Tronc CS PROF : ATMANI NAJIB

# Equations et inéquations et systèmes

**Leçon : Equations et inéquations et systèmes**

**Présentation globale**

*Chapitre n° 1*

**I) Les équations et les inéquations du premier degré a une inconnue.**

1 Les équations du premier degré a une inconnue

2 Les inéquations du premier degré a une inconnue.

*Chapitre n° 2*

**II) Les équations et les inéquations du premier degré avec deux inconnues.**

1 les équations du premier degré avec deux inconnues

2 les inéquations du premier degré avec deux inconnues.

*Chapitre n° 3*

**III) Système de deux équations du premier degré à deux inconnues**

*Chapitre n° 4*

**IV) équation du second degré a une inconnue.**

**V) Inéquation du second degré a une inconnue.**

## I) Les équations et les inéquations du premier degré a une inconnue.

### 1°) Les équations du premier degré a une inconnue.

**Définition :** On appelle équations du premier degré a une inconnue toute équation de la forme : $ax+b=0$ où les coefficients $a$, $b$ sont des réels donnés et x est l'inconnue

Résoudre l'équations c'est déterminer l'ensemble de toutes les solutions notées : $S$

**Applications :** Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $-2x+22=0$ 2) $3(2x+5)=6x-1$ 3) $4(x-2)=6x-2(x+4)$

4) 2x + 3)² - (2x + 3)(x - 4) = 0 5) $x^2-100=0$

6) $\frac{3}{x+2}-\frac{5}{x-2}=0$ 7) $\frac{(x-7)(x+3)}{x^2-9}=0$ 8) $\frac{4x+2}{x-3}=5$ 9) $|7x-10|=|6+3x|$

10) $x^3-7x=0$

**Solution :** 1) $-2x+22=0$ ssi $-2x+22-22=-22$ ssi $-2x=-22$

ssi $-2x\times\left(\frac{1}{-2}\right)=-22\times\left(\frac{1}{-2}\right)$ ssi $x=11$

Donc : $S=\{11\}$

2) $3(2x+5)=6x-1$ ssi $6x+15=6x-1$ ssi $6x-6x=-1-15$

ssi $0x=-16$ ssi $0=-16$ ceci est impossible

Donc l'ensemble de toutes les solutions est : $S = \varnothing$

3) $4(x-2) = 6x - 2(x+4)$ ssi $4x - 8 = 6x - 2x - 8$ ssi $4x - 4x + 8 - 8 = 0$
ssi $0 = 0$ Donc l'ensemble de toutes les solutions est : $S = \mathbb{R}$

4) $(2x + 3)^2 - (2x + 3)(x - 4) = 0$
ce qui est équivalent à : $(2x + 3)(2x + 3 - x + 4) = 0$
ce qui est équivalent à : $(2x + 3)(x + 7) = 0$
Les solutions sont -3/2 ou -7.

Donc l'ensemble de toutes les solutions est : $S = \left\{-7; \frac{-3}{2}\right\}$

5) $x^2 - 100 = 0$
$x^2 - 100 = 0$
$\Longleftrightarrow x^2 - 10^2 = 0$
C'est une identité remarquable de la forme : $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$, donc :
$x^2 - 100 = 0$
$\Longleftrightarrow (x - 10)(x + 10) = 0$
$\Longleftrightarrow x = 10 \text{ ou } x = -10$
D'où : $S = \{-10; 10\}$

6) $\frac{3}{x+2} - \frac{5}{x-2} = 0$
Cette équation n'existe pas si $x + 2 = 0$ et si $x - 2 = 0$. Les valeurs interdites de cette équation sont -2 et 2. L'équation est donc définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-2; 2\}$.
On commence par réduire au même dénominateur les deux fractions. Le dénominateur commun est $(x + 2)(x - 2)$ :
Donc : $-2x - 16 = 0$ car le dénominateur ne peut pas s'annuler.
$\Longleftrightarrow -2x = 16$
$\Longleftrightarrow x = \frac{16}{-2}$
$\Longleftrightarrow x = -8$
D'où : -8 appartient à l'ensemble de définition de l'équation, donc : $S = \{-8\}$

7) $\frac{(x-7)(x+3)}{x^2-9} = 0$
Cette équation 'existe si $x^2 - 9 \neq 0$
$x^2 - 9 = 0$ Équivalent à : $x^2 - 3^2 = 0$ équivalent à : $(x-3)(x+3) = 0$
Équivalent à $x + 3 = 0$ ou $x - 3 = 0$ équivalent à $x = -3$ ou $x = 3$
Les valeurs interdites de cette équation sont -3 et 3. L'équation est donc définie sur $D_E = \mathbb{R}\backslash\{-3; 3\}$.
$\frac{(x-7)(x+3)}{x^2-9} = 0$ équivalent à $(x-7)(x+3) = 0$ équivalent à $x - 7 = 0$ ou $x + 3 = 0$
Équivalent à $x = -7 \in D_E$ ou $x = -3 \notin D_E$ :
donc : $S = \{7\}$

8) $\frac{4x+2}{x-3} = 5$ Cette équation n'existe pas si $x - 3 = 0$
$x - 3 = 0$ équivalent à : $x = 3$
La valeur interdite de cette équation est 3. L'équation est donc définie sur $D_E = \mathbb{R}\backslash\{3\}$.
$\frac{4x+2}{x-3} = 5$ équivalent à : $4x + 2 = 5(x-3)$ équivalent à : $4x + 2 = 5x - 15$

équivalent à : $-x=-17$ équivalent à : $x=17$

donc : $S=\{17\}$

9) $|7x-10|=|6+3x|$ équivalent à $7x-10=6+3x$ ou $7x-10=-(6+3x)$

équivalent à $4x=16$ ou $10x=4$ équivalent à $x=4$ ou $x=\frac{2}{5}$

Donc l'ensemble de toutes les solutions est : $S=\left\{4;\frac{2}{5}\right\}$

10) $x^3-7x=0$ équivalent à : $x\left(x^2-7\right)=0$ ssi $x=0$ ou $x^2-7=0$

équivalent à $x=0$ ou $x^2=7$ ssi $x=0$ ou $x=\sqrt{7}$ ou $x=-\sqrt{7}$

D'où : $S=\left\{-\sqrt{7};0;\sqrt{7}\right\}$

**Exercice :** Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations :

a) $\frac{3x+5}{x-1}=0$ b) $\frac{(2x+1)(x-3)}{x-4}=0$ c) $\frac{x^2-9}{x+3}=0$ d) $1-\frac{x+3}{x-3}=\frac{2}{2-x}$

**Solution :** a) L'équation n'est pas définie pour $x$ = 1.

Pour $x\neq$ 1, l'équation $\frac{3x+5}{x-1}=0$ équivaut à : $3x+5=0$.

D'où $x=-\frac{5}{3}$. c a d : $S=\left\{-\frac{5}{3}\right\}$

b) L'équation n'est pas définie pour $x$ = 4.

Pour $x\neq$ 4, l'équation $\frac{(2x+1)(x-3)}{x-4}=0$ équivaut à : $(2x+1)(x-3)=0$.

Soit : $2x+1=0$ ou $x-3=0$

Les solutions sont : $x=-\frac{1}{2}$ et $x=3$. c a d : $S=\left\{-\frac{1}{2};3\right\}$

c) L'équation n'est pas définie pour $x$ = -3.

Pour $x\neq$ -3, l'équation $\frac{x^2-9}{x+3}=0$ équivaut à : $x^2-9=0$, soit $x^2=9$

Soit encore : $x=3$ ou $x=-3$.

Comme $x\neq$ -3, l'équation a pour unique solution : $x=3$.

c a d : $S=\{3\}$

d) L'équation n'est pas définie pour $x$ = 2 et $x$ = 3.

Pour $x\neq 2$ et $x\neq 3$, l'équation $1-\frac{x+3}{x-3}=\frac{2}{2-x}$ équivaut à :

$1-\frac{x+3}{x-3}-\frac{2}{2-x}=0$ On réduit au même dénominateur dans le but de se ramener à une équation-quotient : $\frac{(x-3)(2-x)}{(x-3)(2-x)}-\frac{(x+3)(2-x)}{(x-3)(2-x)}-\frac{2(x-3)}{(x-3)(2-x)}=0$

$\frac{(x-3)(2-x)-(x+3)(2-x)-2(x-3)}{(x-3)(2-x)}=0$ On développe et on réduit le numérateur :

$\frac{2x-x^2-6+3x-2x+x^2-6+3x-2x+6}{(x-3)(2-x)}=0$

$\dfrac{4x-6}{(x-3)(2-x)}=0$ Ce qui équivaut à $4x-6=0$ et $(x-3)(2-x)\neq 0$

D'où $x=\dfrac{3}{2}$. c a d : $S=\left\{\dfrac{3}{2}\right\}$

**2°) Les inéquations du premier degré a une inconnue.**

**a) Le signe du binôme** $ax+b$ $a\in\mathbb{R}^*$ et $b\in\mathbb{R}$

**Exemples :1)** étudions le signe de : $3x+6$ (coefficient de x positif )

$3x+6$ Équivalent à : $x=-2$

$3x+6>0$ Équivalent à : $x>-2$

$3x+6<0$ Équivalent à : $x<-2$

On résume ces résultats dans le tableau de signe suivant :

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $3x+6$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |

**2)** étudions le signe de : $-2x+12$ (coefficient de x négatif )

$-2x+12$ Équivalent à : $x=6$

$-2x+12>0$ Équivalent à : $x<6$

$-2x+12<0$ Équivalent à : $x>6$

On résume ces résultats dans le tableau de signe suivant :

| $x$ | $-\infty$ | | $6$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $-2x+12$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |

**Résumé :** $a\in\mathbb{R}^*$ et $b\in\mathbb{R}$

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{b}{a}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $ax+b$ | | signe de $-a$ | $0$ | signe $a$ | |

**b) Solution de l'inéquations du premier degré a une inconnue**

**Définition :** On appelle inéquations du premier degré a une inconnue toute inéquation de la forme : $ax+b\geq 0$ ou $ax+b\leq 0$ ou $ax+b<0$ ou $ax+b>0$ où les coefficients $a$, $b$ sont des réels donnés et x est l'inconnue

Résoudre l'inéquations c'est déterminer l'ensemble de toutes les solutions notées : $S$

**Applications :** Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1) $-2x+12>0$ 2) $5x-15\leq 0$ 3) $4x^2-9\geq 0$ 4) $(1-x)(2x+4)>0$

5) $\dfrac{5x-2}{1+3x}\geq 0$ 6) $\dfrac{(2x+1)(5x-10)}{2x-6}\leq 0$

**Solution :** 1) $-2x+12>0$

$-2x+12=0$ équivalent à : $x=6$ $-2=a$ et $a<0$ coefficient de x négatif

On a le tableau de signe suivant :

| $x$ | $-\infty$ | | $6$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $-2x+12$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |

Donc : $S=]-\infty;6[$

2) $5x-15\leq 0$

$5x-15=0$ Équivalent à : $x=3$ $5=a$ et $a>0$ coefficient de x positif

On a le tableau de signe suivant :

| $x$ | $-\infty$    $3$    $+\infty$ |
|---|---|
| $5x-15=0$ | $-$    $0$    $+$ |

Donc : $S=]-\infty;3[$

3) $4x^2-9\geq 0$

$4x^2-9=0$ équivalent à : $(2x)^2-3^2=0$ ssi $(2x-3)(2x+3)=0$

équivalent à $2x+3=0$ ou $2x-3=0$ ssi $x=\frac{-3}{2}$ ou $x=\frac{3}{2}$

On a le tableau de signe suivant :

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{3}{2}$ | | $\frac{3}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $2x+3$ | | $-$ | $0$ | $+$ | \| | $+$ | |
| $2x-3$ | | $-$ | \| | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $(2x-3)(2x+3)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

Donc : $S=\left]-\infty;-\frac{3}{2}\right]\cup\left[\frac{3}{2};+\infty\right[$

4) $(1-x)(2x+4)>0$

$(1-x)(2x+4)=0$ équivalent à :

$2x+4=0$ ou $1-x=0$ ssi $x=-2$ ou $x=1$

On a le tableau de signe suivant :

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $2x+4$ | | $-$ | $0$ | $+$ | \| | $+$ | |
| $1-x$ | | $+$ | \| | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $(1-x)(2x+4)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

Donc : $S=]-2;1[$

5) $\frac{5x-2}{1+3x}\geq 0$

**Signe d'un quotient méthode**

- Donner l'ensemble de définition.
- Rechercher les valeurs de x annulant chacun des facteurs et
- Dresser un tableau de signes :

  Le quotient de deux nombres de même signe est positif (+).

