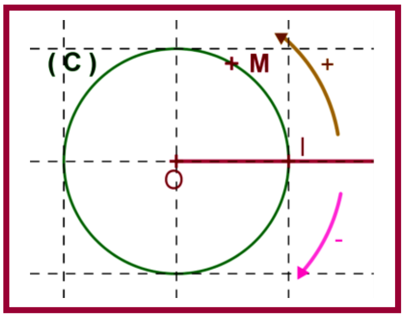
I. Orientation d'un plan – le cercle trigonométrique – abscisses curvilignes :– égalité de deux polynômes :

A. Orientation d'un plan:

a. Activité :

- On considère le plan (P) ; O est un point de (P) et (C) est un cercle de centre O et de rayon r .
- On prend le point I de (C) tel que la demi droite $[O,I)$ est horizontale et dirigée vers la droite .
- On construit un point M de (C) à partir de M on a de sens pour arriver à I , un sens est celui de la rotation des aiguilles du montre l'autre sens est le contraire de la rotation des aiguilles du montre.
- On choisit comme sens positif le sens contraire de la rotation des aiguilles du montre , on le note par $+$.
- On choisit comme sens négatif le sens de la rotation des aiguilles du montre , on le note par $-$.

b. Vocabulaire :



- On dit que le cercle est muni d'un origine I .
- On dit que le cercle est orienté positif ou direct qui est le sens contraire de la rotation des aiguilles du montre .
- Si tous les cercles du plan sont orientés d'une orientation positive on dit que le plan est orienté positif (ou direct)

B. le cercle trigonométrique :

a. Définition :

Tout cercle (C) du plan (P) possède :

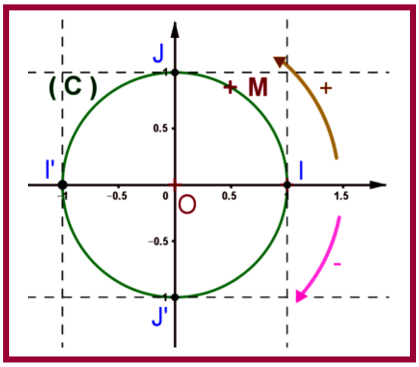
- son rayon est $r=1$
- muni d'un origine I .
- orienté positif .

ce cercle (C) est appelé cercle trigonométrique .

b. remarque :

si le plan est rapporté a un repère orthonormé $(O,\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ})$ et O est le centre du cercle (C) et le point J est placé dans le sens positif . on dit que le cercle trigonométrique (C) lié au repère orthonormé $(O,\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ})=(0,\vec{i},\vec{j})$ (avec $\overrightarrow{OI}=\vec{i}$ et $\overrightarrow{OJ}=\vec{j}$) .

Pour toutes les paragraphes qui nous reste : le cercle (C) est le cercle trigonométrique d'origine I et son centre est le point O .



C. Abscisses curvilignes :

a. Activité :

- On a : le périmètre du cercle trigonométrique (C) est $p=2r\pi=2\times1\times\pi=2\pi$.
- M est un point de (C) tel que l'arc géométrique $\left[IM\right]$ sa longueur est α (avec $0\le\alpha\le2\pi$) .

- Si on roule autour du cercle un fil de longueur $\alpha+2\pi$ la première extrémité en I .
  1. la position de la deuxième extrémité sur le cercle est en M
  2. Même point M pour les fils de longueur $\alpha+4\pi$ et $\alpha+6\pi$ ...
  3. un fil de longueur $\alpha+2\pi$ on le coupe en deux morceaux un de longueur α l'autre 2π . pour le fil de longueur α à partir de I dans le sens positif 2[ième] extrémité sera en M et à partir de M on place la 1[ère] extrémité du deuxième fil on cherche en allant dans le sens négatif la position du deuxième extrémité du fil sera aussi en M dans ce cas on écrit $\alpha-2\pi$ de même pour $\alpha-4\pi$ et $\alpha-6\pi$ ..... on obtient le même point M .

