Ch. 6 : Equations – inéquations-systèmes

I-Équations à une inconnue

1/ Définition

Une équation à une inconnue est une égalité dans laquelle figure une lettre représentant une valeur inconnue que l'on cherche à déterminer.

Exemples :

(E_1) : $2x + 1 = 0$ est une équation d'inconnue x

(E_2) : $\sqrt{2t^2 + 1} = t + 1$ est une équation d'inconnue t

(E_3) : $y^3 - 3y^2 = 6y - 8$ est une équation d'inconnue y.

Une **solution** d'une équation est une valeur de l'inconnue qui rend l'égalité vraie (Il peut y en avoir plusieurs).

Exemples

$-\frac{1}{2}$ est une solution de (E_1) car $2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) + 1 = 0$

2 est une solution de (E_2) car $\sqrt{2 \times 2^2 + 1} = 2 + 1$

1 est une solution de (E_3) car $1^3 - 3 \times 1^2 = 6 \times 1 - 8$ et -2 est aussi une solution de (E_3) car $(-2)^3 - 3 \times (-2)^2 = 6 \times (-2) - 8$

Résoudre une équation c'est déterminer l'ensemble de **toutes** les solutions de l'équation.

Exemples

L'ensemble des solutions de (E_1) est $S_1 = \left\{-\frac{1}{2}\right\}$

L'ensemble des solutions de (E_2) est $S_2 = \{0 ; 2\}$

L'ensemble des solutions de (E_3) est $S_3 = \{-2 ; 1 ; 4\}$

2/ Règles de calcul sur les égalités

On peut transformer une égalité en une égalité équivalente

① en additionnant aux deux membres de l'égalité un même nombre.

② en multipliant les deux membres de l'égalité par un même nombre **non nul**.

Exemples

$2x + 1 = 0 \iff 2x + 1 + \mathbf{(-1)} = 0 + \mathbf{(-1)} \iff 2x = -1 \iff 2x \times \mathbf{\frac{1}{2}} = -1 \times \mathbf{\frac{1}{2}} \iff x = -\frac{1}{2}$

3/ Résolutions algébriques

Parmi toutes les équations, certaines se résolvent en utilisant des techniques à savoir

a) Équation de degré 1

Pour résoudre une équation de degré 1 (c'est-à-dire sans x^2, x^3, sans $\sqrt{\ }$, sans dénominateur), on développe les expressions et on utilise la règle ① pour isoler l'inconnue dans un membre puis la règle ② pour déterminer la valeur de l'inconnue.

Exemple

(E) : $3(x + 2) = x - 4 \iff 3x + 6 = x - 4 \iff 3x - x = -4 - 6 \iff 2x = -10 \iff x = \frac{-10}{2} = -5$ donc $S = \{-5\}$

b) Équations de degré supérieur ou égal à 2

Pour résoudre une équation de degré supérieur ou égal à 2, on utilise la règle ① pour rassembler toutes les expressions dans un seul membre, on factorise puis on utilise la règle : « Un produit de facteurs est nul si et seulement si un des facteurs est nul. »

Exemple
(E) : $x(x + 1) = 2x + 2 \iff x(x + 1) – (2x + 2) = 0 \iff x(x + 1) – 2(x + 1) = 0 \iff (x + 1)(x – 2) = 0$
Un produit de facteurs est nul si et seulement si un des facteurs est nul
donc (E) $\iff x + 1 = 0$ ou $x – 2 = 0 \iff x = –1$ ou $x = 2$ donc S = {–1 ; 2}

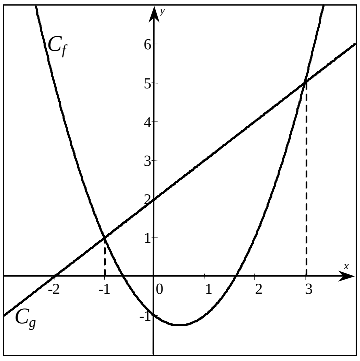
c) Équation quotient

Pour résoudre une équation quotient (c'est-à-dire une équation dans laquelle l'inconnue apparaît au dénominateur), on cherche les valeurs pour lesquelles les dénominateurs s'annulent et on résout l'équation dans $\mathbb{R}$ privé des valeurs trouvées précédemment.