  Le quotient de deux nombres de signes différents est négatif (—).

Cette inéquation existe si $1+3x\neq 0$

$1+3x=0$ équivalent à : $x=-\frac{1}{3}$

La valeur interdite de cette inéquation est $-\frac{1}{3}$. L'inéquation est donc définie sur

$D_I=\mathbb{R}-\left\{-\frac{1}{3}\right\}$

$5x-2=0$ Équivalent à : $x=\frac{2}{5}$

On a le tableau de signe suivant :

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{1}{3}$ | | $\frac{2}{5}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $1+3x$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $5x-2$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $\frac{5x-2}{1+3x}$ | | $+$ | ‖ | $-$ | $0$ | $+$ | |

**Attention** à ne pas oublier la **double barre** pour la valeur interdite

donc : $S=\left]-\infty;-\frac{1}{3}\right[\cup\left[\frac{2}{5};+\infty\right[$

6) $\frac{(2x+1)(5x-10)}{2x-6}\leq 0$

Cette inéquation existe si $2x-6\neq 0$

$2x-6\neq 0$ équivalent à : $x=-\frac{1}{3}$

La valeur interdite de cette inéquation est $-\frac{1}{3}$. l'inéquation est donc définie sur

$D_I=\mathbb{R}-\left\{-\frac{1}{3}\right\}$

$2x-6\neq 0$ Équivalent à : $x\neq 3$

On a le tableau de signe suivant :

$D_I=\mathbb{R}-\{3\}$

$2x+1=0$ équivalent à : $x=-\frac{1}{2}$

$5x-10=0$ équivalent à : $x=2$

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{1}{2}$ | | $2$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $2x+1$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | | $+$ | |
| $5x-10$ | | $-$ | | $+$ | $0$ | $-$ | | $+$ | |
| $2x-6$ | | $-$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $\frac{(2x+1)(5x-10)}{2x-6}$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | ‖ | $+$ | |

Donc : $S=\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right]\cup[2;3[$

**Exercice :** Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1) $(3-6x)(x+2)>0$ 2) $\frac{2-6x}{3x-2}\leq 0$

**Solution :**1)Le signe de $(3-6x)(x+2)$dépend du signe de chaque facteur

$3-6x$ et $x+2$.

$3-6x=0$ ou $x+2=0$

$6x=3$ ou $x=-2$

$x=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$ ou $x=-2$

Résumons dans un même tableau de signes les résultats pour les deux facteurs.

En appliquant la règle des signes, on en déduit le signe du produit $(3-6x)(x+2)$.

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $\frac{1}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $3-6x$ | | + | | + | 0 | - | |
| $x+2$ | | - | 0 | + | | + | |
| $(3-6x)(x+2)$ | | - | 0 | + | 0 | - | |

On en déduit que $(3-6x)(x+2)>0$ pour $x\in\left]-2;\frac{1}{2}\right[$.

L'ensemble des solutions de l'inéquation $(3-6x)(x+2)>0$ est $\left]-2;\frac{1}{2}\right[$.

2) $\frac{2-6x}{3x-2}\leq 0$.

L'inéquation n'est pas définie pour $3x-2=0$, soit $x=\frac{2}{3}$.

Il faudra éventuellement exclure cette valeur de l'ensemble des solutions.

Le signe de $\frac{2-6x}{3x-2}$ dépend du signe des expressions $2-6x$ et $3x-2$.

$2-6x=0$ équivaut à $x=\frac{1}{3}$.

Résumons dans un même tableau de signes les résultats pour les deux expressions.

| $x$ | $-\infty$ | | $\frac{1}{3}$ | | $\frac{2}{3}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $2-6x$ | | + | 0 | - | | - | |
| $3x-2$ | | - | | - | 0 | + | |
| $\frac{2-6x}{3x-2}$ | | - | 0 | + | \|\| | - | |

La double-barre dans le tableau signifie que le quotient n'est pas défini pour $x=\frac{2}{3}$.

On en déduit que $\frac{2-6x}{3x-2}\leq 0$ pour $x\in\left]-\infty;\frac{1}{3}\right]\cup\left]\frac{2}{3};+\infty\right[$.

L'ensemble des solutions de l'inéquation $\frac{2-6x}{3x-2}\leq 0$ est $\left]-\infty;\frac{1}{3}\right]\cup\left]\frac{2}{3};+\infty\right[$.

## II) Les équations et les inéquations du premier degré avec deux inconnues.

### 1)les équations du premier degré avec deux inconnues.

**Définition :** On appelle équations du premier degré a deux inconnues toute équation de la forme : $ax+by+c=0$ où les coefficients $a$, $b$ et c sont des réels donnés et le couple $(x;y)$ est l'inconnue dans $\mathbb{R}^2$

Résoudre l'équations dans $\mathbb{R}^2$ c'est déterminer l'ensemble $S$ des couples solutions de l'équations

**Remarques :**

- L'équations $ax+by+c=0$ a une infinité de solutions
- On peut Résoudre l'équations $ax+by+c=0$ graphiquement ou algébriquement

**Applications :** 1) Résolvons dans $\mathbb{R}^2$ l'équation : $2x-y+4=0$

On a $2x-y+4=0$ équivalent à : $y=2x+4$

Donc : $S=\{(x;2x+4)/x\in\mathbb{R}\}$

2)Résolvons dans $\mathbb{R}^2$ l'équation : $x-2y+1=0$

On a $x-2y+1=0$ équivalent à : $x=2y-1$

Donc : $S=\{(2y-1;y)/y\in\mathbb{R}\}$

3)Résolvons graphiquement dans $\mathbb{R}^2$ l'équation : $x-y-2=0$

Le plan est rapporté au Repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

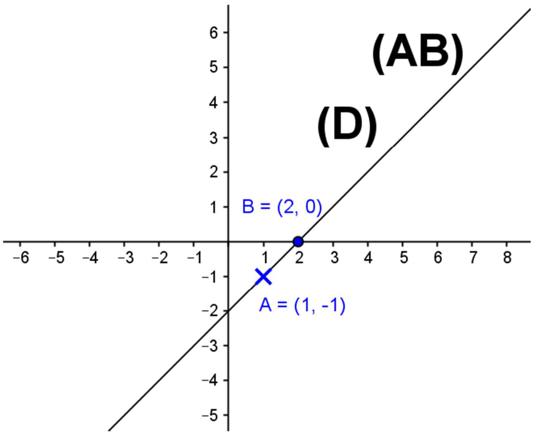
On trace la droite (D)d'équation cartésienne : $x-y-2=0$

$S=\{(x;y)\in\mathbb{R}^2 / M(x;y)\in(D)\}$

Pour tracer la droite (D) il suffit de trouver deux points qui appartiennent à $(D)$

Si $x=1$ alors : $1-y-2=0$ c a d $y=-1$ donc $A(1;-1)\in(D)$

Si $y=0$ alors : $x-0-2=0$ c a d $x=2$ donc $B(2;0)\in(D)$




**EXERCICE :** 1) Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les équations suivantes :

1) $2x-y+1=2y-2x+5$ 2) $x+5=y+5$

3) $3x+2y-2=2y-2$ 4) $x+y=2x-1$

**Solution :**1) On a $2x-y+1=2y-2x+5$ équivalent à : $4x-3y-4=0$

Équivalent à : $4x=3y+4$ équivalent à : $x=\frac{3}{4}y+1$

Donc : $S=\left\{\left(\frac{3}{4}y+1;y\right)/y\in\mathbb{R}\right\}$

2) On a $x+5=y+5$ équivalent à : $y=x$

Donc : $S=\{(x;x)/x\in\mathbb{R}\}$

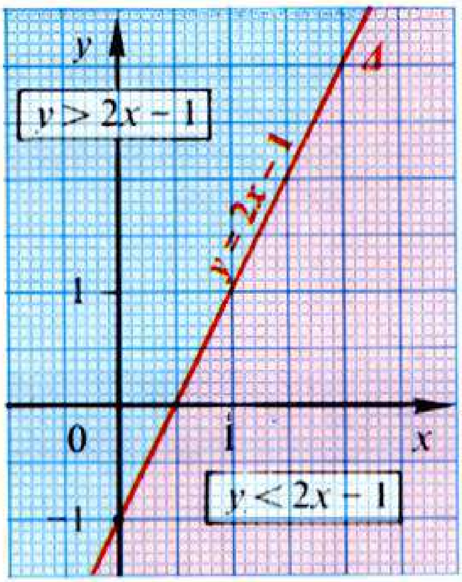
3) On a $3x+2y-2=2y-2$ équivalent à : $3x=0$ ssi $x=0$

Donc : $S=\{(0;y)/y\in\mathbb{R}\}$

4) On a $x+y=2x-1$ équivalent à : $-x+y+1=0$ ssi $y=x-1$

Donc : $S=\{(x;x-1)/x\in\mathbb{R}\}$

**2)les inéquations du premier degré avec deux inconnues.**




**Exemple1 :** Soit l'équation y -2x + 1 = 0
Par transformation on obtient le tracé de la droite " d'équation y = 2x -1 .
Cette droite partage le plan en deux demi- plans.
On peut observer sur le graphe ci-contre :
- Tous les points de la zone « bleu » ont les coordonnées qui vérifient y > 2x -1
- Tous les points de la zone « rouge » ont les coordonnées qui vérifient y < 2x -1

Si y -2x + 1 = 0 (1)
Soit un point A (1 ; 4) (choisi au hasard, à la gauche de la droite ") on remplace ces valeurs dans l'équation (1)
Alors : 4 - 2 fois 1 +1 = 1 ; cela signifie que le point A est dans la zone y -2x + 1 > 0
Soit un point B (2 ; 1) (choisi au hasard, à la droite de la droite ") on remplace ces valeurs dans l'équation (1)
Alors : 1 - 2 fois 2 +1 = -3 ; cela signifie que le point B est dans la zone y -2x + 1 < 0
On peut essayer de savoir si le point d'origine O (0 ;0) appartient à la zone « y -2x + 1 > 0 » ou à la zone « y -2x + 1 < 0 » en remplaçant y=0 et x=0 dans l'équation « y -2x + 1 = 0 » ;
Le résultat donne « 1 » ; donc le point O appartient à la zone « y -2x + 1 > 0 »

**Remarques :**
Si la droite passe par l'origine, on 'essaie » un autre point bien choisi.
Si l'inégalité est au sens large, on doit « ajouter » aux points du demi -plan les points de la droite « frontière ».

**Exemple2 :d'application** :

Résoudre Dans $\mathbb{R}^2$ l'inéquation : $2x-y-2<0$

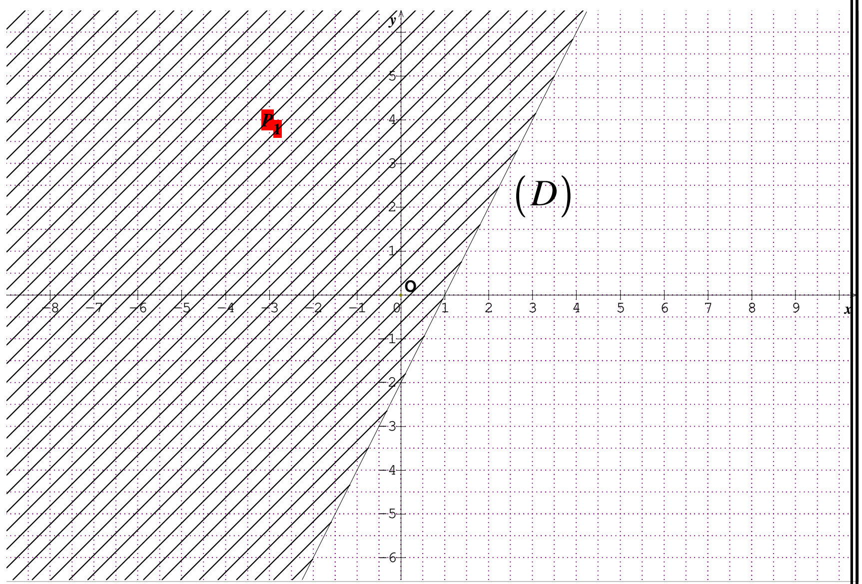
Dans un premier temps : De l'inéquation précédente on en déduit

L'équation de la droite $(D)$ :

$2x-y-2=0$

Cette droite passe par les points $A(0;-2)$ et $B(1;0)$ détermine

Deux demi-plans $P_1$ et $P_2$




(Il nous reste à trouver lequel des deux demi plans qui est la solution de l'inéquation.)

