rapports trigonométriques : **cos** x *et* **sin** x *et* **tan** x. sont aussi appelés cosinus et sinus et tangente de l'angle orienté $(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{OM})$

✓ **tan** x existe ssi $x\neq\frac{\pi}{2}+2k\pi$ et $x\neq-\frac{\pi}{2}+2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$

✓ **La cotangente** de x est le nombre réel x noté **cotant** x et on a : $\text{cotan}\, x=\frac{1}{\tan x}$

2)Cosinus, sinus et tangente d'angles remarquables

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0

Propriétés :

Pour tout nombre réel x, on a :

1) $-1 \leq \cos x \leq 1$ 2) $-1 \leq \sin x \leq 1$ 3) $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

4) $\cos x = \cos(x + 2k\pi)$ où k entier relatif 5) $\sin x = \sin(x + 2k\pi)$ où k entier relatif

6) si $x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ et $x \neq -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ alors : $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

7) si $x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ et $x \neq -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ alors : $\tan(x + k\pi) = \tan x$

<u>Démonstration :</u> 4) et 5)

Aux points de la droite orientée d'abscisses x et $x + 2k\pi$ ont fait correspondre le même point du cercle trigonométrique.

3) le triangle (OCM) est rectangle en C. Le théorème de Pythagore donne alors $OC^2 + CM^2 = 1$. Or $OC = \cos x$ et $CM = OC = \sin x$

En remplaçant, il vient que : $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

<u>Remarque :</u>

On dit que cosinus et sinus sont périodiques de période 2π.

<u>Conséquence :</u>

Pour tracer la courbe représentative de la fonction cosinus ou de la fonction sinus, il suffit de la tracer sur un intervalle de longueur 2π et de la compléter par translation.

3)Propriétés de Cosinus, sinus et tangente

Pour tout nombre réel x, on a :

1) $\cos(-x) = \cos x$ et $\sin(-x) = -\sin x$ 2) $\cos(\pi + x) = -\cos x$ et $\sin(\pi + x) = -\sin x$

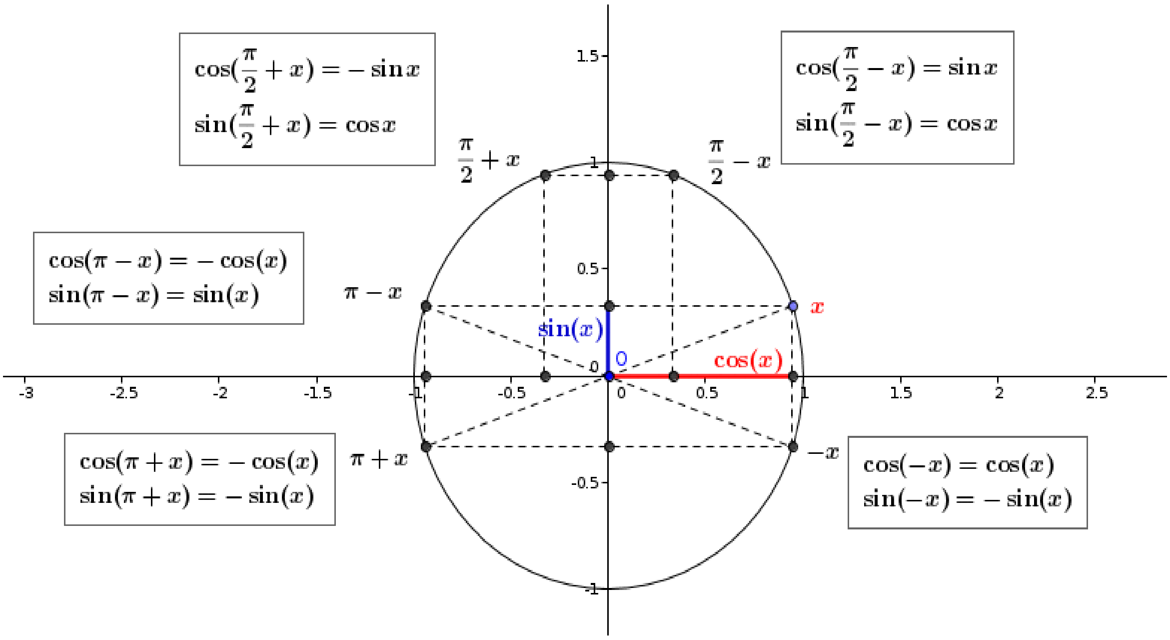
3) $\cos(\pi - x) = -\cos x$ et $\sin(\pi - x) = \sin x$ 4) $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$

5) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$ et $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$

6) $\tan(\pi - x) = -\tan x$ et $\tan(\pi + x) = \tan x$ si $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

7) $\tan(\pi - x) = -\tan x$ et $\tan(\pi + x) = \tan x$ si $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

Démonstrations : Par symétries, on démontre les résultats :



APPLICATION :

Calculer les rapports trigonométriques des nombre réel suivantes

$7\pi \quad , \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{3\pi}{4} \quad , -\frac{4\pi}{3}$

Solution :

- ✓ $\cos(7\pi) = \cos(\pi + 6\pi) = \cos(\pi + 2\times 3\pi) = \cos(\pi) = -1$

$\sin(7\pi) = \sin(\pi + 6\pi) = \sin(\pi + 2\times 3\pi) = \sin(\pi) = 0$

$\tan(7\pi) = \tan(0 + 7\pi) = \tan(0) = 0$

- ✓ On a : $\frac{5\pi}{6} = \frac{6\pi - \pi}{6} = \frac{6\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{6}$

$$\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\tan\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \tan\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \tan\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

- ✓ On a : $\frac{7\pi}{6} = \frac{6\pi + \pi}{6} = \frac{6\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = \pi + \frac{\pi}{6}$

$$\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}$$

$$\tan\left(\frac{7\pi}{6}\right)=\tan\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)=\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

✓ On a : $\frac{3\pi}{4}=\frac{4\pi-\pi}{4}=\frac{4\pi}{4}-\frac{\pi}{4}=\pi-\frac{\pi}{4}$

$$\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\tan\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)=-1$$

✓ On a : $\frac{4\pi}{3}=\frac{3\pi+\pi}{3}=\frac{3\pi}{3}+\frac{\pi}{3}=\pi+\frac{\pi}{3}$

$$\cos\left(-\frac{4\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}$$

$$\sin\left(-\frac{4\pi}{3}\right)=-\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)=-\sin\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan\left(-\frac{4\pi}{3}\right)=-\tan\left(\frac{4\pi}{3}\right)=-\tan\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=-\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\sqrt{3}$$

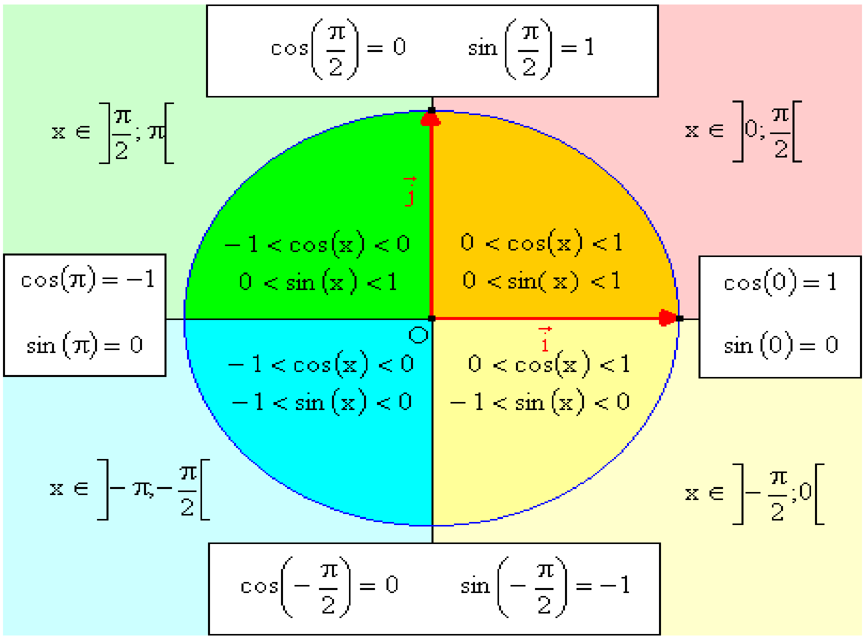
Exercice : montrer que : $1+(\tan x)^2=\frac{1}{(\cos x)^2}$ si $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$