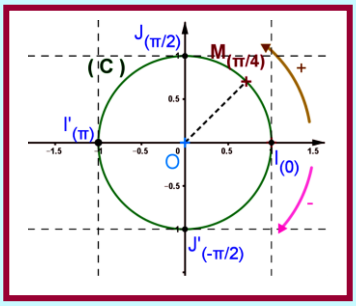
b. Vocabulaire :

Les nombres ...... $\alpha-6\pi$ et $\alpha-4\pi$ et $\alpha-2\pi$ et α et $\alpha+4\pi$ et $\alpha+6\pi$ ... on les notes par $\alpha+2k\pi$; $k\in\mathbb{Z}$ ces nombres sont appelés abscisses curvilignes du point M on les note $M_{(\alpha+2k\pi)}$ ou simplement par $M_{(\alpha)}$.

c. Définition :

$M_{(\alpha+2k\pi)}$ est un point de (C) il existe un et un seul abscisse curviligne de M qui appartienne à $]-\pi,\pi]$ (c.à.d. $-\pi<\alpha+2k\pi\leq\pi$) cet abscisse est appelé abscisse curviligne principal de M

d. Remarque :



- ✓ Si M est situé sur le demi cercle « supérieure » la mesure principale appartienne à $[0,\pi]$.
- ✓ Si non la mesure principale appartienne à $]-\pi,0]$.
- ✓ Les abscisses curvilignes de I sont $0+2k\pi=2k\pi$ donc d'où l'abscisse curviligne principale de I est 0 (zéro) .
- ✓ Les abscisses curvilignes de J sont $\frac{\pi}{2}+2k\pi$ donc d'où l'abscisse curviligne principale de J est $\frac{\pi}{2}$
- ✓ Les abscisses curvilignes de I' sont $\pi+2k\pi$ donc d'où l'abscisse curviligne principale de I' est π .
- ✓ Les abscisses curvilignes de J sont $\frac{-\pi}{2}+2k\pi$ donc d'où l'abscisse curviligne principale de J ' est $\frac{-\pi}{2}$

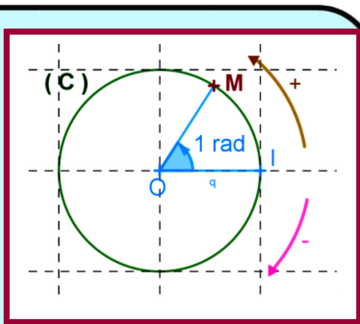
e. Exercice :

Donner les abscisses curvilignes des points de la figure .

II. Angle orienté de deux demi-droites – de deux vecteurs non nuls :

A. Radian – grade :

a. Définition :



A et B deux points du cercle trigonométrique (C) d'origine I et son centre est le point O . La longueur de l'arc géométrique $[AB]$ est 1 .

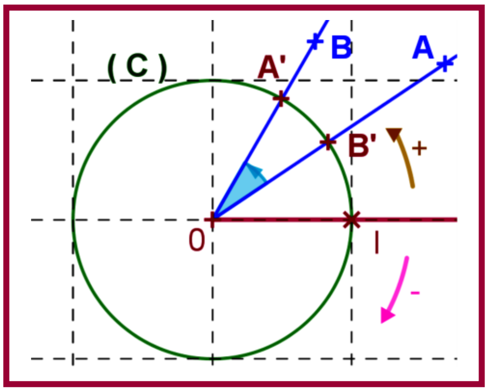
- l'angle de sommet O et qui intercepte l'arc $[AB]$ on dit que sa mesure est : 1 radian on note 1 rad . On a : $180^\circ=\pi$ rad et $90^\circ=\frac{\pi}{2}$ rad .... .

b. Remarque :

- Il existe une autre unité de mesure des angles , on l'appelle grade on la note par gr tel que $180^\circ = \pi \text{ rad} = 200\text{gr}$ et $90° = \frac{\pi}{2} \text{ rad} = 100 \text{ gr}$.
- Si un angle sa mesure est x et y et z respectivement en degré et radian et grade alors $\frac{x}{180^\circ} = \frac{y}{\pi} = \frac{z}{200}$

c. Exercice :

1. Exprimer en radian et en grade la mesure suivante : $60°$.
2. Exprimer en radian et en degré la mesure suivante : 150 gr .



B. Mesure d'un angle orienté de deux demi-droites :

a. Définition :

Soit $[OA)$ et $[OB)$ deux demi droites du plan (P) tel que : $A \neq 0$ et $B \neq O$.

Le couple $([OA),[OB))$ est appelé l'angle orienté du demi-droites on le note (OA,OB).

b. Remarque :

Le couple $([OB),[OA))$ détermine un autre angle orienté , on le note (OB,OA) qui différent de l'angle (OA,OB) .

c. Angles déterminer par deux demi droites :

On considère dans le plan (P) deux points A et B puis le cercle trigonométrique (C) de centre O . tel que : $A \neq 0$ et $B \neq O$.

