



I. Equations de 1^{ère} degré d'un seul inconnu – inéquation de 1^{ère} degré d'un seul inconnu : (rappel)

A. Equations de 1^{ère} degré d'un seul inconnu :

a. Définition :

Soient a et b de $\mathbb{R}$ (avec $a \neq 0$).

Toute équation son écriture se ramène sous la forme suivante $x \in \mathbb{R} / ax + b = 0$ est appelée équation du 1^{er} degré d'un seul inconnu x de $\mathbb{R}$ et ses coefficients réels sont a et b .

b. Exemple :

- $x \in \mathbb{R} / 2x + 3 = 5x - 12$.
- $x \in \mathbb{R} / 2x + 3 = 2x - 12$.
- $x \in \mathbb{R} / 2(x + 3) = 2x - 12$

c. Vocabulaire :

Toute solution d'équation est appelée : solution de l'équation ou racine de l'équation ou zéro de l'équation.

B. – Inéquation de 1^{ère} degré d'un seul inconnu :

a. Définition :

Soient a et b de $\mathbb{R}$ (avec $a \neq 0$).

Toute inéquation son écriture se ramène sous la forme suivante $x \in \mathbb{R} / ax + b \leq 0$ ou $x \in \mathbb{R} / ax + b \geq 0$ ou $x \in \mathbb{R} / ax + b < 0$ ou $x \in \mathbb{R} / ax + b > 0$ est appelée inéquation du 1^{er} degré d'un seul inconnu x de $\mathbb{R}$ et ses coefficients réels sont a et b .

b. Exemple :

- $x \in \mathbb{R} / 2x + 3 \leq 5x - 12$.
- $x \in \mathbb{R} / 2x + 3 < 2x - 12$.
- $x \in \mathbb{R} / 2x + 3 > 2x - 12$

c. Le signe du binôme du 1^{er} degré $ax + b$.

- 1^{er} cas $a > 0$:

Son signe à l'aide d'un tableau

- 2^{ème} cas $a < 0$:

Son signe à l'aide d'un tableau

d. Exercice :

Donner le signe des binômes suivants :

1. $2x + 7$ 2. $-3x + 4$ 3. $(2x + 7)(-3x + 4)$

Cas $a > 0$	x	$-\infty$	$\frac{-b}{a}$	$+\infty$
	$ax + b$	-	0	+

Cas $a < 0$	x	$-\infty$	$\frac{-b}{a}$	$+\infty$
	$ax + b$	-	0	+

II. Equations de 2^{ème} degré d'un seul inconnu :

A. Equations de 2^{ème} degré d'un seul inconnu

a. Définition :

Soient a et b et c de $\mathbb{R}$ (avec $a \neq 0$).

Toute équation son écriture se ramène sous la forme suivante $x \in \mathbb{R} / ax^2 + bx + c = 0$ est appelée équation du 2^{ème} degré d'un seul inconnu x de $\mathbb{R}$ et ses coefficients réels sont a et b et c .



b. Exemple :

(E) : $x \in \mathbb{R} / 2x^2 + 4x - 6 = 0$ est -ce que 1 est racine de l'équation (E)

B. Forme canonique du trinôme de second degré $ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) :

a. Activité :

On considère trinôme de second degré $ax^2 + bx + c$.

Compléter les étapes suivantes :

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a \times [\dots\dots\dots] \\ &= a \times \left[x^2 + 2 \times \frac{b}{2a} x + \left(\frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\dots}{\dots} + \frac{c}{a} \right] \\ &= a \times \left[\left(x + \frac{\dots}{\dots} \right)^2 - \frac{\dots}{4a^2} \right] \end{aligned}$$

b. Vocabulaire :

- L'écriture $a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right]$ est appelée la forme canonique du trinôme de second degré $ax^2 + bx + c$. ($a \neq 0$)
- Le nombre $b^2 - 4ac$ est appelé le discriminant du trinôme de second $ax^2 + bx + c$.
- Le nombre $b^2 - 4ac$ est appelé aussi le discriminant de l'équation : $x \in \mathbb{R} / ax^2 + bx + c = 0$.
- le discriminant $b^2 - 4ac$ on le note par Δ on écrit $\Delta = b^2 - 4ac$.
- la forme canonique du trinôme de second degré $ax^2 + bx + c$ on l'écrit :

$$a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right] = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]$$
- d'où : $ax^2 + bx + c = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]$

c. Exemple :

On considère l'équation suivante (E) : $x \in \mathbb{R} / 2x^2 + 4x - 6 = 0$.