(Nous choisissons un point pris dans l'un des demi-plans, relevons ses coordonnées et nous contrôlons si ce point vérifie l'inéquation.

Conseil : On choisit, de référence, le point « O » de coordonnées (0 ; 0 ) ; c'est-à-dire x= 0 et y = 0 . Les calculs sont donc simplifiés. (Si la droite passe par « O », on prendra un autre point…)

Soit $O(0;0)$ On a $2\times0-0-2<0$

Donc : les coordonnes ( 0 ; 0 ) vérifie l'inéquation.

Donc les solution de l'inéquation $2x-y-2<0$ est l'ensemble des couple $(x;y)$ des points $M(x;y)$ du demi- plan $P_1$ hachuré qui contient le point $O(0;0)$ privé de la droite $(D)$

**Exemple3 : d'application** :

Résoudre Dans $\mathbb{R}^2$ l'inéquation : $x-y-3\geq0$

Dans un premier temps : De l'inéquation précédente on en déduit

L'équation de la droite $(D)$ ::

$x-y-3=0$ détermine

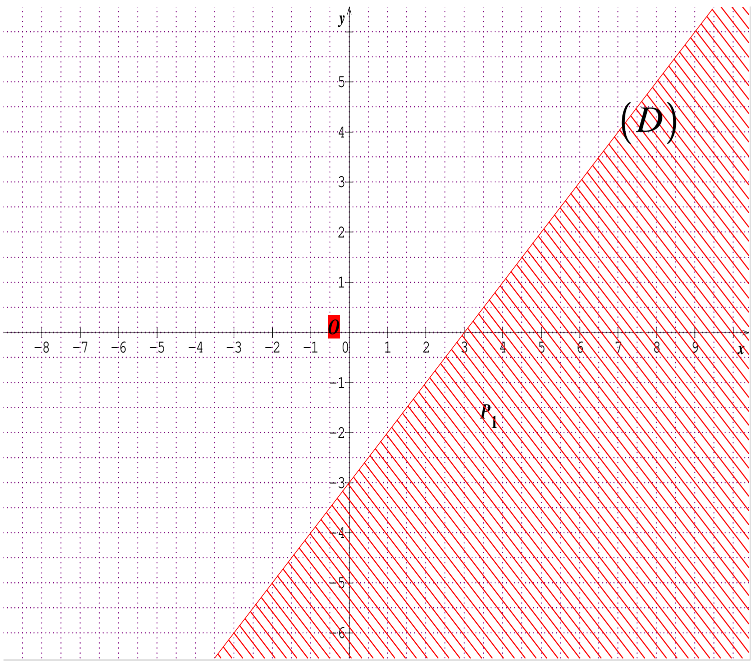
Deux demi-plans $P_1$ et $P_2$

Cette droite passe par les points $A(0;-3)$ et $B(1;-2)$

On a $0-0-3\geq0$ c a d

$-3\geq0$ on constate que le résultat est impossible

donc : les coordonnes ( 0 ; 0 ) ne vérifie pas l'inéquation.




Donc les solutions de l'inéquation $x-y-3\geq0$ est l'ensemble des couple $(x;y)$ des points $M(x;y)$ du demi- plan $P_1$ hachuré qui ne contient pas le point $O(0;0)$

**Exemple4 : d'application :**

Résoudre Dans $\mathbb{R}^2$ l'inéquation : $2x-y<0$

Dans un premier temps : De l'inéquation précédente on en déduit

L'équation de la droite $(D)$ :: $2x-y=0$

Cette droite passe par les points $O(0;0)$ et $A(1;2)$ détermine

Deux demi-plans $P_1$ et $P_2$

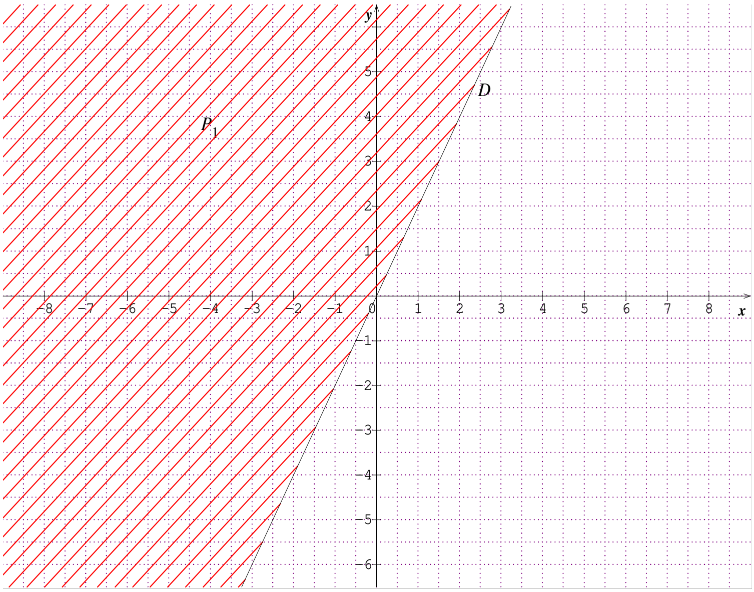
on prendra un autre point $B(1;1)$

On a $2\times1-1<0$ c a d $1<0$

on constate que le résultat est impossible

Donc : les coordonnes $(1;1)$ ne vérifie pas l'inéquation.

Donc les solution de l'inéquation $x-y-3\geq0$ est l'ensemble des couple $(x;y)$ des points $M(x;y)$ du demi-plan $P_1$ hachuré qui ne contient pas le point $O(0;0)$




**Exemple5 :** Résoudre Dans $\mathbb{R}^2$ l'inéquation : $3x+2y<2x+2y-1$

$3x+2y<2x+2y-1$ ssi

$3x-2x+2y-2y+1<0$

ssi $x+1<0$

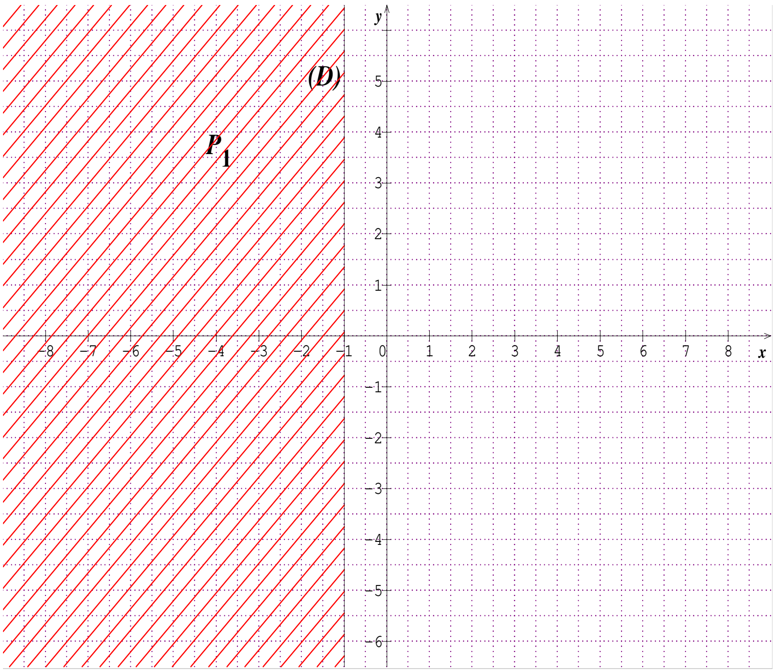
Dans un premier temps : De l'inéquation précédente on en déduit

L'équation de la droite $(D)$ :

$x+1=0$ SSI $x=-1$

Cette droite est parallèle à l'axe des ordonnée passant par le point $(-1;0)$ et détermine Deux demi-plans $P_1$ et $P_2$

Soit $O(0;0)$ On a $0+1<0$ ssi $1<0$




On constate que le résultat est impossible

Donc : les coordonnes $O(0;0)$ ne vérifie pas l'inéquation.

Donc les solutions de l'inéquation $x+1<0$ est l'ensemble des couple $(x;y)$ des points $M(x;y)$ du demi- plan $P_1$ hachuré qui ne contient pas le point $O(0;0)$

**Exemple6 :** Résoudre Dans $\mathbb{R}^2$ le système d'inéquations suivant : $(S)\begin{cases} x+y-1\geq 0 \\ -x+2y+2\leq 0 \end{cases}$

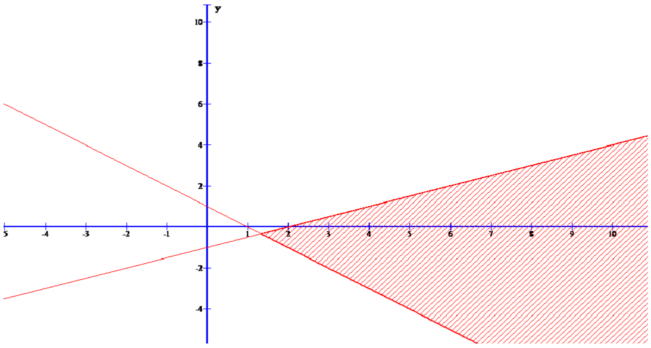
L'équation de la droite $(D_1)$ : $x+y-1=0$

L'équation de la droite $(D_2)$ : $-x+2y+2=0$

Soit $O(0;0)$ On a $0+0-1\geq 0$ ssi $-1\geq 0$ Donc : les coordonnes $O(0;0)$ ne vérifie pas l'inéquation. $x+y-1\geq 0$

Soit $O(0;0)$ On a $-0+2\times 0+2\leq 0$ ssi $2\leq 0$ Donc : les coordonnes $O(0;0)$ ne vérifie pas l'inéquation. $-x+2y+2\leq 0$

Donc les solutions du système est l'ensemble des couple $(x;y)$ des points $M(x;y)$ du plan colorés



**Exemple7 :** Résoudre Dans $\mathbb{R}^2$ le système d'inéquations suivant : $(S)\begin{cases} 2x+y-3\geq 0 \\ -x+y+5\leq 0 \\ x\leq 4 \end{cases}$ $2x+y-3\geq 0$ $-x+y+5\leq 0$ $x\leq 4$

L'équation de la droite $(D_1)$ : $2x+y-3=0$

L'équation de la droite $(D_2)$ : $-x+y+5=0$

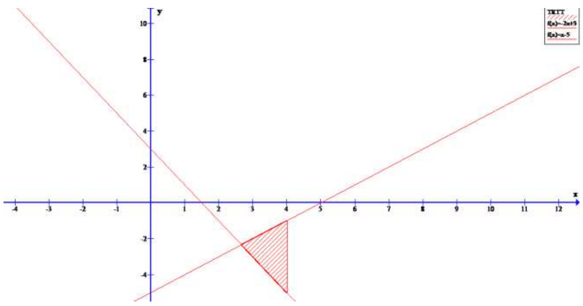
L'équation de la droite $(D_3)$ : $x-4=0$

Soit $O(0;0)$ On a $2\times 0+0-3\geq 0$ ssi $-3\geq 0$ Donc : les coordonnes $O(0;0)$ ne vérifie pas l'inéquation. $2x+y-3\geq 0$

Soit $O(0;0)$ On a $-0+0+5\leq 0$ ssi $5\leq 0$ Donc : les coordonnes $O(0;0)$ ne vérifie pas l'inéquation. $-x+y+5\leq 0$

Soit $O(0;0)$ On a $0\leq 4$ Donc : les coordonnes $O(0;0)$ vérifie l'inéquation. $x\leq 4$