Exemple
(E) : $\dfrac{x(x-3)}{x-2} = \dfrac{2(x-3)}{x-2}$ Les dénominateurs sont nuls lorsque $x – 2 = 0$ soit $x = 2$
On résout donc l'équation (E) dans $\mathbb{R}–\{2\}$.
(E) $\iff x(x – 3) = 2(x – 3) \iff x(x – 3) – 2(x – 3) = 0 \iff (x – 3)(x – 2) = 0 \iff x – 3 = 0$ ou $x – 2 = 0 \iff x = 3$ ou $x = 2$
Une seule de ces solutions convient donc S = {3}.

4/ Résolutions graphiques

On peut résoudre des équations en traçant les courbes correspondantes dans un repère et en lisant graphiquement les solutions.

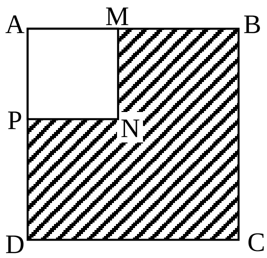


Exemple
(E) : $x^2 – x – 1 = x + 2$
Soit f la fonction définie par $f(x) = x^2 – x – 1$ et g la fonction définie par $g(x) = x + 2$. On appelle C_f et C_g leurs représentations graphiques.
Les solutions de (E) sont les abscisses des points d'intersection de ces deux courbes donc S = {–1 ; 3}.

5/ Problème conduisant à une équation

Pour résoudre un problème conduisant à une équation, il faut respecter les quatre étapes suivantes :
① Choix de l'inconnue ② Mise en équation
③ Résolution de l'équation ④ Conclusion

Exemple
ABCD est un carré de côté 20 cm. AMNP est un carré. Où placer le point M sur le segment [AB] pour que l'aire de la partie hachurée soit égale à 351 cm² ?



① Choix de l'inconnue
Soit x la longueur AM en cm. (Ne pas oublier de préciser les unités)

② Mise en équation
L'aire de ABCD est $20 \times 20 = 400$ cm² et l'aire de AMNP est x^2 donc l'aire de la partie hachurée est $400 – x^2$.
L'équation à résoudre est donc $400 – x^2 = 351$

③ Résolution
$400 – x^2 = 351 \iff 400 – x^2 – 351 = 0 \iff 49 – x^2 = 0 \iff (7 – x)(7 + x) = 0 \iff 7 – x = 0$ ou $7 + x = 0 \iff x = 7$ ou $x = –7$ donc S = {–7 ; 7}

④ Conclusion
Seule la solution positive convient car AM est une longueur.
M doit donc être situé à 7 cm de A.

II- Inéquations à une inconnue

1/ Signe d'une expression

a) Tableau de signe

Le signe d'une expression dépendant de x se résume dans un tableau de la forme suivante :

x	$-\infty$		r		r'		$+\infty$
signe de $f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Exemples :

x	$-\infty$		2		5		$+\infty$
signe de $A(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$A(x)$ est négatif pour x compris entre 2 et 5.
$A(x)$ est positif pour x inférieur à 2 ou supérieur à 5.
$A(2) = A(5) = 0$.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
signe de $B(x)$		$+$	‖	$+$	

$B(-1)$ n'existe pas
$B(x)$ est positif pour toute valeur de x différente de -1

b) Signe d'une fonction affine (Rappel)

Soit f une fonction affine définie par $f(x) = ax + b$. Le signe de f est donné, selon le signe de a, par les tableaux suivants :

Si $a > 0$ alors f est croissante donc :

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
Signe de $f(x)$		$-$	0	$+$	

Si $a < 0$ alors f est décroissante donc :

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
Signe de $f(x)$		$+$	0	$-$	

Exemples :

$f : x \longmapsto \frac{1}{2}x + 1$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x + 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x = -1 \Leftrightarrow x = -2$

La racine de f est -2

$\frac{1}{2}$ est positif donc f est croissante, le signe de f est donc donné par le tableau suivant :

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
Signe de $f(x)$		$-$	0	$+$	

$g : x \longmapsto -3x + 2$

$g(x) = 0 \Leftrightarrow -3x + 2 = 0 \Leftrightarrow -3x = -2 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$

La racine de g est $\frac{2}{3}$

-3 est négatif donc g est décroissante, le signe de g est donc donné par le tableau suivant :

x	$-\infty$		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
Signe de $g(x)$		$+$	0	$-$	

On peut retenir uniquement la règle suivante :

Soit f une fonction affine définie par $f(x) = ax + b$. Le signe de f est donné par le tableau suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
Signe de $f(x)$		signe de $-a$	0	signe de a	

c) Signe d'un produit, d'un quotient

Le produit ou le quotient de deux réels positifs est positif.
Le produit ou le quotient de deux réels négatifs est positif.
Le produit ou le quotient de d'un réel positif et d'un réel négatif est négatif.