Les deux demi-droites $[OA)$ et $[OB)$ coupent (C) respectivement en $A'_{(\alpha)}$ et $B'_{(\beta)}$ tel que leurs abscisses curvilignes sont α et β on a :

- Les mesures de l'angle orienté (OA,OB) sont les nombres réels $\beta - \alpha + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$

  on note : $(\overline{OA,OB}) \equiv \beta - \alpha \ [2\pi]$ ou encore $(\overline{OA,OB}) = \beta - \alpha + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$.

  On lit : mesures de l'angle orienté (OA,OB) congrue à $\beta - \alpha$ modulo 2π .
- La mesure qui vérifie $(\beta - \alpha + 2k\pi) \in]-\pi,\pi]$ s'appelle la mesure principale de l'angle orienté (OA,OB) .

d. Exemple :

On donne la mesure principale de $\left(\overline{OA,OB}\right) \equiv \frac{15\pi}{4}\ [2\pi]$.

1[ière] méthode :

On a : $\frac{15\pi}{4} = \frac{16-1}{4}\pi = 2\pi - \frac{\pi}{4}$ on a : $-\frac{\pi}{4} \in]-\pi,\pi]$ d'où la mesure principale est $-\frac{\pi}{4}$.

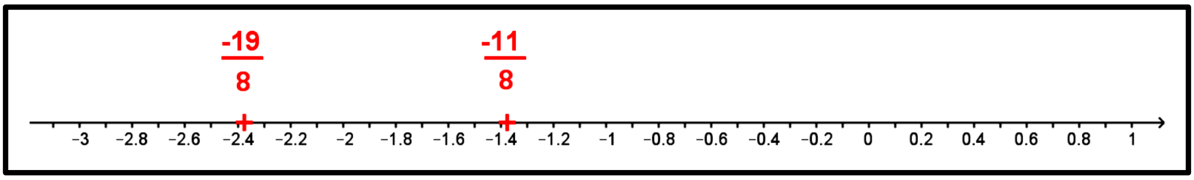
2[ième] méthode :

Puisque on a une mesure est $\frac{15\pi}{4}$ donc toutes les mesures sont de la forme $\frac{15\pi}{4} + 2k\pi$; $k \in \mathbb{Z}$

Donc la mesure principale vérifie la condition suivante : $\frac{15\pi}{4} + 2k\pi \in]-\pi,\pi]$

$$\frac{15\pi}{4} + 2k\pi \in]-\pi,\pi] \Leftrightarrow -\pi < \frac{15\pi}{4} + 2k\pi \le \pi$$
$$\Leftrightarrow -1 < \frac{15}{4} + 2k \le 1$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(-1 - \frac{15}{4}\right) < k \le \frac{1}{2}\left(1 - \frac{15}{4}\right)$$
$$\Leftrightarrow -\frac{19}{8} < k \le -\frac{11}{8} \quad \left(-\frac{19}{8} \simeq -2,375 - 1,375 \text{ et } -\frac{11}{8} \simeq -1,375\right)$$

Puisque $k \in \mathbb{Z}$ on obtient $k = -2$



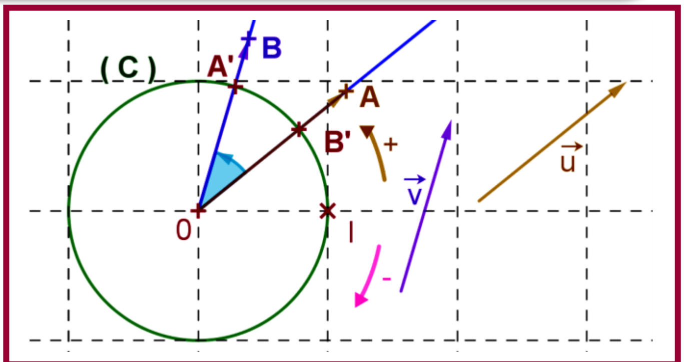
e. Propriété :

le plan (P) est orienté positif , O est un point de (P) .

soient $[OA)$ et $[OB)$ et $[OC)$ trois demi-droites de (P) on a :

- $\left(\overline{OA,OA}\right) \equiv 0[2\pi]$.
- $\left(\overline{OA,OB}\right) \equiv -\left(\overline{OB,OA}\right)[2\pi]$.
- $\left(\overline{OA,OB}\right) + \left(\overline{OB,OC}\right) \equiv \left(\overline{OA,OC}\right)[2\pi]$ (relation de shale)

2 Angle déterminer par deux vecteurs non nuls :



a. Définitions :

le plan (P) est orienté positif , O est un point de (P) .