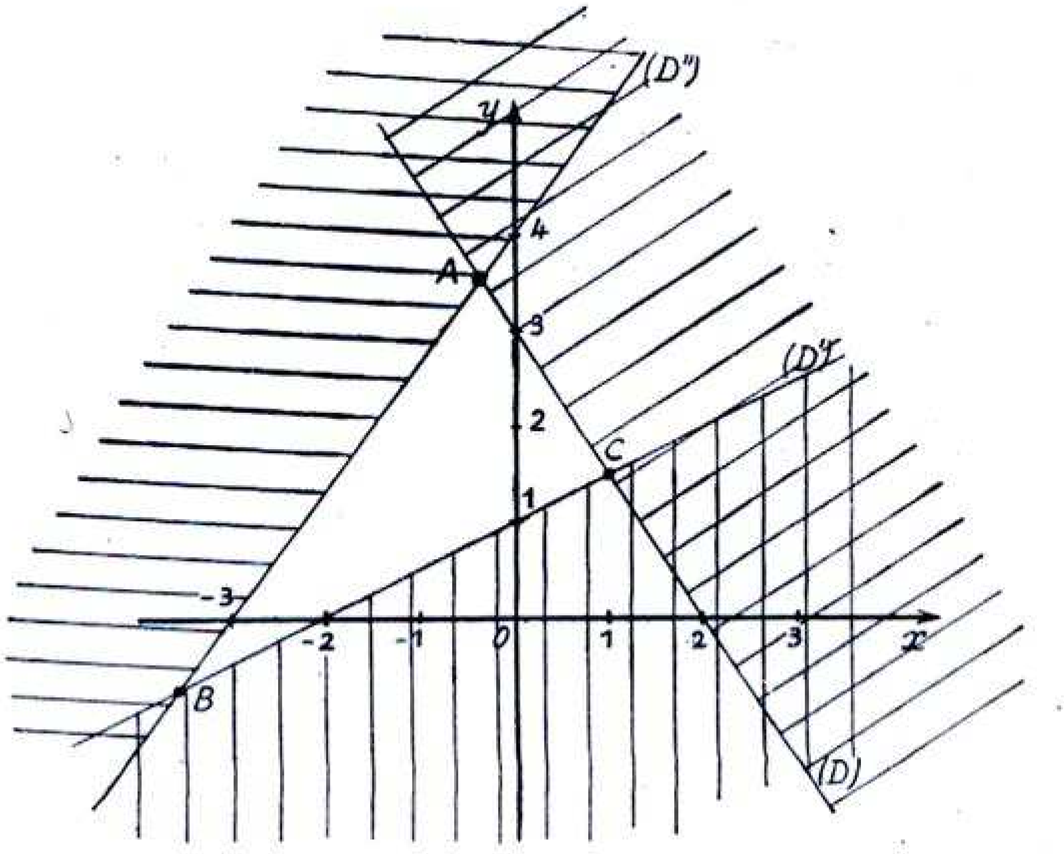
Donc les solutions du système est l'ensemble des couple $(x;y)$ des points $M(x;y)$ du plan colorés



**Exemple8 :** Résoudre le système :

$$\begin{cases} 3x+2y-6<0 & (1) \\ x-2y+2<0 & (2) \\ 4x-3y+12>0 & (3) \end{cases}$$

Etant donnés deux axes de coordonnées « O x » et « O y » nous allons déterminer dans quelle région du plan se trouvent les points « M » dont les coordonnées satisfont à ces trois inéquations.
Pour cela construisons les droites qui ont respectivement pour équations :
(1) $3x + 2y - 6 = 0$ (D)
(2) $x - 2y + 2 = 0$ (D')
(3) $4x - 3y + 12 = 0$ (D'')
Pour que l'inéquation (1) soit satisfaite il faut et il suffit que « M » soit dans la région qui contient l'origine (car pour « x » = 0 ; « y » = 0 l'inéquation est satisfaite).
Pour que l'inéquation (2) soit satisfaite il faut et il suffit que « M » soit dans la région qui ne contient pas l'origine (car pour « x » = 0 ; « y » = 0 l'inéquation n'est pas satisfaite).
Enfin pour que l'inéquation (3) soit satisfaite il faut et il suffit que « M » soit dans la égion qui contient l'origine (car pour « x » = 0 ; « y » = 0 l'inéquation est satisfaite).




Finalement, on voit que « M » doit être à l'intérieur du triangle ABC formé par les 3 droites (D) ; (D') ; (D'').

## III) Système de deux équations du premier degré à deux inconnues

**Définition :** On appelle système de deux équations du premier degré a deux inconnues toute système de la forme : $(I)\ \begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$ où les coefficients $a$, $b$, $c$ , $d$ sont des réels donnés et le couple $(x,y)$ est l'inconnue dans $\mathbb{R}^2$

Résoudre le système $(I)$ c'est déterminer l'ensemble $S$ des solutions c a d l'ensemble des couples $(x,y)$ qui vérifient les deux équations : $ax+by=c$ et $a'x+b'y=c'$ simultanément

**Remarque :** pour Résoudre un système $(I)$ on utilise généralement quatre méthodes :

- Méthode de substitution
- Méthode de combinaison linéaire ou addition
- Méthode des déterminants
- Méthode graphique

### 1) Méthode de substitution :

Substituer, c'est remplacer par (mettre à la place de).

**Exemple**

Dans le système $\begin{cases} x+2y=3 \\ 2x+3y=4 \end{cases}$, on exprime $x$ en fonction de $y$ dans la première équation et on obtient le système équivalent : $\begin{cases} x=3-2y \\ 2x+3y=4 \end{cases}$.

On remplace ensuite $x$ par $3-2y$ dans la seconde équation, ce qui donne le système : $\begin{cases} x=3-2y \\ 2(3-2y)+3y=4 \end{cases}$ qui équivaut à $\begin{cases} x=3-2y \\ -y+6=4 \end{cases}$, soit encore à $\begin{cases} x=3-2y \\ y=2 \end{cases}$ et on remplace $y$ par 2 dans la première équation on trouve $\begin{cases} x=-1 \\ y=2 \end{cases}$ On obtient ainsi le couple solution donc: $S=\{(-1,2)\}$

### 2) Méthode de combinaison linéaire ou méthode par addition.

Si les coefficients des inconnues sont différents de 1 ou de $-1$, pour éviter L'apparition d'écritures fractionnaires, on utilise la **méthode par addition**. Cette méthode consiste à faire apparaître des coefficients opposés pour l'une des inconnues, en multipliant les équations par des facteurs bien choisis. En additionnant membre à membre les deux équations transformées, on obtient une équation à une seule inconnue que l'on peut résoudre.

**Exemple**

Dans le système $\begin{cases} 2x+3y=7 \\ 3x-2y=4 \end{cases}$, on multiplie les termes de la première équation par 2 et ceux de la seconde par 3 et on obtient le système équivalent : $\begin{cases} 4x+6y=14 \\ 9x-6y=12 \end{cases}$.

On additionne membre à membre les deux équations et on remplace la seconde équation du système par le résultat ; on obtient le système $\begin{cases} 4x+6y=14 \\ 13x=26 \end{cases}$

équivalent : $\begin{cases} 8+6y=14 \\ x=2 \end{cases}$, soit $\begin{cases} 6y=6 \\ x=2 \end{cases}$

encore ou $\begin{cases} y=1 \\ x=2 \end{cases}$. On en déduit le couple solution : $S=\{(2,1)\}$ .

**Remarque :** Un système peut n'avoir aucune solution ou encore une infinité de solutions.

Soit le système : $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$. Si les coefficients de $x$ et de $y$ sont proportionnels, c'est-à-dire si $ab'=a'b$, ce système a une infinité de solutions ou pas de solution du tout :

– si de plus $ac' \neq a'c$, alors le système n'a pas de solution ;

– si $ac'=a'c$ (les coefficients des deux équations sont proportionnels), alors le système a une infinité de solutions.

**Exercice1 :**

Résoudre le système dans $\mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} 3x+y=5 \\ 2x-3y=-4 \end{cases}$$

1)Par la Méthode de substitution

A l'aide de l'équation $3x+y=5$ on peut écrite que $y=5-3x$.

On obtient alors le système :

$$\begin{cases} y=5-3x \\ 2x-3y=-4 \end{cases}$$

On va maintenant remplacer le $y$ de la seconde équation par son expression en fonction de $x$ qu'on vient de trouver.

Cela donne alors :

$$\begin{cases} y=5-3x \\ 2x-3(5-3x)=-4 \end{cases}$$

On développe cette seconde équation et on obtient :

$$\begin{cases} y=5-3x \\ 2x-15+9x=-4 \end{cases}$$

On simplifie l'écriture de la deuxième équation :

$$\begin{cases} y=5-3x \\ 11x=11 \end{cases}$$

On résout maintenant l'équation du premier degré pour trouver la valeur de $x$ :

$$\begin{cases} y=5-3x \\ x=1 \end{cases}$$

Maintenant qu'on connaît la valeur de $x$, il ne nous reste plus qu'à remplacer $x$ par sa valeur dans la première équation. Pour un souci de lecture, on va échanger de place les deux équations :

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 5 - 3 \times 1 \end{cases}$$

On finit les calculs :

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

La solution de notre système est donc : $S = \{(1,2)\}$

Il peut être utile de procéder à une vérification. Pour cela, on remplace les inconnues par les valeurs qu'on vient de trouver dans chacune des équations et on vérifie si on retrouve bien l'égalité :

$$\begin{cases} 3 \times 1 + 2 = 3 + 2 = 5 \checkmark \\ 2 \times 1 - 3 \times 2 = 2 - 6 = -4 \checkmark \end{cases}$$

2)Par la méthode combinaison linéaire ou méthode par addition.
Le but de cette méthode est de multiplier les équations par des nombres judicieusement choisis pour qu'en additionnant ou soustrayant les équations on n'ait plus qu'une seule inconnue.
On va chercher, par exemple, à "éliminer" l'inconnue $x$. Pour cela on va :
multiplier la première équation par $2$ qui est le coefficient de l'inconnue de la seconde équation.
multiplier la seconde équation par $3$ qui est le coefficient de l'inconnue de la première équation.
On obtient alors le système :

$$\begin{cases} 6x + 2y = 10 \\ 6x - 9y = -12 \end{cases}$$

On va maintenant soustraire nos deux équations pour ainsi ne plus avoir de termes en $x$.

$$\begin{array}{rcccl} & 6x & + & 2y & = 10 \\ -( & 6x & - & 9y & = -12) \\ \hline & & & 11y & = 22 \\ & & \text{donc} & y & = 2 \end{array}$$

- On remplace maintenant cette valeur dans l'une des deux équations :

Si on choisit la première équation : $3x + 2 = 5$ soit $3x = 3$ et donc $x = 1$.

La solution du système est donc : $S = \{(1,2)\}$

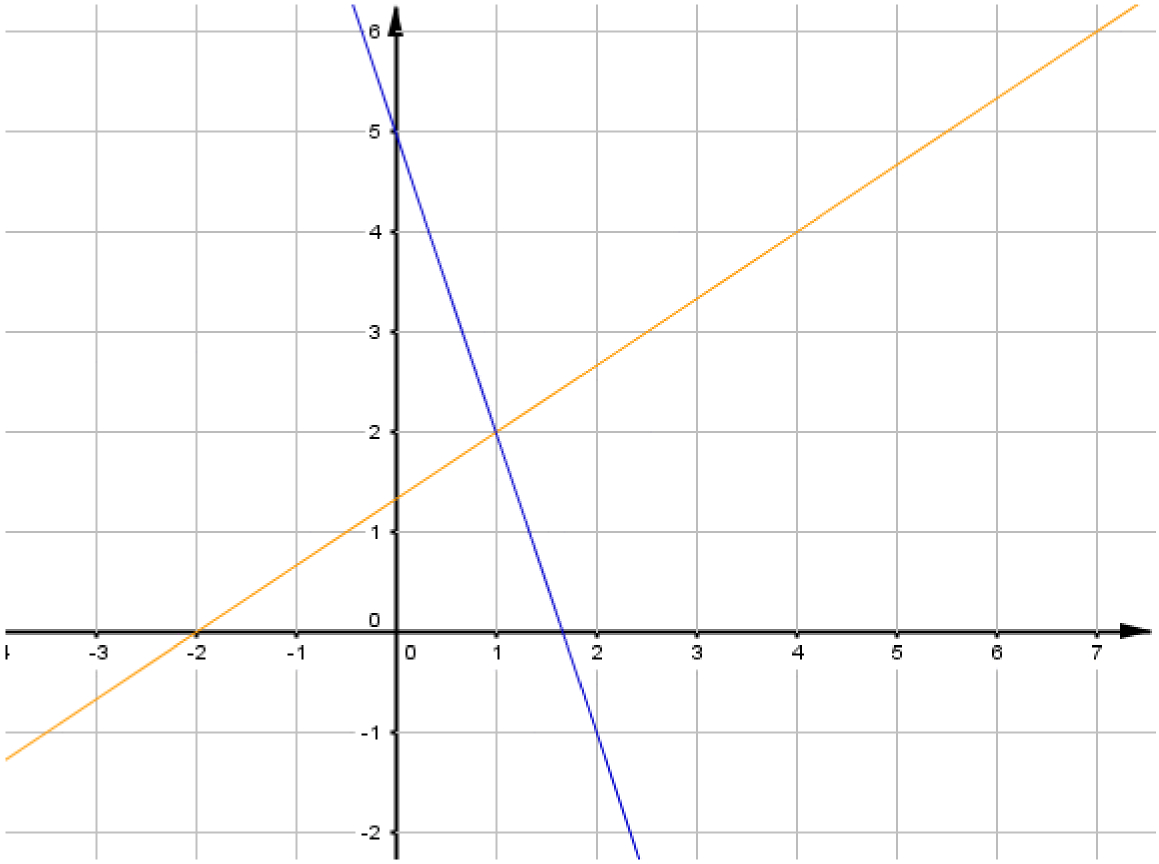
### 3) Méthode graphique

Résoudre graphiquement le système

$$\begin{cases} 3x + y = 5 \\ 2x - 3y = -4 \end{cases}$$

Les équations du type $ax + by = c$ correspondent en fait à des équations de droite.
La solution du système correspond aux coordonnées, dans un repère, du point d'intersection des deux droites.

on a tracé les deux droites associées au système




On lit les coordonnées du point d'intersection $(1,2)$ donc $S=\{(1,2)\}$

On distingue alors trois cas dans la résolution des systèmes graphiquement :

- Si les droites sont parallèles et distinctes, le système (S) n'admet aucun couple solution.
- Si les droites) sont sécantes, le système (S) admet une solution unique.
- Si les droites sont confondues, alors le système (S) admet une infinité de couples solutions.