1. Calculer le discriminant Δ de l'équation (E).
2. Ecrire l'équation on utilise la forme canonique de $2x^2 + 4x - 6$.
3. Résoudre l'équation (E).

C. Détermination les solutions de l'équation $x \in \mathbb{R} / ax^2 + bx + c = 0$.

a. Activité :

On a : $ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]$ (la forme canonique de $ax^2 + bx + c$)



$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0 ; (\text{car } a \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2} \quad (1) ; (\text{car } a \neq 0)$$

1^{er} cas : $\Delta < 0$

Donc : $\frac{\Delta}{4a^2} < 0$ et $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 > 0$ d'où l'équation n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.

Ensemble des solution de l'équation (E) est $S = \emptyset$.

2^{ème} cas : $\Delta = 0$

Donc d'après (1) on obtient : $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow x + \frac{b}{2a} = 0$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{b}{2a}$$

d'où l'équation admet une solution dans $\mathbb{R}$.

on dit aussi l'équation admet solution double (ou deux solutions confondues) car :

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right) \times \left(x + \frac{b}{2a}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x + \frac{b}{2a} = 0 \text{ ou } x + \frac{b}{2a} = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{b}{2a} \text{ ou } x = -\frac{b}{2a}$$

Ensemble des solution de l'équation (E) est $S = \left\{-\frac{b}{2a}\right\}$.

3^{ème} cas : $\Delta > 0$

Donc d'après (1) on obtient :

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2} \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2 \quad (\text{car } \Delta > 0)$$

$$\Leftrightarrow x + \frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ ou } x + \frac{b}{2a} = -\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ ou } x = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ ou } x = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

d'où l'équation admet deux solutions distinctes dans $\mathbb{R}$: $x = -\frac{b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ ou $x = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$.

**b. Propriété :**

Soit l'équation : $x \in \mathbb{R} / ax^2 + bx + c = 0$ avec $a \neq 0$ et son discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta > 0$ l'équation admet deux solutions distinctes (ou deux racines distinctes) dans $\mathbb{R}$:

$$x_1 = -\frac{b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

- Si $\Delta = 0$ l'équation admet une solution (ou deux racines) dans $\mathbb{R}$: $x = -\frac{b}{2a}$ (solution double) .
- Si $\Delta < 0$ l'équation n'a pas de solution (n'a pas de racines) dans $\mathbb{R}$. ($S = \emptyset$) .

c. Exercice :

On considère l'équation suivante : (E) : $x \in \mathbb{R} / 2x^2 + 4x - 6 = 0$.

1. Calculer discriminant Δ de l'équation (E) .
2. Donner l'ensemble des solution de l'équation (E) .

d. La somme et le produit des racines de l'équation $x \in \mathbb{R} / ax^2 + bx + c = 0$:**a. Activité :**

On considère l'équation suivante $x \in \mathbb{R} / ax^2 + bx + c = 0$ tel qu'il admet deux racines distinctes x_1 et x_2 .

1. Donner x_1 et x_2 en fonction de a et b et c .
2. Calculer $x_1 + x_2$ puis $x_1 \times x_2$; puis donner la propriété .

b. Propriété :

Si l'équation $x \in \mathbb{R} / ax^2 + bx + c = 0$ admet deux racines distinctes x_1 et x_2 on a :

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \text{ et } x_1 \times x_2 = \frac{c}{a} .$$

c. Exercice :

On considère l'exercice précédente (E) : $x \in \mathbb{R} / 2x^2 + 4x - 6 = 0$.

1. Calculer $x_1 + x_2$ puis $x_1 \times x_2$ par deux méthodes différentes .

e. Factorisation – signe de trinôme de second degré $ax^2 + bx + c$:

❖ Factorisation de $ax^2 + bx + c$:

a. Activité :

On considère le trinôme de second degré $ax^2 + bx + c$.