Solution : $1+(\tan x)^2=1+\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^2=1+\frac{(\sin x)^2}{(\cos x)^2}=\frac{(\cos x)^2+(\sin x)^2}{(\cos x)^2}$

Et on a : $\cos^2 x+\sin^2 x=1$ donc : $1+(\tan x)^2=\frac{1}{(\cos x)^2}$

4)Signe de Cosinus, sinus

Le sinus et le cosinus de tout nombre réel font partie de l'intervalle [-1 ; 1]. Plus précisément, la position de M nous permet d'en savoir plus sur le cosinus et le sinus de x. Ainsi :



- *Si* $-\frac{\pi}{2}\leq x\leq\frac{\pi}{2}$ alors $\cos x\geq 0$
- *Si* $\frac{\pi}{2}\leq x\leq\frac{3\pi}{2}$ alors $\cos x\leq 0$
- *Si* $0\leq x\leq\pi$ alors $\sin x\geq 0$
- *Si* $\pi\leq x\leq 2\pi$ alors $\sin x\leq 0$

Exercice : montrer que : $\tan x=\frac{1}{3}$ et $\frac{\pi}{2}<x<\pi$

Calculer : 1) $\cos x$ 2) $\sin x$

Solution : 1) on a : $1+(\tan x)^2=\frac{1}{(\cos x)^2}$ donc $1+\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{\cos^2 x}$

Donc $1+\frac{1}{9}=\frac{1}{\cos^2 x}$ Donc $\frac{10}{9}=\frac{1}{\cos^2 x}$ Donc $10\cos^2 x=9$

Donc $\cos^2 x=\frac{9}{10}$ Donc $\cos x=\sqrt{\frac{9}{10}}$ et $\cos x=-\sqrt{\frac{9}{10}}$

Et on a $\frac{\pi}{2}<x<\pi$: donc $\cos x\leq 0$ Donc : $\cos x=-\sqrt{\frac{9}{10}}=-\frac{3\sqrt{10}}{10}$

2) on a : $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$: donc $\sin x=\tan x\times\cos x$ donc $\sin x=-\frac{1}{3}\times\frac{3\sqrt{10}}{10}=-\frac{\sqrt{10}}{10}$

Exercice : simplifier les expressions suivantes :

$A=\sin(\pi-x)\times\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\times\cos(\pi-x)$

$B=\frac{\sin x+\sin(\pi-x)}{\cos(\pi-x)}$

$C=\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)+\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)-\tan\left(\frac{5\pi}{6}\right)$

$D=\sin(11\pi-x)+\cos(5\pi+x)+\cos(14\pi-x)$

$E=\tan(\pi-x)+\tan(\pi+x)$

$F=\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right)+\sin^2\left(\frac{3\pi}{10}\right)$

$G=\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)+\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)+\cos\left(\frac{3\pi}{7}\right)+\cos\left(\frac{4\pi}{7}\right)+\cos\left(\frac{5\pi}{7}\right)+\cos\left(\frac{6\pi}{7}\right)$

$H=\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)+\sin^2\left(\frac{3\pi}{8}\right)+\sin^2\left(\frac{5\pi}{8}\right)+\sin^2\left(\frac{7\pi}{8}\right)$

Solution : on a : donc

$A=\sin(\pi-x)\times\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\times\cos(\pi-x)$

$A=\sin(x)\times\sin(x)-\cos x\times(-\cos x)=\sin^2 x+\cos^2 x=1$

$B=\frac{\sin x+\sin(\pi-x)}{\cos(\pi-x)}=\frac{\sin x+\sin x}{-\cos x}=-\frac{2\sin x}{\cos x}=-2\tan x$