### 4)Méthode des déterminants

**Définition :** soit le système de deux équations a deux inconnues suivant :

$$(I)\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$$

Le nombre réel noté : $\Delta=\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}=ab'-a'b$

S'appelle le déterminant du système $(I)$

Le critère suivant permet d'en savoir plus long sur le nombre de solutions d'un système....

**Proposition :** soit le système de deux équations a deux inconnues suivant :

$$(I)\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$$ et $\Delta$ son déterminant

**1)**Si $\Delta \neq 0$ alors le système $(I)$ admet un couple solution unique

$$x=\frac{\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}}{\Delta}=\frac{cb'-c'b}{\Delta} \qquad y=\frac{\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}}{\Delta}=\frac{ac'-a'c}{\Delta}$$

**2)**Si $\Delta=0$ alors :

- ✓ Si $\Delta_x=0$ et $\Delta_y=0$ alors :les deux équations $ax+by=c$ et $a'x+b'y=c'$ sont équivalentes et dans ce cas Résoudre le système c'est Résoudre l'une des équations par exemple en choisi : $ax+by=c$ et alors on a :
  $$S=\left\{\left(x;\frac{c-ax}{b}\right)/\,x\in\mathbb{R};b\neq 0\right\}$$
- ✓ Si $\Delta_x \neq 0$ ou $\Delta_y \neq 0$ alors le système $(I)$ n'admet aucun couple solutions et donc $S=\varnothing$

**Exemple :**

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes suivants

1) $\begin{cases} 3x-y=5 \\ 2x+4y=-6 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 8x+4y=4 \\ 2x+y=3 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} \sqrt{2}x-y=\sqrt{2} \\ 2x-\sqrt{2}y=2 \end{cases}$ 4) $(I)\begin{cases} 4x+2y=-2 \\ x-3y=-11 \\ 2x+4y=8 \end{cases}$

**5)** $(I)\begin{cases} x-2y=1 \\ 3x+y=2 \\ x-y=3 \end{cases}$

**1)**Le déterminant est : $\Delta=\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}=3\times4-(-1)\times2=14\neq 0$

Alors le système $(I)$ admet un couple solution unique

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ -6 & 4 \end{vmatrix}}{14}=\frac{5\times4-(-6)\times(-1)}{14}=\frac{20-6}{14}=\frac{14}{14}=1$$

$$y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & -6 \end{vmatrix}}{14}=\frac{3\times(-6)-5\times2}{14}=\frac{-18-10}{14}=\frac{-28}{14}=-2$$

On en déduit le couple solution : $S=\{(1,-2)\}$ .

**2)**Le déterminant est : $\Delta = \begin{vmatrix} 8 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 8-8=0$

Alors on calcule $\Delta_x = \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 4-12=-8 \neq 0$

Donc $S = \varnothing$

**3 )** $\begin{cases} \sqrt{2}x - y = \sqrt{2} \\ 2x - \sqrt{2}y = 2 \end{cases}$

Le déterminant est : $\Delta = \begin{vmatrix} \sqrt{2} & -1 \\ 2 & -\sqrt{2} \end{vmatrix} = -2+2=0$

Alors on calcule $\Delta_x = \begin{vmatrix} \sqrt{2} & -1 \\ 2 & -\sqrt{2} \end{vmatrix} = -2+2=0$

Alors on calcule $\Delta_y = \begin{vmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2\sqrt{2}-2\sqrt{2}=0$

Donc les deux équations $\sqrt{2}x - y = \sqrt{2}$ et $2x - \sqrt{2}y = 2$ sont équivalentes et dans ce cas Résoudre le système c'est Résoudre l'une des équations par exemple en choisi $\sqrt{2}x - y = \sqrt{2}$ c a d $\sqrt{2}x - \sqrt{2} = y$ et alors on a : $S = \left\{ \left( x; \sqrt{2}x - \sqrt{2} \right) / x \in \mathbb{R} \right\}$

**4)** $(I) \begin{cases} 4x+2y=-2 \\ x-3y=-11 \\ 2x+4y=8 \end{cases}$ Soit le système $(I') \begin{cases} 4x+2y=-2 \\ x-3y=-11 \end{cases}$

Le déterminant est : $\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -12-2=-14 \neq 0$

Alors le système $(I')$ admet une solution unique

$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -11 & -3 \end{vmatrix}}{-14} = \frac{28}{-14} = -2$ $\qquad$ $y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}}{1} = \frac{2}{1} = 2$

Donc $(-2,3)$ est une solution du système $(I')$

On remplace dans la dernière équations c a d $x-3y=-11$

On a $2\times(-2)+4\times3=-4+12=8$

Donc $(-2,3)$ vérifie toutes les équations

On en déduit que : $S = \{(-2,3)\}$

**5)** $(I)\begin{cases} x-2y=1 \\ 3x+y=2 \\ x-y=3 \end{cases}$ Soit le système $(I')\begin{cases} x-2y=1 \\ x-y=3 \end{cases}$

Le déterminant est : $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1+2 = 1 \neq 0$

Alors le système $(I')$ admet une solution unique

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}}{1} = \frac{5}{1} = 5 \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 1 & -11 \end{vmatrix}}{-14} = \frac{-42}{-14} = 3$$

Donc $(-2,3)$ est une solution du système $(I')\begin{cases} x-2y=1 \\ x-y=3 \end{cases}$

On remplace dans la deuxième équations c a d $3x+y=2$

On a $3\times 5+2=17\neq 2$

Donc $(-2,3)$ ne vérifie pas toutes les équations

On en déduit que : $S=\varnothing$

**Applications :** RÉSOLUTION DE PROBLÈMES

L'association des Enfants Heureux organise une course. Chaque enfant a un vélo ou un tricycle. L'organisateur a compté $64$ enfants et $151$ roues.

1. Combien de vélos et combien de tricycles sont engagés dans cette course ?
2. Chaque vélo engagé rapporte $500$ F et chaque tricycle $400$ F. Calculer la somme que l'association des Enfants Heureux recevra.

**solution :**

1. Première étape : on identifie ce que nos inconnues vont représenter.
On cherche le nombre de vélos et le nombre de tricycle engagés.
On va donc appeler $V$ le nombre de vélos et $T$ le nombre de tricycles.
Deuxième étape : on met en équation le problème donné.
On a $64$ enfants. Cela signifie donc que $V+T=64$.
On a compté $151$ roues. Chaque vélo possède $2$ roues et chaque tricycle possède $3$ roues. On a donc l'équation $2V+3T=151$.
Troisième étape : On résout le système

$$\begin{cases} V+T=64 \\ 2V+3T=151 \end{cases}.$$

A l'aide de la méthode par substitution.

$$\begin{cases} V=64-T \\ 2V+3T=151 \end{cases} \quad \begin{cases} V=64-T \\ 2(64-T)+3T=151 \end{cases} \quad \begin{cases} V=64-T \\ 128-2T+3T=151 \end{cases}$$

$$\begin{cases} V=64-T \\ T=23 \end{cases} \quad \begin{cases} T=23 \\ V=64-23 \end{cases} \quad \begin{cases} T=23 \\ V=41 \end{cases}$$

On vérifie que le couple $(41;23)$ est bien solution du système.

$$\begin{cases} 41+23=64\checkmark \\ 2\times 41+3\times 23=82+69=151\checkmark \end{cases}$$

A l'aide de la méthode par combinaisons linéaires

$$\begin{cases} V+T=64 & (\times 2) \\ 2V+3T=151 & (\times 1) \end{cases}$$

$$\begin{array}{rrrrl} & 2V & + & 2T & =128 \\ -( & 2V & + & 3T & =151) \\ \hline & & & -T & =-23 \\ & & \text{donc} & T & =23 \end{array}$$

On reporte cette valeur dans la première équation :
$V+23=64$ donc $V=64-23$ et finalement $V=41$.
On contrôle que les valeurs trouvées vérifient la seconde équation
: $2\times 41+3\times 23=82+69=151\checkmark$.
Conclusion : $41$ vélos et $23$ tricycles étaient engagés dans cette course.
2. On utilise ces valeurs pour répondre à la question posée.
$41\times 500+23\times 400=29\ 700$
L'association recevra donc $29\ 700$ F grace à cette course.
Exercice :

1. On considère le système suivant : $\begin{cases} 45x+30y=510 \\ 27x+20y=316 \end{cases}$.
a. Les nombres $x=10$ et $y=2$ sont-ils solutions de ce système ?
b. Résoudre le système.
2. Pour les fêtes de fin d'année, un groupe d'amis souhaite emmener leurs enfants assister à un spectacle.
Les tarifs sont les suivants :
- $45$ dh par adulte et $30$ dh par enfant s'ils réservent en catégorie 1.
- $27$ dh par adulte et $20$ dh par enfant s'ils réservent en catégorie 2.

Le coût total pour ce groupe d'amis est de $510$ euros s'ils réservent en catégorie 1 et $316$ euros s'ils réservent en catégorie 2.
Déterminer le nombre d'adultes et d'enfants de ce groupe?
Correction
1. a. Regardons si les nombres $x=10$ et $y=2$ vérifient chacune des deux équations
$45\times 10+30\times 2=450+60=510\checkmark$
$27\times 10+20\times 2=270+40=310\neq 316$
Le couple $(10;2)$ n'est donc pas solution du système.
b. Nous allons résoudre ce système à l'aide de combinaisons linéaires :

$$\begin{cases} 45x+30y=510 & (\times 20) \\ 27x+20y=316 & (\times 30) \end{cases}$$

$$\begin{array}{rrrrl} & 900x & + & 600y & =10\ 200 \\ -( & 810x & + & 600y & =9\ 480) \\ \hline & 90x & & & =720 \\ & & \text{donc} & x & =8 \end{array}$$

On reporte ce résultat dans la première équation :
$45\times 8+30y=510$ soit $360+30y=510$ donc $30y=150$ d'où $y=5$.
On vérifie que le couple $(8;5)$ est bien solution de la seconde équation :
$27\times 8+20\times 5=216+100=316\checkmark$.
Par conséquent la solution du système est $(8;5)$.
2. On appelle $A$ le nombre d'adultes et $E$ le nombre d'enfants.

Avec la première catégorie on obtient l'équation $45A + 30E = 510$.
Avec la seconde catégorie on obtient l'équation $27A + 20E = 316$.

On est donc ramené à résoudre le système $\begin{cases} 45A + 30E = 510 \\ 27A + 20E = 316 \end{cases}$.
D'après la question précédente le couple $(8;5)$ est solution de ce système.
Il y avait donc $8$ adultes et $5$ enfants dans ce groupe.

## IV) équation du second degré a une inconnue.

**1)Définition :** Une équation du second degré a une inconnue est une équation de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ où a, b et c sont des réels avec $a \neq 0$.
Une solution de cette équation s'appelle une racine du trinôme $ax^2 + bx + c$.

**Exemple :**

L'équation $3x^2 - 6x - 2 = 0$ est une équation du second degré.

**2)Résolution d'une équation du second degré a une inconnue.**

**Activité :**

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $x^2 = 16$ 2) $x^2 = -8$ 3) $(x+2)^2 = 9$ 4) $5x^2 - 4x = 0$ 5) $3x^2 - x - 2 = 0$

**Solution :**

1)L'équation $x^2 = 16$.

16 est positif donc l'équation admet deux solutions $x = \sqrt{16} = 4$ et $x = -\sqrt{16} = -4$.
Donc l'ensemble de toutes les solutions est : $S = \{-4;4\}$

2)L'équation $x^2 = -8$.

-8 est négatif donc l'équation n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.
Donc : $S = \varnothing$

3)L'équation $(x+2)^2 = 9$.