1. Donner son discriminant Δ en fonction de a et b et c .
2. Donner la forme canonique de $ax^2 + bx + c$.
3. D'après le signe de Δ donner la factorisation de $ax^2 + bx + c$ dans les cas possibles en utilisant les racines $x_1 + x_2$.



b. Propriété :

Δ est le discriminant de l'équation $x \in \mathbb{R} / ax^2 + bx + c = 0$.

- Si $\Delta > 0$ l'équation admet deux solutions distinctes x_1 et x_2 on a : $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.
- Si $\Delta = 0$ l'équation admet une solution $x_1 = \frac{-b}{2a}$ on a : $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$.
- Si $\Delta < 0$ l'équation n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$ on ne peut pas factoriser $ax^2 + bx + c$ sous forme de produit de deux polynômes de 1^{er} degré (deux monômes).

❖ signe de trinôme de second degré $ax^2 + bx + c$:

a. Activité :

On considère le trinôme de second degré $ax^2 + bx + c$.

1^{er} cas : $\Delta > 0$

On a deux racines x_1 et x_2 on pose $x_1 < x_2$.

1. Donner les racines x_1 et x_2 en fonction de a et b et c
2. Factoriser $ax^2 + bx + c$.
3. Compléter le tableau suivant :

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
a	Signe de a	Signe de a	Signe de a	
$x - x_1$	-	0	+	+
$x - x_2$			0	
$a(x - x_1)(x - x_2)$		0		0
$ax^2 + bx + c$	Signe de	Signe de	Signe de	

4. En déduit le signe de $ax^2 + bx + c$.

2^{ème} cas : $\Delta = 0$

On a une racine double x_1 .

1. Donner la racine double en fonction de a et b .
2. Factoriser $ax^2 + bx + c$.
3. Compléter le tableau suivant :

x	$-\infty$	x_1	$+\infty$
a	Signe de a	Signe de a	
$(x - x_1)^2$	+	0	+
$a(x - x_1)^2$		0	
$ax^2 + bx + c$	Signe de		Signe de

4. En déduit le signe de $ax^2 + bx + c$.



5. Donner la propriété :

b. Propriété :

Δ est le discriminant du trinôme de second $P(x) = ax^2 + bx + c$.

- Si $\Delta > 0$ et x_1 et x_2 sont les racines distinctes du trinôme de second $P(x)$ alors :
 - ✓ à l'extérieure des racines x_1 et x_2 le signe de $P(x)$ est celui de a .
 - ✓ entre les racines x_1 et x_2 le signe de $P(x)$ est le contraire du signe de a .
 - ✓ on a : $P(x_1) = 0$ et $P(x_2) = 0$.
- Si $\Delta = 0$ et x_1 est la racine distincte du trinôme de second $P(x)$ alors :
 - ✓ le signe de $P(x)$ est celui de a pour tout $x \neq \frac{-b}{a}$ (c.à.d. $x \neq x_1$)
 - ✓ $P(x)$ s'annule pour $x = \frac{-b}{a}$ (c.à.d. $P\left(\frac{-b}{a}\right) = 0$).
- Si $\Delta < 0$ trinôme de second $P(x)$ n'a pas de racine dans $\mathbb{R}$ on ne peut pas factoriser $P(x)$ et son signe est celui de a pour tout x de $\mathbb{R}$.

c. Exercice :

On considère l'équation suivante : $(E) : x \in \mathbb{R} / 2x^2 + 4x - 6 = 0$.