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls de (P) .

soient A et B deux points de (P) tel que : $\vec{u}=\overrightarrow{OA}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{OB}$.

- l'angle orienté des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est l'angle orienté (OA,OB) (c.à.d. des deux demi-droites $[OA)$ et $[OB)$, on le note $(\vec{u},\vec{v})$.
- Les mesures de l'angle orienté (OA,OB) sont appelées les mesures de l'angle orienté $(\vec{u},\vec{v})$ on note $(\overline{\vec{u},\vec{v}})$
- On a : $(\overline{\vec{u},\vec{v}})\equiv(\overline{OA,OB})\ [2\pi]$.
- La mesure de l'angle orienté $(\vec{u},\vec{v})$ qui appartienne à $]-\pi,\pi]$ est appelée la mesure principale de $(\vec{u},\vec{v})$.

b. Propriété :

le plan (P) est orienté positif .

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs non nuls de (P) . on a :

- $(\overline{\vec{u},\vec{u}})\equiv 0\ [2\pi]$ (ou bien $(\overline{\vec{u},\vec{u}})=(\overline{\vec{u},\vec{u}})+2k\pi\ ;\ (k\in\mathbb{Z})$)
- $(\overline{\vec{u},\vec{v}})\equiv-(\overline{\vec{v},\vec{u}})\ [2\pi]$ (ou bien $(\overline{\vec{u},\vec{v}})\equiv-(\overline{\vec{v},\vec{u}})+2k\pi\ ;\ (k\in\mathbb{Z})$)
- $(\overline{\vec{u},\vec{v}})+(\overline{\vec{v},\vec{w}})\equiv(\overline{\vec{u},\vec{w}})\ [2\pi]$ (ou bien $(\overline{\vec{u},\vec{v}})+(\overline{\vec{v},\vec{w}})=(\overline{\vec{u},\vec{w}})+2k\pi\ ;\ (k\in\mathbb{Z})$).

III. Lignes trigonométriques du réel x :

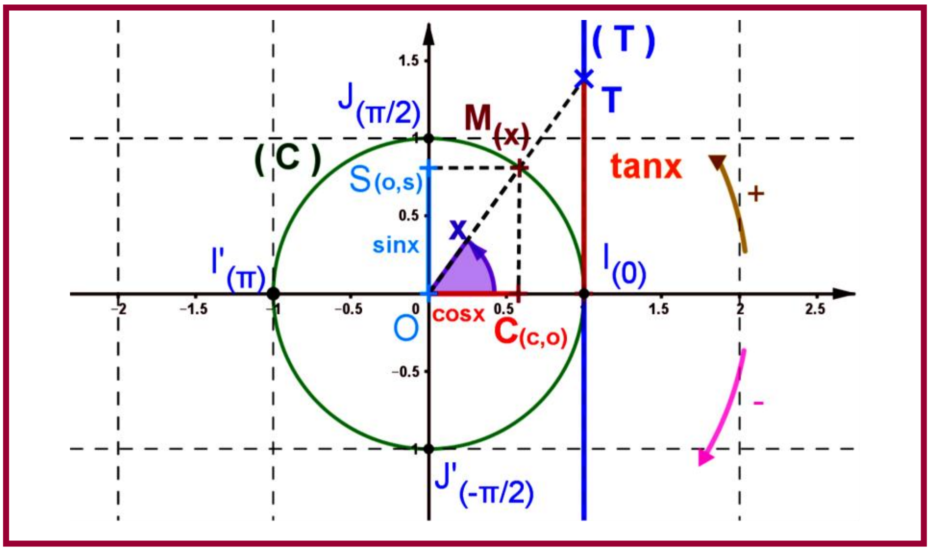
a. Activité :

- le plan est rapporté a un repère orthonormé direct .O est le centre du cercle (C) est le cercle trigonométrique d'origine I (et de centre O) lié repère au tel que $\overrightarrow{OI}=\vec{i}$ et $\overrightarrow{OJ}=\vec{j}$ et $\overrightarrow{OI'}=-\vec{i}$ et $\overrightarrow{OJ'}=-\vec{j}$.