On a alors $x + 2 = 3$ ou $x + 2 = -3$.
L'équation admet deux solutions $x = 3 - 2 = 1$ et $x = -3 - 2 = -5$.
Donc l'ensemble de toutes les solutions est : $S = \{-5;1\}$

2) $5x^2 - 4x = 0$
$x(5x - 4) = 0$
Soit : $x = 0$ ou $5x - 4 = 0$

Soit : $x = 0$ ou $x = \frac{4}{5}$

Donc l'ensemble de toutes les solutions est : $S = \left\{0;\frac{4}{5}\right\}$

5) $3x^2 - x - 2 = 0$

On va d'abord Factoriser les trinômes $3x^2 - x - 2$

$$3x^2 - x - 2 = 3\left(x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}\right) = 3\left(x^2 - 2\frac{1}{2\times 3}x + \left(\frac{1}{6}\right)^2 - \left(\frac{1}{6}\right)^2 - \frac{2}{3}\right)$$

$$3x^2-x-2=3\left(x^2-\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}\right)=3\left(\left(x-\left(\frac{1}{6}\right)\right)^2-\frac{25}{36}\right)$$

$$3x^2-x-2=3\left(\left(x-\left(\frac{1}{6}\right)\right)^2-\frac{25}{36}\right)$$ Cette écriture s'appelle la forme canonique

$$3x^2-x-2=3\left(x-\frac{1}{6}-\frac{5}{6}\right)\left(x-\frac{1}{6}+\frac{5}{6}\right)=3(x-1)\left(x+\frac{2}{3}\right)$$

Donc : $3x^2-x-2=3(x-1)\left(x+\frac{2}{3}\right)$ la forme factorisée

$3x^2-x-2=0$ ssi $(x-1)\left(x+\frac{2}{3}\right)=0$

On a alors $x-1=0$ ou $x+\frac{2}{3}=0$

L'équation admet deux solutions $x=1$ et . $x=-\frac{2}{3}$

Donc l'ensemble de toutes les solutions est : $S=\left\{-\frac{2}{3};1\right\}$

**Cas général :**

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a\left(x^2+2\frac{b}{2\times a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}\right)=\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a}$$

$$=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

On pose $\Delta=b^2-4ac$ et $\alpha=-\frac{b}{2a}$ et $\beta=-\frac{\Delta}{4a^2}$

**1)Définitions :** Soit le du trinôme $ax^2+bx+c$ avec $a\neq 0$.

- ✓ Le du trinôme peut s'écrire sous la forme dite la forme canonique : $ax^2+bx+c=a\left[(x-\alpha)^2+\beta\right]$
- ✓ On appelle **discriminan**t du trinôme $ax^2+bx+c$, le nombre réel, noté $\Delta$ égal à $\Delta=b^2-4ac$.

**Exemple :**

Pour le trinôme $3x^2-x-2$

a) Calculons le discriminant :

a = 3, b = -1 et c = -2 donc $\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times 3 \times (-2) = = 1 + 24 = 25$

b) déterminons la forme canonique :

$3x^2-x-2=3\left[(x-\alpha)^2+\beta\right]$ $\alpha=-\frac{b}{2a}=-\frac{-1}{2\times 3}=\frac{1}{6}$ et $\beta=-\frac{\Delta}{4a^2}=-\frac{25}{4\times 3^2}=-\frac{25}{36}$

$3x^2-x-2=3\left[\left(x-\frac{1}{6}\right)^2-\frac{25}{36}\right]$ la forme canonique :

**Propriété1 :** Les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $x^2=a$

Dépendent du signe de a.

Si a < 0, alors l'équation n'a pas de solution.

Si a = 0, alors l'équation possède une unique solution qui est 0.

Si a > 0, alors l'équation possède deux solutions qui sont $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$

**Démonstration :**

- Si $a < 0$, l'équation n'a pas de solution car un carré est positif.
- Si $a = 0$, alors l'équation s'écrit $x^2 = 0$ donc $x = 0$.
- Si $a > 0$ : $x^2 = a$ équivaut à : $x^2 - a = 0$

  Soit $\left(x-\sqrt{a}\right)\left(x+\sqrt{a}\right)=0$

  $x-\sqrt{a}=0$ ou $x+\sqrt{a}=0$

  $x=\sqrt{a}$ ou $x=-\sqrt{a}$

**Propriété2 :** soit l'équation $ax^2+bx+c=0$ où a, b et c sont des réels avec $a \neq 0$.
et soit $\Delta$ son discriminant

- Si $\Delta < 0$ : L'équation $ax^2+bx+c=0$ n'a pas de solution réelle c a d : $S=\varnothing$
Et on ne peut pas factorisée le trinôme $ax^2+bx+c$

- Si $\Delta = 0$ : L'équation $ax^2+bx+c=0$ a une seule solution (dite double) : $x_0=-\dfrac{b}{2a}$.

c a d : $S=\{x_0\}$ et le trinôme $ax^2+bx+c$ a une forme factorisée :

$ax^2+bx+c=a\left(x-x_0\right)^2$

- Si $\Delta > 0$ : L'équation $ax^2+bx+c=0$ a deux solutions distinctes :

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \qquad \text{c a d : } S=\{x_1;x_2\}$$

Et le trinôme $ax^2+bx+c$ a une forme factorisée : $ax^2+bx+c=a\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)$

**Démonstration :**

On a vu que le trinôme $ax^2+bx+c$ avec $a \neq 0$ peut s'écrire sous sa forme canonique

$ax^2+bx+c=a\left[\left(x-\alpha\right)^2+\beta\right]$ avec $\alpha=-\dfrac{b}{2a}$ et $\beta=-\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}$.

Donc : $ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{b^2-4ac}{4a^2}\right]=a\left[\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{\Delta}{4a^2}\right]$

Si $\Delta < 0$ : L'équation $ax^2+bx+c=0$ peut s'écrire : $\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2=\dfrac{\Delta}{4a^2}$

Comme un carré ne peut être négatif $\left(\dfrac{\Delta}{4a^2}<0\right)$, l'équation n'a pas de solution.

- Si $\Delta = 0$ : $ax^2+bx+c=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2$

L'équation $ax^2+bx+c=0$ peut s'écrire : $\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2=0$

L'équation n'a qu'une seule solution : $x_0=-\dfrac{b}{2a}$

- Si $\Delta > 0$ : $ax^2+bx+c=a\left(x+\dfrac{b}{2a}+\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\dfrac{b}{2a}-\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$

L'équation $ax^2+bx+c=0$ peut s'écrire :

$$\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)=0$$

L'équation a deux solutions distinctes : $x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

**Applications :** Résoudre les équations suivantes et Factoriser les trinômes :

a) $2x^2-x-6=0$ b) $2x^2-3x+\frac{9}{8}=0$ c) $x^2+3x+10=0$

**Solution :**

a) Calculons le discriminant de l'équation $2x^2-x-6=0$ :

a = 2, b = -1 et c = -6 donc $\Delta = b^2-4ac = (-1)^2-4\times 2\times(-6)=49$.

Comme $\Delta > 0$, l'équation possède deux solutions distinctes :

$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-1)-\sqrt{49}}{2\times 2}=-\frac{3}{2}$ et $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-1)+\sqrt{49}}{2\times 2}=2$

$S=\left\{-\frac{3}{2};2\right\}$ et le trinôme $2x^2-x-6$ a une forme factorisée :

$2x^2-x-6=a\left(x-\left(-\frac{3}{2}\right)\right)(x-2)$ c a d $2x^2-x-6=a\left(x+\frac{3}{2}\right)(x-2)$

b) Calculons le discriminant de l'équation $2x^2-3x+\frac{9}{8}=0$ :

a = 2, b = -3 et c = $\frac{9}{8}$ donc $\Delta = b^2-4ac=(-3)^2-4\times 2\times\frac{9}{8}=0$.

Comme $\Delta = 0$, l'équation possède une seule solution (dite double):

$x_0=-\frac{b}{2a}=-\frac{-3}{2\times 2}=\frac{3}{4}$ c a d : $S=\left\{\frac{3}{4}\right\}$ et le trinôme $2x^2-3x+\frac{9}{8}$ a une forme

factorisée : $2x^2-3x+\frac{9}{8}=2\left(x-\frac{3}{4}\right)^2$

c) Calculons le discriminant de l'équation $x^2+3x+10=0$ :

a = 1, b = 3 et c = 10 donc $\Delta = b^2-4ac=3^2-4\times 1\times 10=-31$.

Comme $\Delta < 0$, l'équation ne possède pas de solution réelle.

c a d : $S=\varnothing$

**Exercice :** Factoriser les trinômes :

a) $4x^2+19x-5$ b) $9x^2-6x+1$

**Solution :** a) On cherche les racines du trinôme $4x^2+19x-5$ :

Calcul du discriminant : $\Delta = 19^2-4\times 4\times(-5)=441$

Les racines sont : $x_1=\frac{-19-\sqrt{441}}{2\times 4}=-5$ et $x_2=\frac{-19+\sqrt{441}}{2\times 4}=\frac{1}{4}$

On a donc : $4x^2+19x-5=4(x-(-5))\left(x-\frac{1}{4}\right)=(x+5)(4x-1)$.

b) On cherche les racines du trinôme $9x^2-6x+1$ :

Calcul du discriminant : $\Delta = (-6)^2-4\times 9\times 1=0$

Comme $\Delta = 0$, le trinôme possède une seule racine (dite racine double):

$x_0=-\frac{b}{2a}=-\frac{-6}{2\times 9}=\frac{1}{3}$ c a d : $S=\left\{\frac{1}{3}\right\}$

et le trinôme $9x^2-6x+1$ a une forme factorisée : $9x^2-6x+1=9\left(x-\frac{1}{3}\right)^2$

**Exercice :** Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) :

$$\frac{x-2}{2x^2-3x-2}-\frac{x^2}{2x^2+13x+6}=0$$

**Solution :**

- On commence par factoriser les expressions $2x^2-3x-2$ et $2x^2+13x+6$ :

Le discriminant de $2x^2-3x-2$ est $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 2 \times (-2) = 25$ et ses racines sont :

$x_1=\frac{3-\sqrt{25}}{2\times 2}=-\frac{1}{2}$ et $x_2=\frac{3+\sqrt{25}}{2\times 2}=2$

On a donc : $2x^2-3x-2=2\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-2)=(2x+1)(x-2)$.

Le discriminant de $2x^2+13x+6$ est $\Delta' = 13^2 - 4 \times 2 \times 6 = 121$ et ses racines sont :

$x_1'=\frac{-13-\sqrt{121}}{2\times 2}=-6$ et $x_2'=\frac{-13+\sqrt{121}}{2\times 2}=-\frac{1}{2}$

On a donc : $2x^2+13x+6=2(x+6)\left(x+\frac{1}{2}\right)=(x+6)(2x+1)$.

- L'équation (E) s'écrit : $\frac{x-2}{(2x+1)(x-2)}-\frac{x^2}{(x+6)(2x+1)}=0$

Les valeurs -6, $-\frac{1}{2}$ et 2 annulent le dénominateur.

On résout alors (E) sur $\mathbb{R}\setminus\left\{-6\,;-\frac{1}{2}\,;2\right\}$.

(E) s'écrit : $\frac{1}{2x+1}-\frac{x^2}{(x+6)(2x+1)}=0$ c c a d $\frac{x+6}{(2x+1)(x+6)}-\frac{x^2}{(x+6)(2x+1)}=0$

$\frac{x+6-x^2}{(2x+1)(x+6)}=0$ c a d $x+6-x^2=0$ car $x\neq-\frac{1}{2}$ et $x\neq-6$.

Le discriminant de $-x^2+x+6$ est $\Delta'' = 1^2 - 4 \times (-1) \times 6 = 25$.

Les racines sont : $x_1''=\frac{-1-\sqrt{25}}{2\times(-1)}=3$ et $x_2''=\frac{-1+\sqrt{25}}{2\times(-1)}=-2$

Les solutions de l'équation (E) sont : -2 et 3.

