Cours avec Exercices d'application PROF : ATMANI NAJIB Tronc CS
Avec solutions

http://xriadiat.e-monsite.com

Equations et inéquations et systèmes partie1

Leçon : Equations et inéquations et systèmes partie3
Présentation globale
Chapitre n° 3

IV) équation du second degré a une inconnue.
V) Inéquation du second degré a une inconnue.

IV) équation du second degré a une inconnue.

1)Définition : Une équation du second degré a une inconnue est une équation de la forme $ax^2+bx+c=0$ où a, b et c sont des réels avec $a\neq 0$.

Une solution de cette équation s'appelle une racine du trinôme ax^2+bx+c.

Exemple : L'équation $3x^2-6x-2=0$ est une équation du second degré.

2)Résolution d'une équation du second degré a une inconnue.

Activité :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1) $x^2=16$ 2) $x^2=-8$ 3) $(x+2)^2=9$

4) $5x^2-4x=0$ 5) $3x^2-x-2=0$

Solution : 1)L'équation $x^2=16$.

16 est positif donc l'équation admet deux solutions

$x=\sqrt{16}=4$ et $x=-\sqrt{16}=-4$.

Donc l'ensemble de toutes les solutions est : $S=\{-4;4\}$

2)L'équation $x^2=-8$.

-8 est négatif donc l'équation n'a pas de solution

Dans $\mathbb{R}$. Donc : $S=\varnothing$

3)L'équation $(x+2)^2=9$.

On a alors $x+2=3$ ou $x+2=-3$.

L'équation admet deux solutions $x=3-2=1$ et $x=-3-2=-5$. Donc l'ensemble de toutes les solutions est : $S=\{-5;1\}$

4) $5x^2-4x=0$ ssi $x(5x-4)=0$

Soit : $x=0$ ou $5x-4=0$

Soit : $x=0$ ou $x=\frac{4}{5}$ Donc l'ensemble de toutes les solutions est : $S=\left\{0;\frac{4}{5}\right\}$

5) $3x^2-x-2=0$

On va d'abord Factoriser les trinômes $3x^2-x-2$

$$3x^2-x-2=3\left(x^2-\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}\right)=3\left(x^2-2\frac{1}{2\times 3}x+\left(\frac{1}{6}\right)^2-\left(\frac{1}{6}\right)^2-\frac{2}{3}\right)$$

$$3x^2-x-2=3\left(x^2-\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}\right)=3\left(\left(x-\left(\frac{1}{6}\right)\right)^2-\frac{25}{36}\right)$$

$$3x^2-x-2=3\left(\left(x-\left(\frac{1}{6}\right)\right)^2-\frac{25}{36}\right)$$ Cette écriture s'appelle la forme canonique

$$3x^2-x-2=3\left(x-\frac{1}{6}-\frac{5}{6}\right)\left(x-\frac{1}{6}+\frac{5}{6}\right)=3(x-1)\left(x+\frac{2}{3}\right)$$

Donc : $3x^2-x-2=3(x-1)\left(x+\frac{2}{3}\right)$ la forme factorisée

$3x^2-x-2=0$ ssi $(x-1)\left(x+\frac{2}{3}\right)=0$

On a alors $x-1=0$ ou $x+\frac{2}{3}=0$

L'équation admet deux solutions $x=1$ et . $x=-\frac{2}{3}$

Donc l'ensemble de toutes les solutions est : $S=\left\{-\frac{2}{3};1\right\}$

Cas général :

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a\left(x^2+2\frac{b}{2\times a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}\right)$$

$$ax^2+bx+c==\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a}$$

$$= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}\right] = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

On pose $\Delta = b^2 - 4ac$ et $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = -\frac{\Delta}{4a^2}$

1)Définitions : Soit le du trinôme ax^2+bx+c avec $a \neq 0$.

✓ Le trinôme peut s'écrire sous la forme dite la forme canonique :

$$ax^2+bx+c = a\left[(x-\alpha)^2+\beta\right]$$

✓ On appelle **discriminant** du trinôme ax^2+bx+c, le nombre réel, noté $\Delta = b^2 - 4ac$.