Remarque :

Soit le point $M_{(x)}$ un point de (C) (x est une abscisse curviligne de M) (voir figure)

d'où $(\overline{\vec{i},\overrightarrow{OM}})\equiv(\overline{\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OM}})\ [2\pi]$



donc $\left(\vec{i},\overrightarrow{OM}\right) \equiv x - 0 \ \ [2\pi]$ d'ou : $\left(\vec{i},\overrightarrow{OM}\right) \equiv x \ \ [2\pi]$ ou bien $\left(\vec{i},\overrightarrow{OM}\right) = x + 2k\pi \ ; \ k \in \mathbb{Z}$.

on pose $M(c,s)$ par rapport au repère orthonormé direct

- Le point $C(c,0)$ est la projection orthogonale de M sur la droite (OI) . (sachant que $C \in [I',I]$) . (avec $c = OC$ si $c \geq 0$; $c = -OC$ si $c \leq 0$)
- Le point $S(0,s)$ est la projection orthogonale de M sur la droite (OJ) . (sachant que $S \in [J',J]$) . (avec $s = OS$ si $s \geq 0$; $s = -OS$ si $s \leq 0$)
- Soit la droite (T) tangente au cercle (C) en I , coupe la demi-droite $[OM)$ au point T (condition $M \neq J$ et $M \neq J'$ donc condition sur les abscisse curvilignes de M doit vérifier $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \ ; \ k \in \mathbb{Z}$)
- la droite (T) est muni du repère $\left(I,\vec{i}\right)$ d'où le point T a pour abscisse sur l'axe (T) le réel t . (avec $t = OT$ si $t \geq 0$; $t = -OT$ si $t \leq 0$) .

b. Vocabulaire :

(x est l'abscisse curviligne du point $M \in (C)$)

- L'abscisse c de M est appelée le cosinus du réel x . on note $\cos x$ d'où $\cos x = \cos\left(\vec{i},\overrightarrow{OM}\right) = c$.
- L'ordonnée s de M est appelée le sinus du réel x . on note $\sin x$ d'où $\sin x = \sin\left(\vec{i},\overrightarrow{OM}\right) = s$.
- L'abscisse t de M par rapport à l'axe (droite) (T) tangente au cercle (C) en I est appelée la tangente du réel x . on note $\tan x$ d'où $\tan x = \tan\left(\vec{i},\overrightarrow{OM}\right) = t$.

c. Définition :

x est une abscisse curviligne du point $M_{(x)} \in (C)$ tel que (C) est le cercle trigonométrique d'origine I lié au repère orthonormé . $M(c,s)$ par rapport au repère orthonormé direct .

- Le réel c (abscisse de M) est appelé le sinus du réel x , on note $\cos x$ d'où $\cos x = \cos\left(\vec{i},\overrightarrow{OM}\right) = c$
- Le réel s (ordonnée de M) est appelé le cosinus du réel x , on note $\sin x = s$ d'où $\sin x = \sin\left(\vec{i},\overrightarrow{OM}\right) = s$.
- Le réel t (abscisse du point T) est appelé le cosinus du réel x , on note on note $\tan x$ d'où $\tan x = \tan\left(\vec{i},\overrightarrow{OM}\right) = t$. (sachant la droite (T) tangente au cercle (C) en I et du point T avec $(T)\cap[OM) = \{T\}$) .

d. Conséquences :

- $(\cos x)^2 + (\sin x)^2 = 1$ pour tout x de $\mathbb{R}$.
- $-1 \le \cos x \le 1$ et $-1 \le \sin x \le 1$ pour tout x de $\mathbb{R}$.
- $\cos(x+2k\pi) = \cos x$ et $\sin(x+2k\pi) = \sin x$ pour tout x de $\mathbb{R}$.
- $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ et $1+\tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ pour tout $x \ne \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ tel que $k \in \mathbb{Z}$.