Remarque : On utilise ces règles pour construire le tableau de signes d'une expression écrite sous forme d'un produit ou d'un quotient.

Exemple : Tableau de signes de $h(x) = f(x) \times g(x) = \left(\frac{1}{2}x + 1\right) \times (-3x + 2)$.

x	$-\infty$		-2		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
signe de $f(x)$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de $g(x)$		$+$		$+$	0	$-$	
signe de $h(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

2/ Règles de calcul sur les inégalités

① On peut transformer une inégalité en une inégalité équivalente en additionnant aux deux membres de l'inégalité un même nombre.
② On peut transformer une inégalité en une inégalité de **même sens** en multipliant les deux membres de l'inégalité par un même nombre **strictement positif**.
③ On peut transformer une inégalité en une inégalité de **sens contraire** en multipliant les deux membres de l'inégalité par un même nombre **strictement négatif**.

Exemples

$2x + 1 < 0 \underset{\text{règle ①}}{\Leftrightarrow} 2x + 1 + (-1) < 0 + (-1) \Leftrightarrow 2x < -1 \underset{\text{règle ②}}{\Leftrightarrow} 2x \times \frac{1}{2} < -1 \times \frac{1}{2} \Leftrightarrow x < -\frac{1}{2}$

$-2x + 1 \quad 0 \underset{\text{règle ①}}{\Leftrightarrow} -2x + 1 + (-1) \quad 0 + (-1) \Leftrightarrow -2x \quad -1 \underset{\text{règle ③}}{\Leftrightarrow} -2x \times \left(-\frac{1}{2}\right) \quad -1 \times \left(-\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow x \quad -\frac{1}{2}$

3/ Inéquations à une inconnue

Parmi toutes les inéquations, certaines se résolvent en utilisant des techniques à savoir

a) Inéquation de degré 1

Pour résoudre une inéquation de degré 1 (c'est-à-dire sans x^2, x^3, sans $\sqrt{\ }$, sans dénominateur), on développe les expressions et on utilise la règle ① pour isoler l'inconnue dans un membre puis les règles ② et ③ pour déterminer les valeurs possibles de l'inconnue.

Exemple

(E) : $-3(x + 2) < x - 2 \Leftrightarrow -3x + 6 < x - 2 \Leftrightarrow -3x - x < -2 - 6 \Leftrightarrow -4x < -8 \Leftrightarrow x > \frac{-8}{-4} = 2$

On a donc $S =]2\ ;+\infty[$

b) Inéquations de degré supérieur ou égal à 2

Pour résoudre une inéquation de degré supérieur ou égal à 2, on utilise la règle ① pour rassembler toutes les expressions dans un seul membre, on factorise puis on construit le tableau de signes de l'expression. L'ensemble des solutions sera lu directement dans le tableau.

Exemple
(E) : $x(x + 1) \quad 2x + 2 \Leftrightarrow x(x + 1) - (2x + 2) \quad 0 \Leftrightarrow x(x + 1) - 2(x + 1) \quad 0 \Leftrightarrow (x + 1)(x - 2) \quad 0$

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
signe de $x + 1$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de $x - 2$		$-$		$-$	0	$+$	
signe de $(x + 1)(x - 2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Par lecture du tableau, on obtient : $S = [-1\ ; 2]$.

c) Équation quotient

Pour résoudre une inéquation quotient (c'est-à-dire une inéquation dans laquelle l'inconnue apparaît au dénominateur), on utilise la règle ① pour rassembler toutes les expressions dans un seul membre, on réduit au même dénominateur puis on construit le tableau de signes de l'expression. L'ensemble des solutions sera lu directement dans le tableau.