<u>Exemple :</u>Pour le trinôme $3x^2-x-2$

a) Calculons le discriminant :

a = 3, b = -1 et c = -2 donc :

$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times 3 \times (-2) = = 1 + 24 = 25$

b) déterminons la forme canonique :

$3x^2-x-2 = 3\left[(x-\alpha)^2+\beta\right]$ $\quad \alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{-1}{2\times 3} = \frac{1}{6}$

et $\beta = -\frac{\Delta}{4a^2} = -\frac{25}{4\times 3^2} = -\frac{25}{36}$

$3x^2-x-2 = 3\left[\left(x-\frac{1}{6}\right)^2 - \frac{25}{36}\right]$ la forme canonique :

Propriété1 : Les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $x^2 = a$ (Dépendent du signe de a)

- Si a < 0, alors l'équation n'a pas de solution.
- Si a = 0, alors l'équation possède une unique solution qui est 0.
- Si a > 0, alors l'équation possède deux solutions qui sont $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$

<u>Démonstration :</u>

- Si $a < 0$, l'équation n'a pas de solution car un carré est positif.
- Si $a = 0$, alors l'équation s'écrit $x^2 = 0$ donc $x = 0$.
- Si $a > 0$: $x^2 = a$ équivaut à : $x^2 - a = 0$

Soit $\left(x - \sqrt{a}\right)\left(x+\sqrt{a}\right) = 0$

$x - \sqrt{a} = 0 \quad ou \quad x + \sqrt{a} = 0$

$x = \sqrt{a} \quad ou \quad x = -\sqrt{a}$

Propriété2 : soit l'équation $ax^2+bx+c=0$ où a, b et c sont des réels avec $a \neq 0$.

et soit Δ son discriminant

- Si $\Delta < 0$: L'équation $ax^2+bx+c=0$ n'a pas de solution réelle c a d : $S = \varnothing$

Et on ne peut pas factorisée le trinôme ax^2+bx+c

- Si $\Delta = 0$: L'équation $ax^2+bx+c=0$ a une seule solution (dite double) : $x_0 = -\frac{b}{2a}$.

c a d : $S = \{x_0\}$ et le trinôme ax^2+bx+c a une forme factorisée : $ax^2+bx+c = a(x-x_0)^2$

- Si $\Delta > 0$: L'équation $ax^2+bx+c=0$ a deux solutions distinctes :

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ c a d : $S = \{x_1 ; x_2\}$

Et le trinôme ax^2+bx+c a une forme factorisée :

$ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$

<u>Démonstration :</u>On a vu que le trinôme ax^2+bx+c avec $a \neq 0$ peut s'écrire sous sa forme canonique

$ax^2+bx+c = a\left[(x-\alpha)^2+\beta\right]$

avec $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = -\frac{b^2-4ac}{4a^2}$ Donc :

$$ax^2+bx+c = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}\right] = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

- Si $\Delta < 0$: L'équation $ax^2+bx+c=0$ peut s'écrire :

$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$

Comme un carré ne peut être négatif $\left(\frac{\Delta}{4a^2} < 0\right)$, l'équation n'a pas de solution.

- Si $\Delta = 0$: $ax^2+bx+c = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$

L'équation $ax^2+bx+c=0$ peut s'écrire : $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = 0$

L'équation n'a qu'une seule solution : $x_0 = -\frac{b}{2a}$

- Si $\Delta > 0$: $ax^2+bx+c = a\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$

L'équation $ax^2+bx+c=0$ peut s'écrire :

$\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = 0$

L'équation a deux solutions distinctes :

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

Applications : Résoudre les équations suivantes et Factoriser les trinômes :

a) $2x^2 - x - 6 = 0$ b) $2x^2 - 3x + \frac{9}{8} = 0$

c) $x^2 + 3x + 10 = 0$ d) $6x^2 - x - 1 = 0$

Solution : a) Calculons le discriminant de l'équation

$2x^2 - x - 6 = 0$:

a = 2, b = -1 et c = -6

donc $\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times 2 \times (-6) = 49$.

Comme $\Delta > 0$, l'équation possède deux solutions distinctes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1)-\sqrt{49}}{2\times 2} = -\frac{3}{2}$$

$$\text{et } x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1)+\sqrt{49}}{2\times 2} = 2$$

$S = \left\{-\frac{3}{2};2\right\}$ et le trinôme $2x^2 - x - 6$ a une forme

factorisée : $2x^2 - x - 6 = a\left(x-\left(-\frac{3}{2}\right)\right)(x-2)$

c a d $2x^2 - x - 6 = a\left(x+\frac{3}{2}\right)(x-2)$

b) Calculons le discriminant de l'équation $2x^2 - 3x + \frac{9}{8} = 0$:

a = 2, b = -3 et c = $\frac{9}{8}$

donc $\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 2 \times \frac{9}{8} = 0$.

Comme $\Delta = 0$, l'équation possède une seule solution (dite double): $x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{-3}{2\times 2} = \frac{3}{4}$ c a d : $S = \left\{\frac{3}{4}\right\}$ et le trinôme $2x^2 - 3x + \frac{9}{8}$ a une forme factorisée :

$$2x^2 - 3x + \frac{9}{8} = 2\left(x-\frac{3}{4}\right)^2$$

c) Calculons le discriminant de l'équation $x^2 + 3x + 10 = 0$:a = 1, b = 3 et c = 10

donc $\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \times 1 \times 10 = -31$.