$C=\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)+\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)-\tan\left(\frac{5\pi}{6}\right)=\cos\left(\frac{6\pi-\pi}{6}\right)+\sin\left(\frac{6\pi-\pi}{6}\right)-\tan\left(\frac{6\pi-\pi}{6}\right)$

$C=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)-\tan\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)+\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)$

$C=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}+\frac{\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)}=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}+\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{3}=-\frac{3\sqrt{3}}{6}+\frac{3}{6}+\frac{2\sqrt{3}}{6}$

Donc : $C=\frac{3-\sqrt{3}}{6}$

$D=\sin(11\pi-x)+\cos(5\pi+x)+\cos(14\pi-x)$

$D=\sin(10\pi+\pi-x)+\cos(4\pi+\pi+x)+\cos(2\times7\pi-x)$

$D=\sin(\pi-x)+\cos(\pi+x)+\cos(-x)$

$D=\sin(x)-\cos(x)+\cos(x)=\sin(x)$

$E=\tan(\pi-x)+\tan(\pi+x)=-\tan(x)+\tan(x)=0$

$F=\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right)+\sin^2\left(\frac{3\pi}{10}\right)$

On a $\frac{\pi}{5}+\frac{3\pi}{10}=\frac{2\pi}{10}+\frac{3\pi}{10}=\frac{5\pi}{10}=\frac{\pi}{2}$ donc : $\frac{3\pi}{10}=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}$

$F=\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right)+\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{5}\right)=\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right)+\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right)=1$

$G=\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)+\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)+\cos\left(\frac{3\pi}{7}\right)+\cos\left(\frac{4\pi}{7}\right)+\cos\left(\frac{5\pi}{7}\right)+\cos\left(\frac{6\pi}{7}\right)$

On a $\frac{\pi}{7}+\frac{6\pi}{7}=\pi$ donc : $\frac{\pi}{7}=\pi-\frac{6\pi}{7}$

Et on a $\frac{2\pi}{7}+\frac{5\pi}{7}=\pi$ donc : $\frac{5\pi}{7}=\pi-\frac{2\pi}{7}$

Et on a $\frac{3\pi}{7}+\frac{4\pi}{7}=\pi$ donc : $\frac{4\pi}{7}=\pi-\frac{3\pi}{7}$

Donc : $G=\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)+\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)+\cos\left(\frac{3\pi}{7}\right)+\cos\left(\pi-\frac{3\pi}{7}\right)+\cos\left(\pi-\frac{2\pi}{7}\right)+\cos\left(\pi-\frac{\pi}{7}\right)$

Donc : $G=\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)+\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)+\cos\left(\frac{3\pi}{7}\right)-\cos\left(\frac{3\pi}{7}\right)-\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right)-\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)=0$

$H=\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)+\sin^2\left(\frac{3\pi}{8}\right)+\sin^2\left(\frac{5\pi}{8}\right)+\sin^2\left(\frac{7\pi}{8}\right)$

On a $\frac{\pi}{8}+\frac{7\pi}{8}=\pi$ donc : $\frac{7\pi}{8}=\pi-\frac{\pi}{8}$

Et on a $\frac{3\pi}{8}+\frac{5\pi}{8}=\pi$ donc : $\frac{5\pi}{8}=\pi-\frac{3\pi}{8}$

Donc : $H=\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)+\sin^2\left(\frac{3\pi}{8}\right)+\sin^2\left(\pi-\frac{3\pi}{8}\right)+\sin^2\left(\pi-\frac{\pi}{8}\right)$

Donc : $H=+\sin^2\left(\frac{3\pi}{8}\right)+\sin^2\left(\frac{3\pi}{8}\right)+\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)=2\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)+2\sin^2\left(\frac{3\pi}{8}\right)$

Et on a $\frac{\pi}{8}+\frac{3\pi}{8}=\frac{\pi}{2}$ donc : $\frac{3\pi}{8}=\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}$

Donc on a : $H=2\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)+2\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}\right)$

Donc $H=2\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)+2\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right)=2\left(\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)+\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)=2\times1=2$