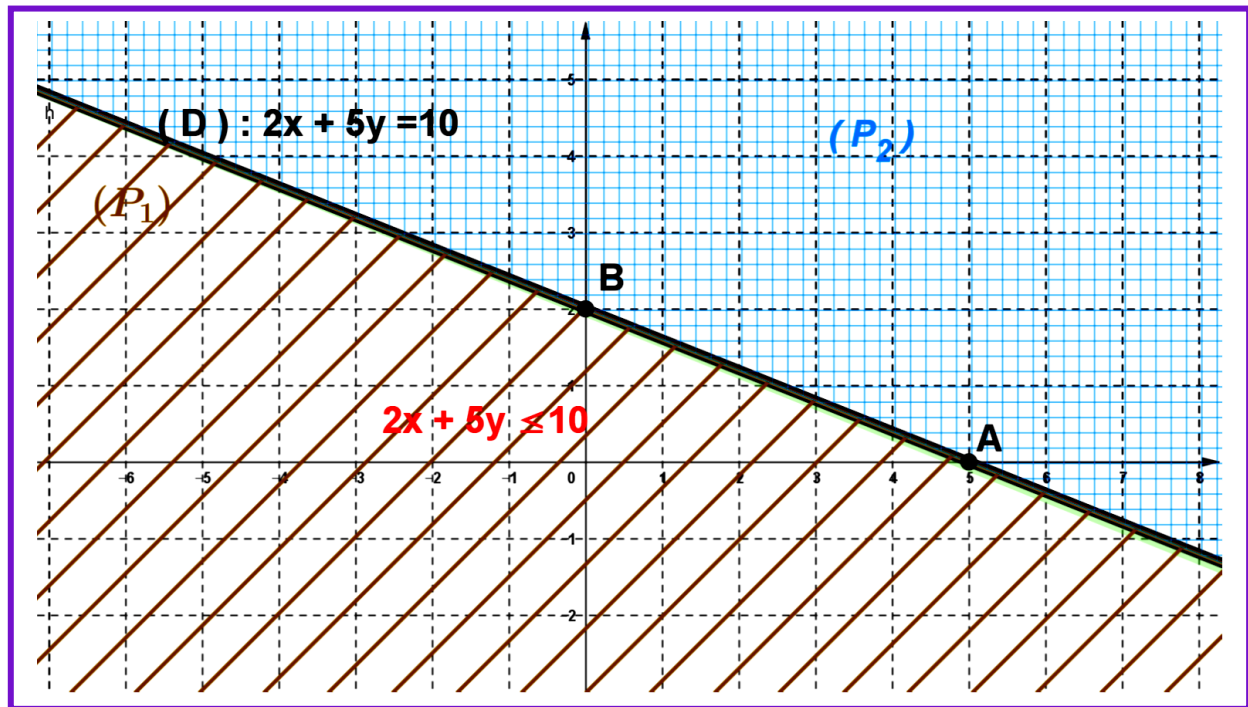
1. Résoudre l'équation (E) .
2. Factoriser $2x^2 + 4x - 6$.
3. Donner le signe de $2x^2 + 4x - 6$.
4. En déduit l'ensemble de solution de l'inéquation : $(E') : x \in \mathbb{R} / 2x^2 + 4x - 6 \leq 0$.

III. Equations et inéquations de 1^{ère} degré à deux inconnues :(méthode graphique)

a. Activité :

On considère l'équation suivante : $(E) : (x, y) \in \mathbb{R}^2 / 2x + 5y = 10$.

1. Est-ce que le couple $(5, 0)$ vérifie l'équation (E) ?
2. Est-ce que le couple $(0, 2)$ vérifie l'équation (E) ?
3. On considère le plan (P) est rapporté au repère $(0, \vec{i}, \vec{j})$ et $M(x, y) \in (P)$ et vérifie $2x + 5y = 10$.
 - a. Que représente l'équation $2x + 5y = 10$ dans le plan (P) .
 - b. En déduit l'ensemble des points $M(x, y) \in (P)$ qui vérifie $2x + 5y = 10$.
 - c. Construire la droite (D) d'équation cartésienne $(D) : 2x + 5y = 10$.
 - d. noté sur la figure le demi plan $(\mathcal{G}_1)$ de bord (ou de frontière) la droite (D) qui contient le point $O(0, 0)$ l'autre demi plan sera noté $(\mathcal{G}_2)$.
 - e.