Comme $\Delta < 0$, l'équation ne possède pas de solution réelle cad : $S = \varnothing$

d) $6x^2 - x - 1 = 0$

$\Delta = 1 + 24 = 25$

$x_1 = \frac{1+5}{12} = \frac{1}{2}$ et $x_2 = \frac{1-5}{12} = -\frac{1}{3}$

Donc : $S = \left\{-\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right\}$

$R(x) = 6\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{3}\right)$

Applications : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes

1) $6x^2 - 7x - 5 = 0$ **2)** $2x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 = 0$

3) $3x^2 + x + 2 = 0$ **4)** $4x^2 - 8x + 3 = 0$

5) $x^2 - 4x + 2 = 0$ 6) $x^2 + 5x + 7 = 0$

7) $2x^2 - 4x + 6 = 0$ **8)** $x^2 - 4x - 21 = 0$

9) $3x^2 - 6x + 3 = 0$

Solution

1) $a = 6$ **et** $b = -7$ **et** $c = -5$

$6x^2 - 7x - 5 = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4\times 6\times(-5) = 49 + 120 = 169 = (13)^2 > 0$$

Comme $\Delta > 0$, l'équation possède deux solutions distinctes :

$$x_1 = \frac{-(-7)+\sqrt{169}}{2\times 6} = \frac{7+13}{12} = \frac{20}{12} = \frac{5}{3} \textbf{ et } x_2 = \frac{7-13}{12} = \frac{6}{12} = -\frac{1}{2}$$

Donc : $S = \left\{\frac{5}{3}, -\frac{1}{2}\right\}$

2) $a = 2$ **;** $b = -2\sqrt{2}$ **;** $c = 1$ $2x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac = \left(-2\sqrt{2}\right)^2 - 4\times 2\times 1 = 8 - 8 = 0$$

Comme $\Delta = 0$, l'équation possède une seule solution (dite double): $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-\left(-2\sqrt{2}\right)}{2\times 2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ **donc :** $S = \left\{\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$

3) $3x^2 + x + 2 = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (1)^2 - 4\times 3\times 2 = 1 - 24 = -23 < 0$$

Comme $\Delta < 0$, l'équation ne possède pas de solution réelle cad : $S = \varnothing$

4) $4x^2 - 8x + 3 = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4\times 3\times(4) = 84 - 8 = 16 = (4)^2 > 0$$

Comme $\Delta > 0$, l'équation possède deux solutions distinctes :

$$x_1 = \frac{-(-8)+\sqrt{16}}{2\times 4} \textbf{ et } x_2 = \frac{-(-8)-\sqrt{16}}{2\times 4}$$

$x_1=\frac{8+4}{8}=\frac{12}{8}=\frac{3}{2}$ **et** $x_2=\frac{8-4}{8}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$

$S=\left\{\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right\}$

5) $x^2-4x+2=0$

$\Delta=b^2-4ac=(-4)^2-4\times2\times(1)=16-8=8>0$

Comme $\Delta>0$, l'équation possède deux solutions distinctes

$x_1=\frac{-(-4)+\sqrt{8}}{2\times1}$ **et** $x_2=\frac{-(-4)-\sqrt{8}}{2\times1}$

$x_1=\frac{4+2\sqrt{2}}{2}=\frac{2(2+\sqrt{2})}{2}=2+\sqrt{2}$ **et** $x_2=\frac{4-2\sqrt{2}}{2}=\frac{2(2-\sqrt{2})}{2}=2-\sqrt{2}$

Donc : $S=\{2-\sqrt{2},2+\sqrt{2}\}$

6) $x^2+5x+7=0$

$\Delta=b^2-4ac=5^2-4\times1\times7=25-28=-3<0$

Comme $\Delta<0$, l'équation ne possède pas de solution réelle cad : $S=\varnothing$

7) $2x^2-4x+6=0$

$\Delta=b^2-4ac=(-4)^2-4\times2\times6=16-48=-32<0$

Comme $\Delta<0$, l'équation ne possède pas de solution réelle cad : $S=\varnothing$

8) $x^2-4x-21=0$

$\Delta=b^2-4ac=(-4)^2-4\times1\times(-21)=16+84=100=(10)^2>0$

Comme $\Delta>0$, l'équation possède deux solutions distinctes :

$x_1=\frac{-(-4)+\sqrt{100}}{2\times1}$ **et** $x_2=\frac{-(-4)-\sqrt{100}}{2\times1}$

$x_1=\frac{4+10}{2}=\frac{14}{2}=7$ **et** $x_2=\frac{4-10}{2}=\frac{-6}{2}=-3$

Donc : $S=\{-3,7\}$

9) $3x^2-6x+3=0$

$\Delta=b^2-4ac=(-6)^2-4\times3\times3=36-36=0$

Comme $\Delta=0$, l'équation possède une seule solution (dite double): $x=\frac{-(-6)}{2\times3}=\frac{6}{6}=1$