IV. Signe de $\sin x$ et $\cos x$ et $\tan x$:

a. Quadrant d'un cercle :

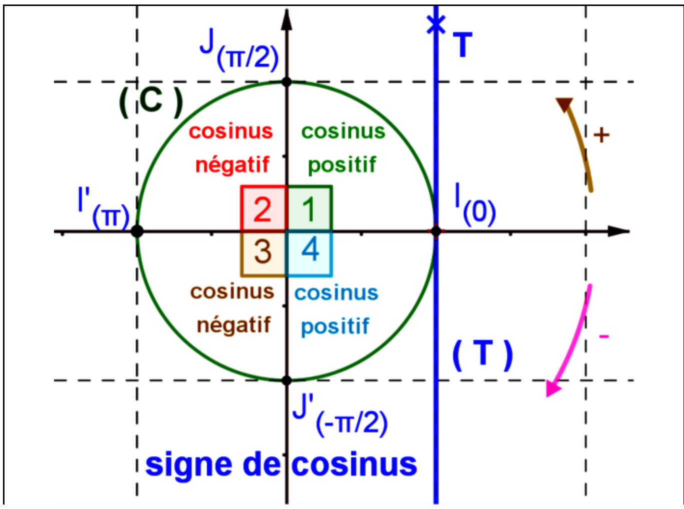
- on divise le cercle en quatre arcs de même longueur A partir de I vers J (suivant le sens positif) .
- x est une abscisse curviligne du point $M_{(x)} \in (C)$.
- le 1er arc IJ (à partir de I vers J) si $M_{(x)} \in IJ$ on dit que $M_{(x)}$ est situé dans le premier quadrant .
- le 2ième arc JJ' (à partir de J vers J') si $M_{(x)} \in JJ'$ on dit que $M_{(x)}$ est situé dans le deuxième quadrant
- le 3ième arc J'I' (à partir de J' vers I')si $M_{(x)} \in J'I'$ on dit que $M_{(x)}$ est situé dans le troisième quadrant
- le 4ième arc I'I (à partir de J vers J') si $M_{(x)} \in I'I$ on dit que $M_{(x)}$ est situé dans le quatrième quadrant

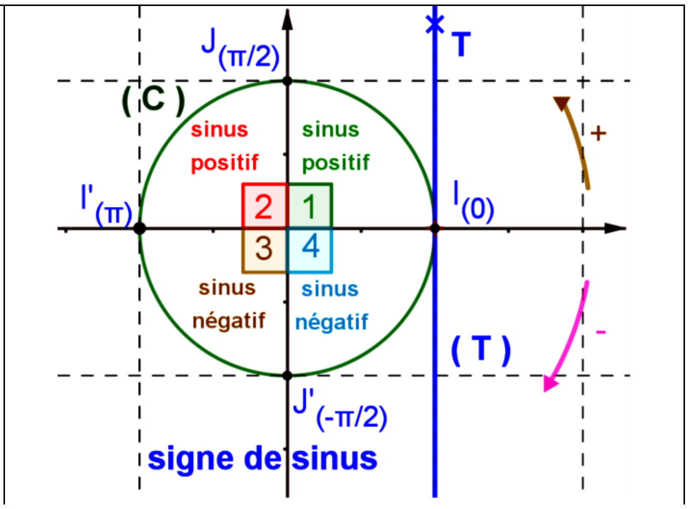
b. signe des lignes trigonométriques suivant les quadrants :

est situé au $M_{(x)}$	Quadrant n° 1	Quadrant n° 2	Quadrant n° 3	Quadrant n° 4
$\sin x$	+	+	–	–
$\cos x$	+	–	–	+
$\tan x$	+	–	+	–

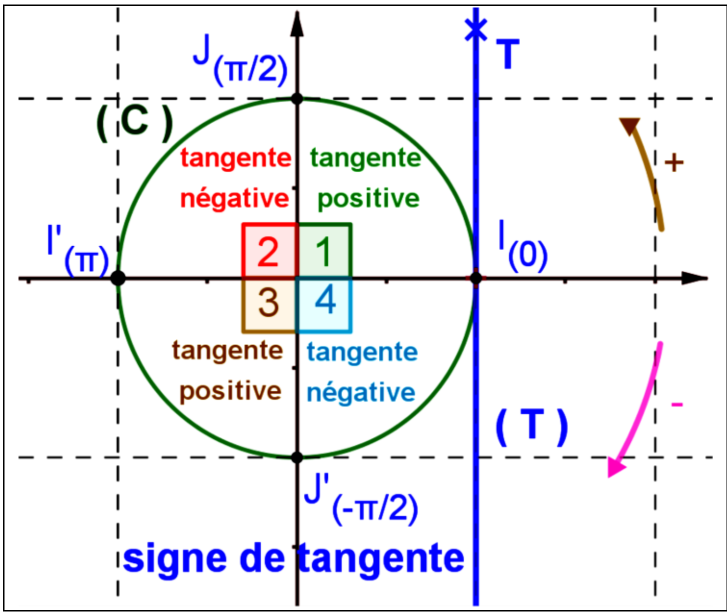
c. signe des lignes trigonométriques graphiquement :