4. On considère l'inéquation suivante : $(I) : (x, y) \in \mathbb{R}^2 / 2x + 5y \leq 10$.

- Prenez plusieurs points $A(x, y)$ quelconque de (P_1) puis vérifiez est-ce que leurs coordonnées (x, y) sont solutions de l'inéquation (I) .
- Prenez plusieurs points $B(x, y)$ quelconque de (P_2) puis vérifiez est-ce que leurs coordonnées (x, y) sont solutions de l'inéquation (I) .

b. Méthode graphique :

Pour résoudre graphiquement les inéquations :

- ✓ $(I) : (x, y) \in \mathbb{R}^2 / ax + by + c \leq 0$ ou $(I) : (x, y) \in \mathbb{R}^2 / ax + by + c < 0$.
- ✓ $(I) : (x, y) \in \mathbb{R}^2 / ax + by + c \geq 0$ ou $(I) : (x, y) \in \mathbb{R}^2 / ax + by + c > 0$.

On suit les étapes suivantes :

- On construit la droite d'équation : $(D) : ax + by + c = 0$ dans un plan (P) muni d'un repère $(0, \vec{i}, \vec{j})$.
- On place un point $A(e, f)$ sur le plan (P) tel que : $A(e, f) \notin (D)$.
- On désigne (arbitrairement) par (P_1) le demi-plan de bord (D) qui contient $A(e, f)$, l'autre demi-plan par (P_2) .
- Si les coordonnées (e, f) de A vérifient l'inéquation (I) donc l'ensemble des solutions de (I) toutes les coordonnées des points de ce demi-plan (P_1) fermé (c.à.d. contient la droite (D)) si l'inéquation (I) est écrite avec les symboles $\leq$ ou $\geq$ si non toutes les coordonnées des points de ce demi-plan (P_1) ouvert.



- Si les coordonnées (e, f) de A ne vérifie pas l'inéquation (I) donc l'ensemble des solutions de (I) toutes les coordonnées des points de l'autre demi plan $(\mathcal{P}_2)$ fermé [avec bien sûr (c.à.d. contient la droite (D) si l'inéquation (I) est écrit avec les symboles $\leq$ ou $\geq$ si non toutes les coordonnées des points de ce demi plan $(\mathcal{P}_2)$ ouvert].

IV. Système de deux équations de premières degré à deux inconnues :

a. Déterminants d'un système :

❖ Définition :

On considère le système suivant $(S) : (x, y) \in \mathbb{R}^2 / \begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$.

- Le nombre $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b$ est appelé le déterminant du système (S) .
- Le nombre $\Delta_x = \begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix} = cb' - c'b$ est appelé le déterminant pour déterminer x .
- Le nombre $\Delta_y = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} = ac' - a'c$ est appelé le déterminant pour déterminer y .

❖ propriété :

On considère le système suivant $(S) : (x, y) \in \mathbb{R}^2 / \begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$.

1^{er} cas $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b \neq 0$

Le système est appelé système de Cramer, le système admet une et une solution c'est le couple $\left(\frac{\Delta_x}{\Delta}, \frac{\Delta_y}{\Delta} \right)$.

d'où l'ensemble des solutions de (S) est $S = \left\{ \left(\frac{\Delta_x}{\Delta}, \frac{\Delta_y}{\Delta} \right) \right\}$.

2^{ème} cas $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b = 0$ on a :

a. si $\Delta_x \neq 0$ ou $\Delta_y \neq 0$ le système n' pas de solution, d'où l'ensemble des solutions de (S) est $S = \emptyset$

b. si $\Delta_x = 0$ et $\Delta_y = 0$ le système se ramène a une seule équation (on prend une par exemple

$(S) \Leftrightarrow (x, y) \in \mathbb{R}^2 / ax + by = c$) le système a une infinité de solutions. d'où l'ensemble des solutions de

(S) est $S = \left\{ (x, y) / y = -\frac{b}{a}x + \frac{c}{a}, x \in \mathbb{R} \right\}$ (si $a \neq 0$) (si $b \neq 0$ $S = \left\{ (x, y) / y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}, x \in \mathbb{R} \right\}$).

b. Exercice : Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes suivants on utilise la méthode des déterminants

a. $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ -3x + 10y = 7 \end{cases}$ b. $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 3x + 6y = 9 \end{cases}$ c. $\begin{cases} x + 2y = 3 \\ 3x + 6y = 7 \end{cases}$