Exemple

(E) : $\dfrac{x(-x-3)}{x-2} \quad \dfrac{4(-x-3)}{x-2} \Leftrightarrow \dfrac{x(-x-3)}{x-2} - \dfrac{4(-x-3)}{x-2} \quad 0 \Leftrightarrow \dfrac{(x-4)(-x-3)}{x-2} \quad 0$

x	$-\infty$		-3		2		4		$+\infty$
signe de $x-4$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
signe de $-x-3$		$+$	0	$-$		$-$		$-$	
signe de $x-2$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de $\dfrac{(x-4)(-x-3)}{x-2}$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	

Par lecture du tableau, on obtient : S = $]-\infty ; -3] \cup]2 ; 4]$.

4/ Résolutions graphiques

On peut résoudre des équations en traçant les courbes correspondantes dans un repère et en lisant graphiquement les solutions.

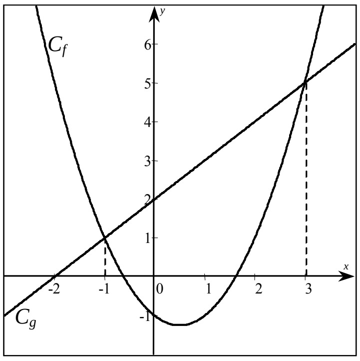
Exemple

(E) : $x^2 - x - 1 \quad x + 2$

Soit f la fonction définie par $f(x) = x^2 - x - 1$ et g la fonction définie par $g(x) = x + 2$. On appelle C_f et C_g leurs représentations graphiques.

Les solutions de (E) sont les abscisses des points de C_f situés « en dessous » de C_g

donc S = $[-1 ; 3]$



III- Équations de seconde degré à une inconnue

1) TRINÔME DU SECOND DEGRE

A) DEFINITION

On appelle **fonction polynôme du second degré (ou trinôme du second degré)** toute fonction définie sur IR, qui peut s'écrire sous la forme :

$x \longmapsto a x^2 + b x + c$ (où a, b et c sont des réels et $a \neq 0$)

- On dit que a est le coefficient de x^2, b le coefficient de x et c le terme constant .
- Un polynôme du second degré est toujours défini sur IR ; il n'est donc pas nécessaire de le répéter systématiquement .
- *Par abus de langage*, on utilise souvent l'expression trinôme du second degré $a x^2 + b x + c$ au lieu de trinôme du second degré $x \longmapsto a x^2 + b x + c$

Ex :

- Les fonctions suivantes (définies sur IR) sont des trinômes du second degré:

  $x \longmapsto 3 x^2 + 2 x + 3$, $x \longmapsto 4 x^2$ et $x \longmapsto (x+1)^3 - (x-1)^3$ (car pour tout réel x, $(x+1)^3 - (x-1)^3 = 6x^2 + 2$)
- la fonction $x \longmapsto (x+1)^2 - (x-1)^2$ n'est pas un trinôme du second degré car pour tout réel x , $(x+1)^2 - (x-1)^2 = 4x$

B) FORME CANONIQUE *(retenir la méthode)*

Soit $f : x \longmapsto a x^2 + b x + c$ ($a \neq 0$) un trinôme du second degré .

Comme $a \neq 0$, pour tout réel x : $a x^2 + b x + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a} x + \frac{c}{a} \right)$

Or $x^2 + \frac{b}{a} x$ est le début du développement de $\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = x^2 + 2 \times \frac{b}{2a} x + \left(\frac{b}{2a} \right)^2$

Donc , pour tout réel x , $a x^2 + b x + c = a\left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{c}{a} \right) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right)$

Cette écriture s'appelle **forme canonique** du trinôme f

Rem : le réel $b^2 - 4ac$ se note Δ *(delta)* et s'appelle **le discriminant du trinôme** .

2) EQUATION DU SECOND DEGRE ET FACTORISATION

A) DEFINITION

Une **équation du second degré à une inconnue x** est une équation qui peut s'écrire sous la forme

$a x^2 + b x + c = 0$ (où a, b et c sont des réels et $a \neq 0$)

Soit le trinôme du second degré $f : x \longmapsto a x^2 + b x + c$ ($a \neq 0$)
L'équation $a x^2 + b x + c = 0$ s'écrit aussi $f(x) = 0$.
Résoudre cette équation dans IR, c'est trouver tous les réels u qui vérifient $f(u) = 0$. Ces solutions sont appelées **racines** du trinôme f .

