

Professeur : Rachid BELEMOU	COURS	Niveau : TCT - BIOF
Lycée : Oued Eddahab	Equations , inéquations et systèmes	Année : 2017-2018

## I. Equations du premier degré à une inconnue :

Activité : (révision) résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations suivantes :

$$\frac{x-3}{2} = \frac{x}{3} ; \quad x - \frac{3x+4}{2} = \frac{2}{3} ; \quad \frac{3x+1}{2} - \frac{3-x}{3} = 1$$

## II. Equations du second degré dans $\mathbb{R}$ :

### 1) Equation produit nul ou du type $x^2=a$ :

Activité : (révision) :

Résoudre les équations suivantes :

$$x^2 - 4 = 0 ; \quad x^2 - 2x = 0 ; \quad x^2 - 2x + 1 = 0$$

### 2) Equation du second degré :

Définition : une équation du second degré à une inconnue  $x$  (nombre réel) est une équation de la forme :  $ax^2 + bx + c = 0$  avec  $a \in \mathbb{R}^*$ ,  $b \in \mathbb{R}$  et  $c \in \mathbb{R}$ .

Résoudre une équation c'est trouver toutes les valeurs de  $x$  pour lesquelles  $ax^2 + bx + c = 0$ .

Activité1 : On considère le trinôme du second degré :  $P(x) = ax^2 + bx + c$

avec  $a \in \mathbb{R}^*$ ,  $b \in \mathbb{R}$  et  $c \in \mathbb{R}$

$$\text{montrer que : } P(x) = a \left[ \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right]$$

Définitions : l'expression  $a \left[ \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right]$  est appelée la forme canonique du trinôme

de second degré  $ax^2 + bx + c$ .

Le nombre  $b^2 - 4ac$  est appelé discriminant de l'équation du second degré  $ax^2 + bx + c = 0$  ou du trinôme  $ax^2 + bx + c$  on le note  $\Delta$  (lire "delta").

Activité2 : (le cas général)

Résoudre l'équation  $ax^2 + bx + c = 0$  avec  $a \neq 0$  en utilisant la forme canonique

Conclusion : Trois cas se présentent :

Si  $\Delta > 0$  alors l'équation a deux solutions (ou racines)  $x = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$  ou  $x = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ .

Si  $\Delta = 0$  alors l'équation a une seule solution (ou racine)  $x = \frac{-b}{2a}$ .

Si  $\Delta < 0$  alors l'équation n'a pas de solution.

Exemple : on considère l'équation  $x^2 - 3x + 2 = 0$

on a  $a = 1$ ,  $b = -3$  et  $c = 2$  donc le discriminant de cette équation est

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 2 = 9 - 8 = 1$$

d'où l'équation a deux solutions :

$$x = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3 - \sqrt{1}}{2 \times 1} = \frac{2}{2} = 1 \quad \text{ou} \quad x = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3 + \sqrt{1}}{2 \times 1} = \frac{4}{2} = 2$$

Application : résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations suivantes :

$$x^2 + x + 1 = 0 ; \quad -6x^2 + x + 1 = 0 ; \quad x^2 - 7x = -12 ; \quad 3x^2 - x - 4 = 0$$

Remarque : il n'est pas toujours utile de calculer le discriminant, c'est le cas des équations suivantes :  $x^2 - 4 = 0$  ;  $x^2 - 2x = 0$  ;  $x^2 - 2x + 1 = 0$

Professeur : Rachid BELEMOU	COURS	Niveau : TCT - BIOF
Lycée : Oued Eddahab	Equations , inéquations et systèmes	Année : 2017-2018

### 3) La somme et le produit des racines d'une équation du second degré :

Activité : on considère l'équation  $ax^2 + bx + c = 0$  avec  $a \neq 0$

supposons que cette équation admet deux solutions  $x_1$  et  $x_2$

écrire  $x_1 + x_2$  et  $x_1 \times x_2$  en fonction de  $a$ ,  $b$  et  $c$

Conclusion : si une équation du second degré admet deux solutions  $x_1$  et  $x_2$  alors :

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} \text{ et } x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$$

Remarque : il est utile de retenir que si on connaît a priori une racine alors on peut obtenir à l'aide de ces formules la valeur de la deuxième.

Théorème : si  $a$  et  $c$  n'ont pas le même signe alors l'équation  $ax^2 + bx + c = 0$  admet deux solutions distinctes ; la réciproque n'est pas toujours vraie .