$S=\{1\}$

Exercice1 : Factoriser les trinômes :

a) $4x^2+19x-5$ b) $9x^2-6x+1$

Solution : a) On cherche les racines du trinôme $4x^2+19x-5$:

Calcul du discriminant : $\Delta = 19^2 - 4 \times 4 \times (-5) = 441$

Les racines sont : $x_1=\frac{-19-\sqrt{441}}{2\times4}=-5$ et $x_2=\frac{-19+\sqrt{441}}{2\times4}=\frac{1}{4}$

On a donc :

$4x^2+19x-5=4(x-(-5))\left(x-\frac{1}{4}\right)=(x+5)(4x-1)$.

b) On cherche les racines du trinôme $9x^2-6x+1$:

Calcul du discriminant : $\Delta = (-6)^2 - 4 \times 9 \times 1 = 0$

Comme $\Delta = 0$, le trinôme possède une seule racine (dite racine double): $x_0=-\frac{b}{2a}=-\frac{-6}{2\times9}=\frac{1}{3}$:

et le trinôme $9x^2-6x+1$ a une forme factorisée :

$9x^2-6x+1=9\left(x-\frac{1}{3}\right)^2$

Exercice 2: Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) :

$$\frac{x-2}{2x^2-3x-2}-\frac{x^2}{2x^2+13x+6}=0$$

Solution :

- On commence par factoriser les expressions $2x^2-3x-2$ et $2x^2+13x+6$:

Le discriminant de $2x^2-3x-2$ est

$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 2 \times (-2) = 25$ et ses racines sont :

$x_1=\frac{3-\sqrt{25}}{2\times2}=-\frac{1}{2}$ et $x_2=\frac{3+\sqrt{25}}{2\times2}=2$

On a donc :

$2x^2-3x-2=2\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-2)=(2x+1)(x-2)$.

Le discriminant de $2x^2+13x+6$ est :

$\Delta' = 13^2 - 4 \times 2 \times 6 = 121$ et ses racines sont :

$x_1'=\frac{-13-\sqrt{121}}{2\times2}=-6$ et $x_2'=\frac{-13+\sqrt{121}}{2\times2}=-\frac{1}{2}$

On a donc :

$2x^2+13x+6=2(x+6)\left(x+\frac{1}{2}\right)=(x+6)(2x+1)$.

- L'équation (E) s'écrit : $\frac{x-2}{(2x+1)(x-2)}-\frac{x^2}{(x+6)(2x+1)}=0$

Les valeurs -6, $-\frac{1}{2}$ et 2 annulent le dénominateur.

On résout alors (E) sur $\mathbb{R}\setminus\left\{-6\,;-\frac{1}{2}\,;2\right\}$.

(E) s'écrit : $\frac{1}{2x+1}-\frac{x^2}{(x+6)(2x+1)}=0$ c c a d

$$\frac{x+6}{(2x+1)(x+6)}-\frac{x^2}{(x+6)(2x+1)}=0 \Leftrightarrow \frac{x+6-x^2}{(2x+1)(x+6)}=0$$

c a d $x+6-x^2=0$ car $x\neq-\frac{1}{2}$ et $x\neq-6$.

Le discriminant de $-x^2+x+6$ est :
$\Delta'' = 1^2 - 4 \times (-1) \times 6 = 25$.

Les racines sont : $x_1''=\frac{-1-\sqrt{25}}{2\times(-1)}=3$ et $x_2''=\frac{-1+\sqrt{25}}{2\times(-1)}=-2$

Les solutions de l'équation (E) sont : -2 et 3.
Donc $S=\{-2;3\}$

3)La somme et le produit des racines d'un trinôme.

Proposition1 : soit le trinôme ax^2+bx+c tel que son discriminant $\Delta>0$

Si x_1 et x_2 sont les racines du trinôme alors :

$$x_1+x_2=\frac{-b}{a} \quad \text{et} \quad x_1\times x_2=\frac{c}{a}$$

<u>Exemple :</u> soit le trinôme $2019x^2-2020x+1$
a) vérifier que 1 est racine du trinôme
b) trouver l'autre racine du trinôme

Solution :

a) $2019\times1^2-2020\times1+1=2019-2020+1=2020-2020=0$

donc $x_1=1$

b) a = 2019, b = -2020 et c = 1

on a : $x_1\times x_2=\frac{c}{a}$ donc $1\times x_2=\frac{1}{2019}$ donc $x_2=\frac{1}{2019}$

<u>Exemple :</u> soit le trinôme (T) : $-2x^2+\sqrt{2}x+2$

1) prouver que le trinôme (T) admet deux racines distinctes α et β sans les calculer