B) RESOLUTION

$a \neq 0$, donc, pour tout réel x, $a x^2 + b x + c = 0 \iff a\left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right) = 0 \iff \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$

Trois cas se présentent :

Si $\Delta < 0$	$\frac{\Delta}{4a^2} < 0$ et l'équation n'a donc pas de solution dans IR . *(un carré n'est jamais strictement négatif)*
Si $\Delta = 0$	$\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = 0 \iff x + \frac{b}{2a} = 0$ L'équation a donc pour unique solution dans IR : $x_0 = -\frac{b}{2a}$
Si $\Delta > 0$	$\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right)^2 \iff \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right)^2 = 0 \iff \left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right)\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right) = 0$ L'équation a donc deux solutions distinctes dans IR : $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

Ex : *Résoudre dans IR les équations ci-dessous :*

$6x^2 - x - 1 = 0$ *(a = 6 , b = – 1 , c = – 1)*	$x^2 - 3x + 4 = 0$ *(a = 1 , b = – 3 , c = 4)*	$2x^2 - 12x + 18 = 0$ *(a = 2 , b = –1 2 , c = 18)*
$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 6 \times (-1) = 1 + 24 = 25$ $\Delta > 0$, donc l'équation $6x^2 - x - 1 = 0$ admet deux solutions dans IR : $x_1 = \frac{1-5}{12} = -\frac{1}{3}$ et $x_2 = \frac{1+5}{12} = \frac{1}{2}$ $S = \{ -\frac{1}{3} ; \frac{1}{2} \}$	$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 4 = 9 - 16 = -7$ $\Delta < 0$, donc l'équation $x^2 - 3x + 4 = 0$ n'a pas de solution dans IR . $S = \varnothing$	$\Delta = (-12)^2 - 4 \times 2 \times 18 = 144 - 144 = 0$ $\Delta = 0$, donc l'équation $2x^2 - 12x + 18 = 0$ admet une solution dans IR : $x_0 = -\frac{-12}{2 \times 2} = 3$ $S = \{ 3 \}$

Rem :

- Il n'est pas toujours utile de calculer le discriminant . (ex : $4x^2 - 9 = 0$, $5x^2 - 4x = 0$, …)
- **Lorsque a et c sont de signes contraires** $-4ac > 0$ donc $\Delta > 0$ et l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet deux solution distinctes .
- Lorsque l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet deux racines x_1 et x_2 , alors :

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

Application :

- Vérifier le calcul des solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$.
- Trouver une racine connaissant l'autre . (ex : 1 est une solution évidente de $2x^2 - 5x + 3 = 0$, donc l'autre racine est $\frac{c}{a} = \frac{3}{2}$)
- Déterminer le signe des racines sans en connaître les valeurs .

C) FACTORISATION DU TRINOME $ax^2 + bx + c$

On a vu que , pour tout réel x : $ax^2 + bx + c = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right)$

Trois cas se présentent :

$\Delta < 0$	Le trinôme n'a pas de racine ; il est inutile d'espérer factoriser ce trinôme en produit de polynômes du premier degré .
$\Delta = 0$	$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a}\right)$ ($-\frac{b}{2a}$ est appelée **racine double** du trinôme)
$\Delta > 0$	$ax^2 + bx + c = \mathbf{a}(x - x_1)(x - x_2)$ (où x_1 et x_2 sont les racines du trinôme)

3) SIGNE DU TRINOME $ax^2 + bx + c$

Etudions le signe de $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$)

- Si $\Delta > 0$

Soit x_1 et x_2 les racines du trinôme (avec, par exemple $x_1 < x_2$)
On a donc :
$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$x - x_1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x - x_2$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x - x_1)(x - x_2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Pour résumer : **" $ax^2 + bx + c$ est du signe de a sauf entre les racines "**

- Si $\Delta \leq 0$, on utilise la forme canonique : $f(x) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right)$

- Si $\Delta < 0$, $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}$ est strictement positif et donc , pour tout réel x, **$ax^2 + bx + c$ est du signe de a .**
- Si $\Delta = 0$, $f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ et donc , pour tout réel $x \neq -\frac{b}{2a}$, **$ax^2 + bx + c$ est du signe de a (pour $x = -\frac{b}{2a}$, $f(x) = 0$)**

