

Exercices avec corrigés

Équations et inéquations qui se ramènent au deuxième degré

— Équations qui se ramènent au deuxième degré : équations polynomiales et rationnelles.

— Inéquations qui se ramènent au deuxième degré : inéquations polynomiales et rationnelles.

— Résolution de problèmes.

Exercice 1

Résoudre l'équation

$$x^5 + x^3 = 12x$$

Exercice 2

Résoudre l'équation

$$\frac{x+2}{x-2} - \frac{8}{3x+12} = \frac{x^2}{x^2+2x-8}$$

Exercice 3

a) Résoudre l'équation

$$\frac{5x-13}{4(x-3)} = \frac{2}{x^2-2x-3}$$

b) Résoudre l'équation

$$x^4 = 4x^2 + 5$$

Exercice 4

a) Résoudre l'inéquation

$$x^2 \geq 2 - x$$

b) Résoudre l'inéquation

$$6x \geq x^2 + 9$$

Exercice 5

Résoudre l'inéquation

$$x^5 \leq 4x$$

Exercice 6

Résoudre l'inéquation

$$\frac{x+3}{x+2} - \frac{x+2}{3x+9} \leq \frac{x^2-3}{x^2+5x+6}$$

Equations et inéquations qui se ramènent au deuxième degré

Corrigé de l'exercice 1

$$\begin{aligned}
 x^5 + x^3 - 12x = 0 &\Leftrightarrow x(x^4 + x^2 - 12) = 0 \\
 x = 0 &\text{ ou } (t = x^2 \text{ et } t^2 + t - 12 = 0) \\
 x = 0 &\text{ ou } \Delta = 49, \quad t_1 = -4, \quad t_2 = 3 \text{ où } t = x^2 \\
 x = 0 &\text{ ou } x^2 = -4 \text{ ou } x^2 = 3 \\
 x = 0 &\text{ ou (pas de solution ou) } x = -\sqrt{3} \text{ ou } x = \sqrt{3} \\
 S = \{ &-\sqrt{3}; \quad 0; \quad \sqrt{3} \}
 \end{aligned}$$

Corrigé de l'exercice 2

$$\begin{aligned}
 \frac{x+2}{x-2} - \frac{8}{3x+12} &= \frac{x^2}{x^2+2x-8} \\
 \frac{x+2}{x-2} - \frac{8}{3x+12} - \frac{x^2}{(x-2)(x+4)} &= 0 \\
 \text{Ensemble de définition } D &= \mathbb{R} \setminus \{-4; 2\}. \\
 \frac{3(x+2)(x+4) - 8(x-2) - 3x^2}{3(x-2)(x+4)} &= 0 \\
 \frac{3x^2 + 18x + 24 - 8x + 16 - 3x^2}{3(x-2)(x+4)} &= 0 \\
 \frac{10x + 40}{3(x-2)(x+4)} &= 0 \\
 10(x+4) &= 0
 \end{aligned}$$

Candidat $x = -4$. Condition $x \in D$. Ensemble des solutions $S = \emptyset$.

Corrigé de l'exercice 3 a)

$$\begin{aligned}
 \frac{5x-13}{4(x-3)} - \frac{2}{(x-3)(x+1)} &= 0 \\
 \frac{(5x-13)(x+1) - 8}{4(x-3)(x+1)} &= 0 \\
 \frac{5x^2 - 8x - 21}{(x-3)(x+1)} &= 0 \\
 5x^2 - 8x - 21 = 0 &\text{ et } (x \neq 3 \text{ et } x \neq -1)
 \end{aligned}$$

$$\Delta = 484, \quad x_1 = -\frac{7}{5} \approx -1.4, \quad x_2 = 3 \quad \text{et} \quad (x \neq 3 \text{ et } x \neq -1)$$

$$S = \left\{ -\frac{7}{5} \right\}$$

Corrigé de l'exercice 3 b)

$$x^4 - 4x^2 - 5 = 0 \quad \text{équation bicarrée}$$

$$t = x^2 \quad \text{et} \quad t^2 - 4t - 5 = 0$$

$$\Delta = 36, \quad t_1 = -1, \quad t_2 = 5 \quad \text{où} \quad t = x^2$$

$$x^2 = -1 \quad \text{ou} \quad x^2 = 5$$

$$\text{pas de solution} \quad \text{ou} \quad x = \pm \sqrt{5}$$

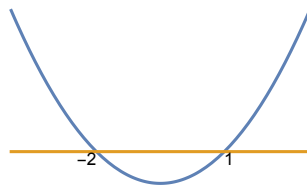
$$S = \{ -\sqrt{5}, \sqrt{5} \}$$

Corrigé de l'exercice 4 a)

$$x^2 \geq 2 - x$$

$$x^2 + x - 2 \geq 0$$

$$\Delta = 9, \quad x_1 = -2, \quad x_2 = 1$$



x	$-\infty$	-2	1	∞
$Sign(x^2 + x - 2)$	$+$	0	$-$	$+$

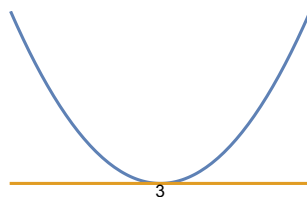
$$S =]-\infty; -2] \cup [1; \infty[$$

Corrigé de l'exercice 4 b)

$$6x \geq x^2 + 9$$

$$x^2 - 6x + 9 \leq 0$$

$$\Delta = 0, \quad x_1 = x_2 = 3$$



x	$-\infty$	3	∞
$Sign(x^2 - 6x + 9)$	$+$	0	$+$

$$S = \{3\}$$

Corrigé de l'exercice 5

$$x^5 \leq 4x$$

$$x^5 - 4x \leq 0$$

$$x(x^4 - 4) \leq 0$$

$$x(x^2 - 2)(x^2 + 2) \leq 0$$

x		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$	
x	-	-	-	0	+	+	+
$x^2 - 2$	+	0	-	-	-	0	+
$x^2 + 2$	+	+	+	+	+	+	+
$f(x)$	-	0	+	0	-	0	+

$$S =]-\infty; -\sqrt{2}] \cup [0; \sqrt{2}]$$

Corrigé de l'exercice 6

Résoudre l'inéquation

$$\frac{x+3}{x+2} - \frac{x+2}{3x+9} \leq \frac{x^2-3}{x^2+5x+6}$$

$$\frac{x+3}{x+2} - \frac{x+2}{3(x+3)} - \frac{x^2-3}{(x+2)(x+3)} \leq 0$$

$$\frac{(x+3)(3x+9) - (x+2)^2 - 3(x^2-3)}{3(x+2)(x+3)} \leq 0$$

$$\frac{3x^2+9x+9x+27 - x^2 - 4x - 4 - 3x^2 + 9}{3(x+2)(x+3)} \leq 0$$

$$\frac{-x^2 + 14x + 32}{3(x+2)(x+3)} \leq 0$$

x		-3		-2		16	
$-x^2 + 14x + 32$	-	-	-	0	+	0	-
$3(x+2)(x+3)$	+	0	-	0	+	+	+
$f(x)$	-		+		+	0	-

$$S =]-\infty; -3[\cup [16; \infty[$$