2) Déduire les valeurs suivantes : $\alpha+\beta$; $\alpha\times\beta$; $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}$; $\alpha^2+\beta^2$; $\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}$; $\alpha^3+\beta^3$

Solution : 1) : $a=-2$ **et** **et** $b=\sqrt{2}$ **et** $c=2$

$$\Delta=b^2-4ac=\left(\sqrt{2}\right)^2-4\times2\times(-2)=2+16=18>0$$

Comme $\Delta>0$: le trinôme (T) : a deux racines distinctes : α et β

2) on a : $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$ et $\alpha\times\beta=\frac{c}{a}$ donc

$$\alpha+\beta=-\frac{\sqrt{2}}{-2}=\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{et} \quad \alpha\times\beta=\frac{2}{-2}=-1$$

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\beta+\alpha}{\alpha\beta}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{-1}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

On a : $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$ donc

$(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=\alpha^2+\beta^2$ donc $\alpha^2+\beta^2=\frac{1}{2}+2=\frac{5}{2}$

On a : $\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\beta^2+\alpha^2}{\alpha\beta}$ donc $\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\frac{5}{2}}{-1}=-\frac{5}{2}$

On a : $(\alpha+\beta)^3=\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$ donc

$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha^2\beta-3\alpha\beta^2$

donc $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$ donc

$$\alpha^3+\beta^3=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3-3(-1)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

donc

$$\alpha^3+\beta^3=\frac{\sqrt{2}^3}{2^3}+\frac{3\sqrt{2}}{2}=\frac{2\sqrt{2}}{8}+\frac{3\sqrt{2}}{2}=\frac{2\sqrt{2}+12\sqrt{2}}{8}=\frac{14\sqrt{2}}{8}=\frac{7\sqrt{2}}{4}$$

Proposition2 : le système $(I)\begin{cases}x+y=s\\x\times y=p\end{cases}$ où les s , p sont des réels donnés admet une solution dans $\mathbb{R}^2$ ssi $s^2-4p\geq0$ et dans ce cas x , y sont solutions de l'équation $x^2-sx+p=0$

<u>Exemple :</u> Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système : $\begin{cases}x+y=5\\x\times y=4\end{cases}$

Solution : méthode1 :

$$\begin{cases}x+y=5\\x\times y=4\end{cases} \text{ ssi } \begin{cases}x=5-y\\(5-y)\times y=4\end{cases}$$

On considère : $(5-y)\times y=4$ ssi $-y^2+5y=4$ ssi $y^2-5y+4=0$

Calculons le discriminant : a = 1, b = -5 et c = 4
donc $\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 4 = 9$.

Comme $\Delta > 0$, l'équation possède deux solutions distinctes :

$$y_1=\frac{5-\sqrt{9}}{2a}=\frac{5-3}{2\times1}=1 \quad \text{et} \quad y_2=\frac{5+\sqrt{9}}{2a}=\frac{5+3}{2\times1}=4$$

Si $y=1$ et puisque $x=5-y$ alors $x=5-1=4$

Si $y=4$ et puisque $x=5-y$ alors $x=5-4=1$

On en déduit que : $S=\{(4,1);(1,4)\}$

4) le discriminant réduit d'un trinôme.

Soit le trinôme ax^2+bx+c

Si b est pair c a d $b=2b'$ on parle du discriminant réduit

$\Delta'=b'^2-ac$ et on a :

- Si $\Delta'<0$: pas de solution réelle c a d : $S=\varnothing$
- Si $\Delta'=0$: L'équation a une seule solution (dite double) : $x_0=-\frac{b'}{a}$.
- Si $\Delta'>0$: L'équation a deux solutions distinctes :

$x_1=\frac{-b'-\sqrt{\Delta'}}{a}$ et $x_2=\frac{-b'+\sqrt{\Delta'}}{a}$

Applications : Résoudre l'équations suivantes :

$x^2-22x-23=0$

Solution : on a : b = -22 et 22 est pair b = -2 x 11 donc b' = - 11

Calculons le discriminant réduit $\Delta'=b'^2-ac$ de l'équation :

$\Delta'=b'^2-ac=(-11)^2-1\times(-23)=121+23=144$

Comme Δ' > 0, l'équation possède deux solutions distinctes :

$x_1=\frac{-b'-\sqrt{\Delta'}}{a}=\frac{-(-11)-\sqrt{144}}{1}=\frac{11-12}{1}=-1$ et

$x_2=\frac{-b'+\sqrt{\Delta'}}{a}=\frac{-(-11)+\sqrt{144}}{1}=\frac{11+12}{1}=23$

$S=\{-1;23\}$

V) Inéquation du second degré a une inconnue.