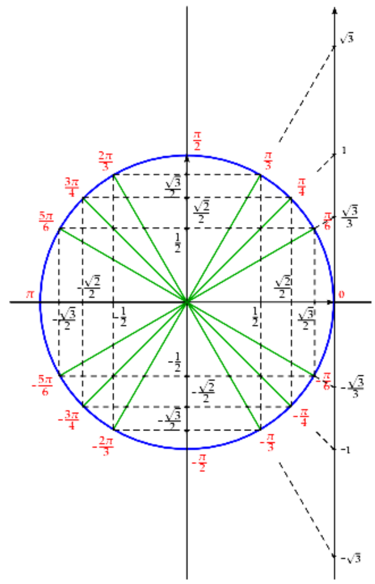
1. signe de cosinus et de sinus :





2. Signe de tangente :





V. les lignes trigonométriques et les angles remarquables :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	

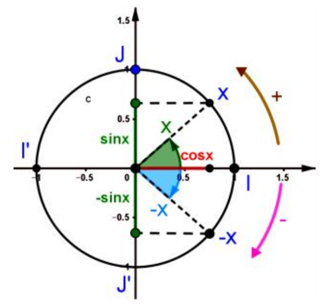
VI. Relations entre les angles :

a. Angles opposés : (x et –x)

$$\sin(-x) = -\sin x$$

$$\cos(-x) = \cos x$$

$$\tan(-x) = -\tan x$$

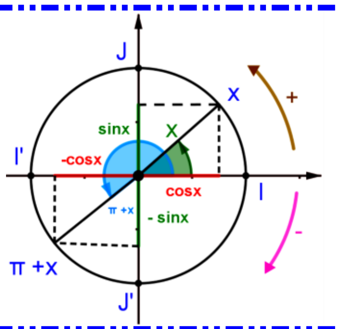


b. Angles supplémentaires : ($\pi - x$ et x)

$$\sin(\pi - x) = \sin x$$

$$\cos(\pi - x) = -\cos x$$

$$\tan(\pi - x) = -\tan x$$

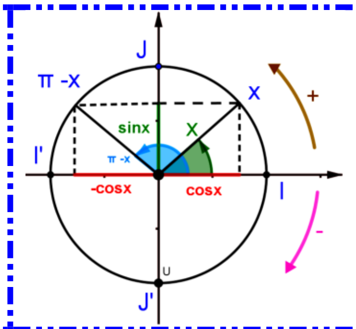


Angles opposés supplémentaires : ($\pi + x$ et x)

$$\sin(\pi + x) = -\sin x$$

$$\cos(\pi + x) = -\cos x$$

$$\tan(\pi + x) = \tan x$$

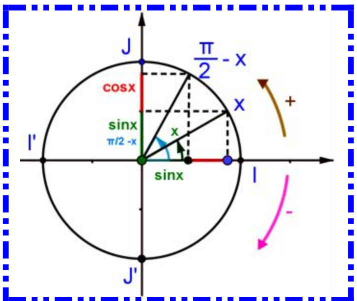


c. Angles complémentaires : ($\frac{\pi}{2} - x$ et x)

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{\tan x}$$

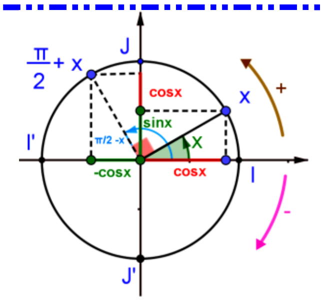


Angles opposés complémentaires : ($\frac{\pi}{2} - x$ et x)

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \frac{-1}{\tan x}$$



d. Résumer des formules précédentes :

	$-x$	$\pi - x$	$\pi + x$	$\frac{\pi}{2} - x$	$\frac{\pi}{2} + x$
sin ↗	$-\sin x$	$\sin x$	$-\sin x$	$\cos x$	$\cos x$
cos ↗	$\cos x$	$-\cos x$	$-\cos x$	$\sin x$	$-\sin x$
tan ↗	$-\tan x$	$-\tan x$	$\tan x$	$\frac{1}{\tan x}$	$\frac{-1}{\tan x}$