Ex : *Résoudre dans IR l'inéquation* $f(x) < 0$ avec $f(x) = 2x^2 + 5x - 3$

$\Delta = 49$ (> 0) ; les solutions de l'équation $2x^2 + 5x - 3 = 0$ sont donc $x_1 = -3$ et $x_2 = \frac{1}{2}$

Or $f(x)$ est du signe de $a = 2$ sauf entre les racines . Ainsi l'ensemble des solutions est $S =]-3 ; \frac{1}{2}[$

4) RECAPITULATIF ET LIENS AVEC LES REPRESENTATIONS GRAPHIQUES

	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
Racines de f	$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$	$x_0 = -\frac{b}{2a}$	Pas de racine
Factorisation	$f(x) = \mathbf{a}(x - x_1)(x - x_2)$	$f(x) = \mathbf{a}(x - x_0)^2 = \mathbf{a}\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$	Pas de factorisation

a > 0

	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
Signe de f (x)	+ 0 – 0 +	+ 0 +	+

a < 0

	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
Signe de f (x)	– 0 + 0 –	– 0 –	–

III- 1

Equation ax + by + c = 0,

L'équation ax + by + c = 0, où a et b deux réels non tous les deux nuls et x et y sont deux inconnues, appelée équation du premier degré à deux inconnues.
Résoudre une telle équation c'est trouver tous les couples (x , y) pour lesquels l'égalité est vraie.
Chaque couple est appelé solution de l'équation.

Système de deux équations

Un système de deux équations à deux inconnues est de donnée de deux équations : $(S):\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0 \end{cases}$ *où x et y sont les inconnues.*
Résoudre $R\times R$ *ou* R^2 *un tel système c'est trouver tous les couples (x , y) pour lesquels les deux égalités sont vraies à la fois.*
Chaque couple est appelé solution du système.

Méthodes de résolutions

Résoudre par substitution

Exprimer une inconnue en fonction de l'autre à partir de l'une des deux équations.
Remplacer, dans l'autre équation, cette inconnue par l'expression trouvée.
Résoudre cette nouvelle équation.
Déterminer si elle existe, la valeur de l'autre inconnue.

Exemple :

$$\begin{cases} 2x+y+1=0 \\ x+3y=0 \end{cases} \text{ équivaut à } \begin{cases} 2x+y+1=0 \\ x=-3y \end{cases} \text{ équivaut à } \begin{cases} 2(-3y)+y+1=0 \\ x=-3y \end{cases} \text{ équivaut à } \begin{cases} -5y+1=0 \\ x=-3y \end{cases}$$

$$\text{alors } \begin{cases} y=\frac{1}{5} \\ x=-3y \end{cases} \text{ alors } \begin{cases} y=\frac{1}{5} \\ x=-\frac{3}{5} \end{cases} \text{ alors } S_{R^2}=\left\{\left(-\frac{3}{5},\frac{1}{5}\right)\right\}$$

Résoudre par élimination

Multiplier les deux membres des deux équations par des nombres convenablement choisis de sorte que lorsque l'on additionne les deux équations obtenues n on obtient une équation à une seule inconnue.
Résoudre l'équation trouve.
Déterminer si elle existe, la valeur de l'autre inconnue.

Exemple :

$$\begin{cases} 2x+y+1=0 \\ x+3y=0 \end{cases} \text{ équivaut à } \begin{cases} 2x+y+1=0 \\ -2(x+3y)=0 \end{cases} \text{ équivaut à } \begin{cases} 2x+y+1=0 \\ -2x-6y=0 \end{cases} \text{ équivaut à } \begin{cases} 2x+y+1+(-2x-6y)=0 \\ x+3y=0 \end{cases}$$

$$\text{équivaut à } \begin{cases} 1-5y=0 \\ x+3y=0 \end{cases} \text{ alors } \begin{cases} y=\frac{1}{5} \\ x=-3y \end{cases} \text{ alors } \begin{cases} y=\frac{1}{5} \\ x=-\frac{3}{5} \end{cases} \text{ alors } S_{R^2}=\left\{\left(-\frac{3}{5},\frac{1}{5}\right)\right\}$$