1)Définition : on pose : $P(x)=ax^2+bx+c$ $a\neq 0$

Une inéquation du second degré a une inconnue est une inéquation de la forme $P(x)\geq 0$ ou $P(x)>0$ ou $P(x)\leq 0$ ou $P(x)<0$

2) Signes du trinôme : ax^2+bx+c. $a\neq 0$

Si Δ < 0 : On a vu que le trinôme ax^2+bx+c avec $a\neq 0$ peut s'écrire sous la forme : $ax^2+bx+c=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right]$

et puisqueΔ < 0 Donc : -Δ > 0 Alors $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}>0$

et par suite : le trinôme ax^2+bx+c est du signe de a

Si Δ = 0 : On a : $ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ et puisque $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2\geq 0$ Alors le trinôme ax^2+bx+c est du signe de a pour $x\neq\frac{-b}{2a}$

L'équation $ax^2+bx+c=0$ peut s'écrire : $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=0$

- Si Δ > 0 : on a : $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$

x	$-\infty$		$x1$		$x2$		$+\infty$
$x-x1$		$-$		$-$	0	$+$	
$x-x2$		$-$	0	$+$		$+$	
$(x-x1)(x-x2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc on a :

Résumé :

➢ Si Δ > 0 le trinôme ax^2+bx+c est du signe de a a l'extérieur des racines et le signe contraire de a entre les racines

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$		Signe de a	0	Signe de $-a$	0	Signe de de a	

➢ Si Δ < 0 : le trinôme ax^2+bx+c est du signe de a

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	Signe de a	

Si Δ = 0 : le trinôme ax^2+bx+c est du signe de a

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$f(x)$		Signe de a	0	Signe de a	

Exemple : Résoudre les inéquations suivantes :

a) $2x^2-3x+1\geq 0$ b) $-2x^2+4x-2\geq 0$ c) $3x^2+6x+5<0$

Solution : a) $2x^2-3x+1\geq 0$ $a=2$

Calculons le discriminant : a = 2, b = -3 et c = 1 donc

$\Delta=b^2-4ac=(-3)^2-4\times 2\times 1=9-8=1>0$

Comme Δ > 0, l'équation possède deux solutions distinctes :

$x_1=\frac{-(-3)+\sqrt{1}}{2\times 2}=\frac{3+1}{4}=1$ et $x_2=\frac{5+\sqrt{9}}{2a}=\frac{3-1}{4}=\frac{1}{2}$

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$2x^2-3x+1$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc : $S=\left]-\infty,\frac{1}{2}\right]\cup[1,+\infty[$

b) $-2x^2+4x-2\succ 0$

Étudions le signe du trinôme $P(x)=-2x^2+4x-2$

$a=-2$

$\Delta=b^2-4ac=(4)^2-4\times(-2)\times(-2)=16-16=0$

Comme $\Delta = 0$, le trinôme possède une racine double:

$$x_1 = \frac{-(4)}{2\times(-2)} = 1$$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$-2x^2+4x-2$		$-$	0	$-$	

Donc : $S = \varnothing$

c) $3x^2+6x+5>0$

Étudions le signe du trinôme $P(x) = 3x^2+6x+5$

$a = 3 > 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (6)^2 - 4\times3\times5 = 36-60 = -24 < 0$$

x	$-\infty$		$+\infty$
$3x^2+6x+5$		$+$	

Donc : $S = \mathbb{R}$

Exercice 3: Résoudre les inéquations suivantes :

a) $3x^2+6x-9>0$ b) $x^2+3x-5<-x+2$ c) $\frac{1}{x^2-x-6} \geq 2$

Solution : a) $3x^2+6x-9>0$

- On commence par résoudre l'équation $3x^2+6x-9=0$.

Le discriminant de $3x^2+6x-9$ est $\Delta = 6^2 - 4 \text{ x } 3 \text{ x } (-9) = 36 + 108 = 144$.

Les solutions de l'équation $3x^2+6x-9=0$ sont :

$$x_1 = \frac{-6-\sqrt{144}}{2\times3} = \frac{-6-12}{6} = -3 \text{ et}$$

$$x_2 = \frac{-6+\sqrt{144}}{2\times3} = \frac{-6+12}{6} = 1$$

- On dresse ensuite le tableau de signes :

x	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$3x^2+6x-9$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$3x^2+6x-9$ Est strictement positif sur les intervalles $]-\infty\,;-3[$ et $]1\,;+\infty[$.

L'ensemble des solutions de l'inéquation $3x^2+6x-9>0$ est donc $S =]-\infty\,;-3[\cup]1\,;+\infty[$.

b) On commence par rassembler tous les termes dans le membre de gauche afin de pouvoir étudier les signes des trinômes.