Application : on considère l'équation :  $x^2 + 2x - 3 = 0$

sans calculer  $\Delta$ ,

1) montrer que cette équation admet deux solutions distinctes  $x_1$  et  $x_2$ .

2) calculer  $x_1 \times x_2$  et déterminer une racine évidente puis déduire la deuxième racine.

### 4) Factorisation d'un Trinôme du second degré :

Activité : on considère le trinôme du second degré :  $P(x) = ax^2 + bx + c$  avec  $a \neq 0$

en utilisant la forme canonique, factoriser  $P(x)$

Conclusion : Trois cas se présentent :

Si  $\Delta > 0$  alors  $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$  avec  $x_1$  et  $x_2$  les deux racines de  $P(x)$

Si  $\Delta = 0$  alors  $P(x) = a(x - x_1)^2$  avec  $x_1$  est la seule racine de  $P(x)$

Si  $\Delta < 0$  alors on ne peut pas factoriser  $P(x)$

### 5) Le signe d'un Trinôme du second degré :

Activité : on considère le trinôme du second degré :  $P(x) = ax^2 + bx + c$  avec  $a \neq 0$

déterminer le signe de  $P(x)$  suivant les valeurs de .

### 6) Les inéquations du second degré :

Activité : résoudre dans  $\mathbb{R}$  les inéquations suivantes :

$$x^2 - 3x + 2 < 0 \quad ; \quad -6x^3 + x^2 + x \geq 0$$

## III. Les systèmes d'équations :

### 1) Equations du premier degré à deux inconnues :

Activité1 : résoudre dans  $\mathbb{R}^2$  l'équation  $2x + y = 1$

Conclusion : résoudre une équation du premier degré à deux inconnues c'est déterminer tous les couples  $(x; y)$  qui vérifient cette équation.

- Cette équation a donc une infinité de solutions donc impossible d'écrire l'ensemble de ses solutions en extension, on peut l'écrire seulement en compréhension :

$$S = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 / y = 1 - 2x\}$$

- graphiquement l'ensemble des solutions de cette équation est l'ensemble des couples des coordonnées des points de la droite d'équation  $2x + y = 1$

Professeur : Rachid BELEMOU	COURS	Niveau : TCT - BIOF
Lycée : Oued Eddahab	Equations , inéquations et systèmes	Année : 2017-2018

## 2) Systèmes d'équations du premier degré à deux inconnues :

Activité1 : résoudre dans  $\mathbb{R}^2$  par la méthode de substitution les deux systèmes suivants :

$$\begin{cases} 3x + 7y = 11 \\ -5x + y = 7 \end{cases} ; \quad \begin{cases} 2x + y = 4 \\ x - y = -1 \end{cases}$$

Activité2 : résoudre par la méthode des combinaisons linéaires les deux systèmes suivants :

$$\begin{cases} 2x - 3y = 8 \\ 3x + 4y = -5 \end{cases} ; \quad \begin{cases} 7x - 2y = 8 \\ 3x + 4y = 18 \end{cases}$$

Activité3 : résoudre par la méthode des combinaisons linéaires le système :  $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$

### Conclusion :

- résoudre un système de deux équations à deux inconnues c'est déterminer tous les couples  $(x; y)$  qui vérifient simultanément les deux équations.

### Méthode de Kramer

Le nombre réel  $ab' - a'b$  est appelé le déterminant du système et on le note  $\Delta$  ( $\Delta = ab' - a'b = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$ )

Deux cas se présentent

Si  $\Delta \neq 0$  alors  $(\frac{\Delta_x}{\Delta}; \frac{\Delta_y}{\Delta})$  est la seule solution du système avec :

$$\Delta_x = cb' - c'b = \begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix} \text{ et } \Delta_y = ac' - a'c = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}$$

Si  $\Delta = 0$  alors  $0 = \Delta_y$  et  $0 = \Delta_x$

donc deux sous cas  $S = \emptyset$  ou les deux équations sont équivalentes il suffit de résoudre une des deux.

Application : résoudre dans  $\mathbb{R}^2$  par la méthode des déterminants les deux systèmes :

$$\begin{cases} 2x + y = 4 \\ x - y = -1 \end{cases} ; \quad \begin{cases} x - y = 2 \\ -2x + 2y = 3 \end{cases}$$

## 3) Régionnement du plan :