**3)La somme et le produit des racines d'un trinôme.**

**Proposition1 :** soit le trinôme $ax^2+bx+c$ tel que son discriminant $\Delta>0$

Si $x_1$ et $x_2$ sont les racines du trinôme alors : $x_1+x_2=\frac{-b}{a}$ et $x_1\times x_2=\frac{c}{a}$

**Exemple :** soit le trinôme $2018x^2-2019x+1$

a) vérifier que 1 est racine du trinôme

b) trouver l'autre racine du trinôme

**Solution :**

a) $2018\times1^2-2019\times1+1=2018\times1^2-2019\times1+1=2019-2019=0$ donc $x_1=1$

b) a = 2018, b = 2019 et c = 1

on a : $x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$ donc $1 \times x_2 = \frac{1}{2018}$ donc $x_2 = \frac{1}{2018}$

**Exemple :** soit le trinôme $(T)$ : $-2x^2 + \sqrt{2}x + 2$

1) prouver que le trinôme $(T)$ admet deux racines distinctes $\alpha$ et $\beta$ sans les calculer

2) Déduire les valeurs suivantes : $\alpha + \beta$ ; $\alpha \times \beta$ ; $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$ ; $\alpha^2 + \beta^2$ ; $\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta}$ ; $\alpha^3 + \beta^3$

**Solution :** 1) : $a = -2$ **et** $c = 2$ **et** $b = \sqrt{2}$

$\Delta = b^2 - 4ac = \left(\sqrt{2}\right)^2 - 4 \times 2 \times (-2) = 2 + 16 = 18 > 0$

Comme $\Delta > 0$ : le trinôme $(T)$ : a deux racines distinctes : $\alpha$ et $\beta$

2) on a : $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$ et $\alpha \times \beta = \frac{c}{a}$ donc $\alpha + \beta = -\frac{\sqrt{2}}{-2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\alpha \times \beta = \frac{2}{-2} = -1$

$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\beta + \alpha}{\alpha\beta} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{-1} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

On a : $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$ donc $(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = \alpha^2 + \beta^2$ donc $\alpha^2 + \beta^2 = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}$

On a : $\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\beta^2 + \alpha^2}{\alpha\beta}$ donc $\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\frac{5}{2}}{-1} = -\frac{5}{2}$

On a : $(\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$ donc $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha^2\beta - 3\alpha\beta^2$

donc $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta)$ donc $\alpha^3 + \beta^3 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 - 3(-1)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

donc $\alpha^3 + \beta^3 = \frac{\sqrt{2}^3}{2^3} + \frac{3\sqrt{2}}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{8} + \frac{3\sqrt{2}}{2} = \frac{2\sqrt{2} + 12\sqrt{2}}{8} = \frac{14\sqrt{2}}{8} = \frac{7\sqrt{2}}{4}$

**Proposition2 :** le système : $(I)\begin{cases} x + y = s \\ x \times y = p \end{cases}$ où les $s$ , $p$ sont des réels donnés admet une solution dans $\mathbb{R}^2$ ssi $s^2 - p \geq 0$ et dans ce cas $x$ , $y$ sont solutions de l'équation $x^2 - sx + p = 0$

**Exemple :** Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système : $\begin{cases} x + y = 5 \\ x \times y = 4 \end{cases}$

**Solution :** méthode1 :

$\begin{cases} x + y = 5 \\ x \times y = 4 \end{cases}$ ssi $\begin{cases} x = 5 - y \\ (5 - y) \times y = 4 \end{cases}$

On considère : $(5 - y) \times y = 4$ ssi $-y^2 + 5y = 4$ ssi $y^2 - 5y + 4 = 0$

Calculons le discriminant :

a = 1, b = -5 et c = 4 donc $\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 4 = 9$.

Comme $\Delta > 0$, l'équation possède deux solutions distinctes :

$y_1 = \frac{5 - \sqrt{9}}{2a} = \frac{5 - 3}{2 \times 1} = 1$ et $y_2 = \frac{5 + \sqrt{9}}{2a} = \frac{5 + 3}{2 \times 1} = 4$

Si $y = 1$ et puisque $x = 5 - y$ alors $x = 5 - 1 = 4$

Si $y = 4$ et puisque $x = 5 - y$ alors $x = 5 - 4 = 1$

On en déduit que : $S=\{(4,1);(1,4)\}$

**4) le d'un trinôme.**

Soit le trinôme $ax^2+bx+c$

Si $b$ est pair c a d $b=2b'$ on parle du discriminant réduit $\Delta'=b'^2-ac$ et on a :

- Si $\Delta'$ < 0 : pas de solution réelle c a d : $S=\varnothing$
- Si $\Delta'$ = 0 : L'équation a une seule solution (dite double) : $x_0=-\frac{b'}{a}$.
- Si $\Delta'$ > 0 : L'équation a deux solutions distinctes : $x_1=\frac{-b'-\sqrt{\Delta'}}{a}$ et $x_2=\frac{-b'+\sqrt{\Delta'}}{a}$

**Applications :** Résoudre l'équations suivantes : $x^2-22x-23=0$

**Solution :** on a : b = -22 et 22 est pair b = -2 x 11 donc b' = - 11

Calculons le discriminant réduit $\Delta'=b'^2-ac$ de l'équation :

$$\Delta'=b'^2-ac=(-11)^2-1\times(-23)=121+23=144$$

Comme Δ' > 0, l'équation possède deux solutions distinctes :

$$x_1=\frac{-b'-\sqrt{\Delta'}}{a}=\frac{-(-11)-\sqrt{144}}{1}=\frac{11-12}{1}=-1 \text{ et } x_2=\frac{-b'+\sqrt{\Delta'}}{a}=\frac{-(-11)+\sqrt{144}}{1}=\frac{11+12}{1}=23$$

$S=\{-1;23\}$

## V) Inéquation du second degré a une inconnue.

**1)Définition :** on pose : $P(x)=ax^2+bx+c \quad a\neq 0$

Une inéquation du second degré a une inconnue est une inéquation de la forme $P(x)\geq 0$ ou $P(x)>0$ ou $P(x)\leq 0$ ou $P(x)<0$

**2) Signes du trinôme :** $ax^2+bx+c$ . $a\neq 0$

Si Δ < 0 : On a vu que le trinôme $ax^2+bx+c$ avec $a\neq 0$ peut s'écrire sous la forme :

$ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]$ et puisqueΔ < 0 Donc : -Δ > 0

Alors $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}>0$

et par suite : le trinôme $ax^2+bx+c$ est du signe de $a$

Si Δ = 0 : On a : $ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ et puisque $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2\geq 0$

Alors le trinôme $ax^2+bx+c$ est du signe de $a$ pour $x\neq\frac{-b}{2a}$

L'équation $ax^2+bx+c=0$ peut s'écrire : $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=0$

- Si Δ > 0 : on a : $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$

| $x$ | $-\infty$ | | $x1$ | | $x2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x-x1$ | | $-$ | | $-$ | 0 | $+$ | |
| $x-x2$ | | $-$ | 0 | $+$ | | $+$ | |
| $(x-x1)(x-x2)$ | | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ | |

Donc on a :

| $x$ | $-\infty$ | $x_1$ | | $x_2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $P(x)$ | Signe de $a$ | 0 | Signe de $-a$ | 0 | Signe de $a$ |

**Résumé :**

- Si $\Delta > 0$ le trinôme $ax^2+bx+c$ est du signe de $a$ a l'extérieur des racines et le signe contraire de $a$ entre les racines
- Si $\Delta < 0$ : le trinôme $ax^2+bx+c$ est du signe de $a$

| $x$ | $-\infty$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $P(x)=ax^2+bx+c$ | Signe de $a$ | |

- Si $\Delta = 0$ : le trinôme $ax^2+bx+c$ est du signe de $a$

| $x$ | $-\infty$ | $x_1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $P(x)=ax^2+bx+c$ | Signe de $a$ | 0 | Signe de $a$ |

**Exemple :** Résoudre les inéquations suivantes :

a) $2x^2-3x+1\geq 0$ b) $-2x^2+4x-2\geq 0$ c) $3x^2+6x+5<0$

**Solution :** a) $2x^2-3x+1\geq 0$ $a=2$

Calculons le discriminant : a = 2, b = -3 et c = 1 donc

$\Delta=b^2-4ac=(-3)^2-4\times2\times1=9-8=1>0$

Comme $\Delta > 0$, l'équation possède deux solutions distinctes :

$x_1=\frac{-(-3)+\sqrt{1}}{2\times2}=\frac{3+1}{4}=1$ et $x_2=\frac{5+\sqrt{9}}{2a}=\frac{3-1}{4}=\frac{1}{2}$

| $x$ | $-\infty$ | | $\frac{1}{2}$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

Donc : $S=\left]-\infty,\frac{1}{2}\right]\cup[1,+\infty[$

b) $-2x^2+4x-2\geq 0$

Étudions le signe du trinôme $P(x)=-2x^2+4x-2$ $a=-2$

$\Delta=b^2-4ac=(4)^2-4\times(-2)\times(-2)=16-16=0$

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $P(x)=-2x^2+4x-2$ | | $-$ | $0$ | $-$ | |

Comme $\Delta = 0$, le trinôme possède une racine double: $x_1=\frac{-(4)}{2\times(-2)}=1$

Donc : $S=\mathbb{R}$

c) $3x^2+6x+5<0$

Étudions le signe du trinôme $P(x)=3x^2+6x+5$ $a=3>0$

$\Delta=b^2-4ac=(6)^2-4\times3\times5=36-60=-24<0$

| $x$ | $-\infty$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $P(x)=3x^2+6x+5$ | | $+$ | |

Donc : $S=\varnothing$

**Exercice :** Résoudre les inéquations suivantes :

a) $3x^2+6x-9>0$ b) $x^2+3x-5<-x+2$ c) $\frac{1}{x^2-x-6}\geq 2$

**Solution :** a) $3x^2+6x-9>0$

- On commence par résoudre l'équation $3x^2+6x-9=0$.

Le discriminant de $3x^2+6x-9$ est Δ = $6^2$ – 4 x 3 x (-9) = 36 + 108 = 144.

Les solutions de l'équation $3x^2+6x-9=0$ sont :

$x_1=\frac{-6-\sqrt{144}}{2\times3}=\frac{-6-12}{6}=-3$ et $x_2=\frac{-6+\sqrt{144}}{2\times3}=\frac{-6+12}{6}=1$

- On dresse ensuite le tableau de signes :

| $x$ | $-\infty$ | | -3 | | 1 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $3x^2+6x-9$ | | + | 0 | − | 0 | + | |

$3x^2+6x-9$ Est strictement positif sur les intervalles $]-\infty\,;-3[$ et $]1\,;+\infty[$.

L'ensemble des solutions de l'inéquation $3x^2+6x-9>0$ est donc

$S=]-\infty\,;-3[\cup]1\,;+\infty[$.

b) On commence par rassembler tous les termes dans le membre de gauche afin de pouvoir étudier les signes des trinômes.

Etudier le Signe d'un trinôme

a) $x^2+3x-5<-x+2$ équivaut à $x^2+4x-7<0$

Le discriminant de $x^2+4x-7$ est Δ = $4^2$ – 4 x 1 x (-7) = 44 et ses racines sont :

Et $x_2=\frac{-4+\sqrt{44}}{2\times1}=-2+\sqrt{11}$ $x_1=\frac{3-1}{4}=\frac{1}{2}$

On obtient le tableau de signes :

| $x$ | $-\infty$ | | $-2-\sqrt{11}$ | | $-2+\sqrt{11}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P(x)$ | | + | 0 | − | 0 | + | |

L'ensemble des solutions de l'inéquation $x^2+3x-5<-x+2$ est donc

$S=\left]-2-\sqrt{11};-2+\sqrt{11}\right[$.

c) $\frac{1}{x^2-x-6}\geq 2$

- On commence par déterminer les racines du trinôme $x^2-x-6$ :

Le discriminant est Δ = $(-1)^2$ – 4 x 1 x (-6) = 25 et ses racines sont :

$x_1=\frac{1-\sqrt{25}}{2\times1}=-2$ et $x_2=\frac{1+\sqrt{25}}{2\times1}=3$

Les valeurs -2 et 3 annulent le dénominateur. On résout donc l'équation dans $\mathbb{R}\backslash\{-2\,;3\}$.

$\frac{1}{x^2-x-6}\geq 2$ Équivaut à $\frac{1}{x^2-x-6}-2\geq 0$

Soit : $\frac{-2x^2+2x+13}{x^2-x-6}\geq 0$

- On détermine les racines du trinôme $-2x^2+2x+13$ :

Le discriminant est Δ' = $2^2$ – 4 x (-2) x 13 = 108 et ses racines sont :

$x_1'=\frac{-2-\sqrt{108}}{2\times(-2)}=\frac{1+3\sqrt{3}}{2}$ et $x_2'=\frac{-2+\sqrt{108}}{2\times(-2)}=\frac{1-3\sqrt{3}}{2}$

- On obtient le tableau de signe :

| $x$ | $-\infty$ | | $\frac{1-3\sqrt{3}}{2}$ | | $-2$ | | $3$ | | $\frac{1+3\sqrt{3}}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-2x^2+2x+13$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $x^2-x-6$ | | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $\frac{-2x^2+2x+13}{x^2-x-6}$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $\Vert$ | $-$ | $\Vert$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

L'ensemble des solutions de l'inéquation $\frac{1}{x^2-x-6} \geq 2$

est : $S = \left[\frac{1-3\sqrt{3}}{2};-2\right[ \cup \left]3;\frac{1+3\sqrt{3}}{2}\right]$.