Etudier le Signe d'un trinôme

a) $x^2+3x-5<-x+2$ équivaut à $x^2+4x-7<0$

Le discriminant de x^2+4x-7 est $\Delta = 4^2 - 4 \text{ x } 1 \text{ x } (-7) = 44$ et ses racines sont :

Et $x_2 = \frac{-4+\sqrt{44}}{2\times1} = -2+\sqrt{11}$ $x_1 = \frac{3-1}{4} = \frac{1}{2}$

On obtient le tableau de signes :

x	$-\infty$		$-2-\sqrt{11}$		$-2+\sqrt{11}$		$+\infty$
$3x^2+6x-9$		$+$	0	$-$	0	$+$	

L'ensemble des solutions de l'inéquation $x^2+3x-5<-x+2$ est donc $S =]-2-\sqrt{11};-2+\sqrt{11}[$.

c) $\frac{1}{x^2-x-6} \geq 2$

- On commence par déterminer les racines du trinôme x^2-x-6 :

*Le discriminant est $\Delta = (-1)^2 - 4 \text{ x } 1 \text{ x } (-6) = 25$ et ses racines sont :

$$x_1 = \frac{1-\sqrt{25}}{2\times1} = -2 \text{ et } x_2 = \frac{1+\sqrt{25}}{2\times1} = 3$$

Les valeurs -2 et 3 annulent le dénominateur. On résout donc l'équation dans $\mathbb{R}\backslash\{-2\,;3\}$.

$\frac{1}{x^2-x-6} \geq 2$ Équivaut à $\frac{1}{x^2-x-6} - 2 \geq 0$

Soit : $\frac{-2x^2+2x+13}{x^2-x-6} \geq 0$

- On détermine les racines du trinôme $-2x^2+2x+13$:

Le discriminant est $\Delta' = 2^2 - 4 \text{ x } (-2) \text{ x } 13 = 108$ et ses racines sont :

$$x_1' = \frac{-2-\sqrt{108}}{2\times(-2)} = \frac{1+3\sqrt{3}}{2} \text{ et } x_2' = \frac{-2+\sqrt{108}}{2\times(-2)} = \frac{1-3\sqrt{3}}{2}$$

- On obtient le tableau de signe :

x	$-\infty$		$\frac{1-3\sqrt{3}}{2}$		-2		3		$\frac{1+3\sqrt{3}}{2}$		$+\infty$
$-2x^2+2x+13$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	0	$-$	
x^2-x-6		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{-2x^2+2x+13}{x^2-x-6}$		$-$	0	$+$	‖	$-$	‖	$+$	0	$-$	

L'ensemble des solutions de l'inéquation $\frac{1}{x^2-x-6} \geq 2$

est : $S = \left[\frac{1-3\sqrt{3}}{2};-2\right[\cup \left]3;\frac{1+3\sqrt{3}}{2}\right]$.

Exercice4 : Résoudre les inéquations suivantes :

a) $2x^2-4x+6\geq 0$ b) $4x^2-8x+3\leq 0$

c) $x^2-3x-10<0$

Solution : a) $2x^2-4x+6\geq 0$ $a=2$

Calculons le discriminant : a = 2, b = -4 et c = 6 donc

$\Delta=b^2-4ac=16-48=-32<0$

Donc : $S=\mathbb{R}$

b) $4x^2-8x+3\leq 0$ $a=4$ Étudions le signe du trinôme

$\Delta=b^2-4ac=(-8)^2-4\times4\times3=64-48=16>0$

Comme Δ > 0, l'équation possède deux solutions distinctes :

$x_1=\frac{8+4}{2\times4}=\frac{12}{8}=\frac{3}{2}$ et $x_2=\frac{8-4}{8}=\frac{1}{2}$

x	$-\infty$		$1/2$		$3/2$		$+\infty$
$3x^2-4x+6$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc : $S=\left[\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right]$

c) $x^2-3x-10<0$ $\Delta=b^2-4ac=49>0$

Comme Δ > 0, l'équation possède deux solutions distinctes :

$x_1=5$ et $x_2=-2$

x	$-\infty$		-2		5		$+\infty$
$x^2-3x-10$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc : $S=]-2,5[$

Exercice 5: Résoudre les équations et les inéquations suivantes : 1) $(x-1)^2=9$ 2) $(x-1)^2\leq 9$ 3) $\frac{x-1}{x}=\frac{2}{3}$

4) $\frac{x-1}{x}\leq\frac{2}{3}$

Solution :1)Résoudre $(x-1)^2=9$ ssi: $x-1=3$ ou $x-1=-3$ soit $x=4$ ou $x=-2$, d'où $S=\{-2\ ;4\}$.

2) Pour résoudre une inéquation comportant des carrés, on peut transposer tous les termes dans un seul membre et on factorise, si possible, en un produit de facteurs du premier degré.

On peut alors en déduire l'ensemble des solutions à l'aide d'un tableau de signes.