**Exercice :** Résoudre les inéquations suivantes :

a) $2x^2-4x+6\geq 0$ b) $4x^2-8x+3\leq 0$ c) $x^2-3x-10<0$

**Solution :** a) $2x^2-4x+6\geq 0$ $a=2$

Calculons le discriminant : a = 2, b = -4 et c = 6 donc

$\Delta = b^2-4ac = 16-48 = -32 < 0$

| $x$ | $-\infty$ $+\infty$ |
|---|---|
| $P(x)$ | $+$ |

Donc : $S=\mathbb{R}$

b) $4x^2-8x+3\leq 0$ $a=4$ Étudions le signe du trinôme

$\Delta = b^2-4ac = (-8)^2-4\times 4\times 3 = 64-48 = 16 > 0$

Comme $\Delta$ > 0, l'équation possède deux solutions distinctes :

$x_1 = \frac{8+4}{2\times 4} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$ et $x_2 = \frac{8-4}{8} = \frac{1}{2}$

| $x$ | $-\infty$ | | $\frac{1}{2}$ | | $\frac{3}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $4x^2-8x+3$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

Donc : $S = \left[\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right]$

c) $x^2-3x-10<0$ $\Delta = b^2-4ac = 49 > 0$

Comme $\Delta$ > 0, l'équation possède deux solutions distinctes :

$x_1 = 5$ et $x_2 = -2$

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $5$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $4x^2-8x+3$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

Donc : $S = ]-2,5[$

**Exercice :** Résoudre les équations et les inéquations suivantes : $3x^2+6x-9$

1) $(x-1)^2=9$ 2) $(x-1)^2\leq 9$ 2) $(x-1)^2\leq 9$ 3) $\frac{x-1}{x}=\frac{2}{3}$ 4) $\frac{x-1}{x}\leq\frac{2}{3}$

1)Résoudre $(x-1)^2=9$ ssi: $x-1=3$ ou $x-1=-3$ soit $x=4$ ou $x=-2$, d'où $S=\{-2\,;4\}$.

2) Pour résoudre une inéquation comportant des carrés, on peut transposer tous les termes dans un seul membre et on factorise, si possible, en un produit de facteurs du premier degré.
On peut alors en déduire l'ensemble des solutions à l'aide d'un tableau de signes.
Résoudre $(x-1)^2 \leq 9$ revient à écrire $(x-1)^2 - 9 \leq 0$.D'où : $(x-1-3)(x-1+3) \leq 0$ : , ou encore : $(x-4)(x+2) \leq 0$.

| $x$ | -¥ | | -2 | | 4 | | +¥ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x-4$ | | - | | - | 0 | + | |
| $x+2$ | | - | 0 | + | | + | |
| $(x-4)(x+2)$ | | + | 0 | - | 0 | + | |

Le produit est négatif sur l'intervalle [- 2 ; 4], d'où : $S$ = [- 2 ; 4].

3) $\frac{x-1}{x} = \frac{2}{3}$

Pour $x \neq 0$, résoudre l'équation $\frac{x-1}{x} = \frac{2}{3}$ équivaut à résoudre : $3(x-1) = 2x$.
D'où : $3x - 3 = 2x$, ou encore $3x - 2x = 3$, soit $x = 3$.
L'ensemble des solutions est $S = \{3\}$.

- Dans le cas de l'inéquation $\frac{x-1}{x} \leq \frac{2}{3}$ on transpose tous les termes dans un seul membre et on fait apparaître si possible un quotient de facteurs du premier degré. On peut alors déterminer l'ensemble des solutions à l'aide d'un tableau de signes.

Pour $x \neq 0$, résoudre l'équation $\frac{x-1}{x} \leq \frac{2}{3}$ équivaut à résoudre $\frac{x-1}{x} - \frac{2}{3} \leq 0$ .

En réduisant au même dénominateur, on obtient : $\frac{3x-3}{3x} - \frac{2x}{3x} \leq 0$ , soit $\frac{x-3}{3x} \leq 0$ .:

| $x$ | -¥ | | 0 | | 3 | | +¥ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x-3$ | | - | | - | 0 | + | |
| $3x$ | | - | 0 | + | | + | |
| $\frac{x-3}{3x}$ | | + | ‖ | - | 0 | + | |

Le quotient est négatif sur l'intervalle ]0 ; 3], donc $S = ]0,3]$

**Exercice :** soit le polynôme suivant (E) : $P(x) = x^3 - \sqrt{2}x^2 - x + \sqrt{2}$

1)Montrer que 1 est racine du polynôme $P(x)$

2)Montrer que $P(x) = (x+1)\left(x^2 - \left(\sqrt{2}+1\right)x + \sqrt{2}\right)$

3)On pose : $Q(x) = x^2 - \left(\sqrt{2}+1\right)x + \sqrt{2}$ et soit $\Delta$ son discriminant

a) Vérifier que : $\Delta = \left(\sqrt{2}-1\right)^2$

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $Q(x) = 0$

4)en déduire les solutions de l'équation $x - \left(\sqrt{2}+1\right)\sqrt{x} + \sqrt{2} = 0$

5) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x) = 0$

6) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $P(x) \leq 0$

**Solution :** $P(x) = x^3 - \sqrt{2}x^2 - x + \sqrt{2}$

1)Montrons que 1 est racine du polynôme $P(x)$

$P(-1)=(-1)^3-\sqrt{2}(-1)^2-(-1)+\sqrt{2}$

$P(-1)=-1-\sqrt{2}+1+\sqrt{2}=0$ donc 1 est racine du polynôme $P(x)$

2) Montrons que $P(x)=(x+1)\left(x^2-\left(\sqrt{2}+1\right)x+\sqrt{2}\right)$

$$(x+1)\left(x^2-\left(\sqrt{2}+1\right)x+\sqrt{2}\right)=x^3-\left(\sqrt{2}+1\right)x^2+\sqrt{2}x+x^2-\left(\sqrt{2}+1\right)x+\sqrt{2}$$

$$=x^3-\left(\sqrt{2}+1\right)x^2+\sqrt{2}x+x^2-\left(\sqrt{2}+1\right)x+\sqrt{2}$$

$$=x^3-\sqrt{2}x^2-x^2+\sqrt{2}x+x^2-\sqrt{2}x-x+\sqrt{2}$$

$$=x^3-\sqrt{2}x^2-x+\sqrt{2}$$

3) a) $\Delta=b^2-4ac=\left(\sqrt{2}+1\right)^2-4\times1\times\sqrt{2}$

$$\Delta=\left(\sqrt{2}\right)^2-2\sqrt{2}\times1+(1)^2=\left(\sqrt{2}-1\right)^2$$

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $Q(x)=0$

$x^2-\left(\sqrt{2}+1\right)x+\sqrt{2}=0$ On a $\Delta\succ0$

$x_2=\dfrac{\sqrt{2}+1-\sqrt{2}+1}{2\times1}=\dfrac{2}{2}=1$ et $x_1=\dfrac{\sqrt{2}+1+\sqrt{2}-1}{2\times1}=\dfrac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$

donc : $S=\left\{\sqrt{2},1\right\}$

4)recherche des solutions de l'équation $x-\left(\sqrt{2}+1\right)\sqrt{x}+\sqrt{2}=0$

$x-\left(\sqrt{2}+1\right)\sqrt{x}+\sqrt{2}=0$ peut s'écrire sous la forme : $\left(\sqrt{x}\right)^2-\left(\sqrt{2}+1\right)\sqrt{x}+\sqrt{2}=0$

On pose : $X=\sqrt{x}$ On a donc : $X^2-\left(\sqrt{2}+1\right)X+\sqrt{2}=0$

D'après la question précédente les solutions sont : $X_1=\sqrt{2}$ **et** $X_2=1$

On a donc : $\sqrt{x_1}=\sqrt{2}$ **et** $\sqrt{x_2}=1$ donc : $\left(\sqrt{x_1}\right)^2=\left(\sqrt{2}\right)^2$ **et** $\left(\sqrt{x_2}\right)^2=(1)^2$

donc : $x_1=2$ **et** $x_2=1$

On a donc : $S=\{2,1\}$

5) recherche des solutions de l'équation $P(x)=0$

On a : $P(x)=(x+1)\left(x^2-\left(\sqrt{2}+1\right)x+\sqrt{2}\right)$

$P(x)=0$ ssi $x+1=0$ ou $x^2-\left(\sqrt{2}+1\right)x+\sqrt{2}=0$

ssi $x=-1$ ou $x_1=\sqrt{2}$ ou $x_2=1$

On a donc : $S=\left\{-1,1,\sqrt{2}\right\}$

6) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $P(x)\le0$

$P(x)\le0$ ssi $(x+1)\left(x^2-\left(\sqrt{2}+1\right)x+\sqrt{2}\right)\le0$

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $1$ | | $\sqrt{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^2-\left(\sqrt{2}+1\right)x+\sqrt{2}$ | | $+$ | \|\| | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $x+1$ | | $-$ | $0$ | $+$ | \|\| | $+$ | \|\| | $+$ | |
| $P(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

On a donc : $S=\left]-\infty,-1\right]\cup\left[1,\sqrt{2}\right]$

**Exercice :** soit l'équation $(E)\ :\ x^2+\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)x-2\sqrt{6}=0$ et soit $\Delta$ son discriminant

et soit $\Delta$ son discriminant

1) Vérifier que : $\Delta=\left(2\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(E)$

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x)=0$

4) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $P(x)>0$

5)en déduire les solutions de l'équation $x+\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\sqrt{x}-2\sqrt{6}=0$

**Solution :** $(E)\ :\ x^2+\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)x-2\sqrt{6}=0$

1) $\Delta=b^2-4ac=\left(2\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2-4\times1\times2\sqrt{6}$

$\Delta=12-4\sqrt{6}+2+8\sqrt{6}=14+4\sqrt{6}$

$14+4\sqrt{6}=14+2\times2\sqrt{3}\times\sqrt{2}=\left(2\sqrt{3}\right)^2+2\times2\sqrt{3}\times\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}\right)^2$

$14+4\sqrt{6}=\left(2\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(E): x^2+\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)x-2\sqrt{6}=0$

On a $\Delta=14+4\sqrt{6}>0$ donc

$x_1=\frac{-2\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{14+4\sqrt{6}}}{2\times1}=\frac{-2\sqrt{3}+\sqrt{2}+\left|2\sqrt{3}+\sqrt{2}\right|}{2\times1}$ et $x_2=\frac{-2\sqrt{3}+\sqrt{2}-\left|2\sqrt{3}+\sqrt{2}\right|}{2\times1}$

$x_1=\frac{-2\sqrt{3}+\sqrt{2}+2\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2\times1}=\frac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$ et $x_2=\frac{-2\sqrt{3}+\sqrt{2}-2\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2\times1}=\frac{-4\sqrt{3}}{2}=-2\sqrt{3}$

On a donc : $S=\left\{\sqrt{2},-2\sqrt{3}\right\}$

4) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $P(x)>0$

| $x$ | $-\infty$ | | $-2\sqrt{3}$ | | $\sqrt{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^2+\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)x-2\sqrt{6}$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

On a donc : $S=\left]-\infty,-2\sqrt{3}\right[\cup\left]\sqrt{2},+\infty\right[$

5)en déduire les solutions de l'équation $x+\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\sqrt{x}-2\sqrt{6}=0$

$x+\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\sqrt{x}-2\sqrt{6}=0$ peut s'écrire sous la forme : $\left(\sqrt{x}\right)^2+\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\sqrt{x}-2\sqrt{6}=0$

On pose : $X=\sqrt{x}$ On a donc : $X^2+\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)X-2\sqrt{6}=0$

D'après la question précédente les solutions sont : $X_1=\sqrt{2}$ **et** $X_2=-2\sqrt{3}$

On a donc : $\sqrt{x_1}=\sqrt{2}$ **et** $\sqrt{x_2}=-2\sqrt{3}$ **or** l'équation $\sqrt{x_2}=-2\sqrt{3}$ **n'a pas de** solutions

donc : $\left(\sqrt{x_1}\right)^2=\left(\sqrt{2}\right)^2$ donc : $x_1=2$ On a donc : $S=\{2\}$