Résoudre $(x-1)^2\leq 9$ revient à écrire $(x-1)^2-9\leq 0$

.D'où : $(x-1-3)(x-1+3)\leq 0$: , ou encore : $(x-4)(x+2)\leq 0$.

x	-¥		-2		4		+¥
$x-4$		-		-	0	+	
$x+2$		-	0	+		+	
$(x-4)(x+2)$		+	0	-	0	+	

Le produit est négatif sur l'intervalle [- 2 ; 4], d'où : S = [- 2 ; 4].

3) $\frac{x-1}{x}=\frac{2}{3}$

Pour $x\neq 0$, résoudre l'équation $\frac{x-1}{x}=\frac{2}{3}$ équivaut à résoudre : $3(x-1)=2x$.

D'où : $3x-3=2x$, ou encore $3x-2x=3$, soit $x=3$.

L'ensemble des solutions est $S=\{3\}$.

• Dans le cas de l'inéquation $\frac{x-1}{x}\leq\frac{2}{3}$ on transpose tous les termes dans un seul membre et on fait apparaître si possible un quotient de facteurs du premier degré. On peut alors déterminer l'ensemble des solutions à l'aide d'un tableau de signes. Pour $x\neq 0$, résoudre l'équation $\frac{x-1}{x}\leq\frac{2}{3}$ équivaut à résoudre $\frac{x-1}{x}-\frac{2}{3}\leq 0$ .En réduisant au même dénominateur, on obtient : $\frac{3x-3}{3x}-\frac{2x}{3x}\leq 0$, soit

x	-¥		0		3		+¥
$x-3$		-		-	0	+	
$3x$		-	0	+		+	
$\frac{x-3}{3x}$		+	‖	-	0	+	

.

Le quotient est négatif sur l'intervalle]0 ; 3]

donc $S=]0,3]$

Exercice6 : soit le polynôme suivant (E) :

$P(x)=x^3-\sqrt{2}x^2-x+\sqrt{2}$

1)Montrer que 1 est racine du polynôme $P(x)$

2)Montrer que $P(x)=(x+1)\left(x^2-\left(\sqrt{2}+1\right)x+\sqrt{2}\right)$

3)On pose : $Q(x)=x^2-\left(\sqrt{2}+1\right)x+\sqrt{2}$ et soit Δ son discriminant

a) Vérifier que : $\Delta=\left(\sqrt{2}-1\right)^2$

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $Q(x)=0$

4)en déduire les solutions de l'équation $x -\left(\sqrt{2}+1\right)\sqrt{x}+\sqrt{2}=0$

5) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x)=0$

6) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $P(x)\leq 0$

Solution : $P(x)=x^3-\sqrt{2}x^2-x+\sqrt{2}$

1)Montrons que 1 est racine du polynôme $P(x)$

$P(-1)=(-1)^3-\sqrt{2}(-1)^2-(-1)+\sqrt{2}$

$P(-1)=-1-\sqrt{2}+1+\sqrt{2}=0$ donc 1 est racine du polynôme $P(x)$

2) Montrons que $P(x)=(x+1)\left(x^2-\left(\sqrt{2}+1\right)x+\sqrt{2}\right)$

$(x+1)\left(x^2-\left(\sqrt{2}+1\right)x+\sqrt{2}\right)=x^3-\left(\sqrt{2}+1\right)x^2+\sqrt{2}x+x^2-\left(\sqrt{2}+1\right)x+\sqrt{2}$

$=x^3-\left(\sqrt{2}+1\right)x^2+\sqrt{2}x+x^2-\left(\sqrt{2}+1\right)x+\sqrt{2}$

$=x^3-\sqrt{2}x^2-x^2+\sqrt{2}x+x^2-\sqrt{2}x-x+\sqrt{2}$

$=x^3-\sqrt{2}x^2-x+\sqrt{2}$

3) a) $\Delta=b^2-4ac=\left(\sqrt{2}+1\right)^2-4\times1\times\sqrt{2}$

$\Delta=\left(\sqrt{2}\right)^2-2\sqrt{2}\times1+(1)^2=\left(\sqrt{2}-1\right)^2$

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $Q(x)=0$

$x^2-\left(\sqrt{2}+1\right)x+\sqrt{2}=0$ On a $\Delta\succ 0$

$x_2=\dfrac{\sqrt{2}+1-\sqrt{2}+1}{2\times1}=\dfrac{2}{2}=1$ et

$x_1=\dfrac{\sqrt{2}+1+\sqrt{2}-1}{2\times1}=\dfrac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$

donc : $S=\left\{\sqrt{2},1\right\}$

4)recherche des solutions de l'équation $x -\left(\sqrt{2}+1\right)\sqrt{x}+\sqrt{2}=0$

$x -\left(\sqrt{2}+1\right)\sqrt{x}+\sqrt{2}=0$ peut s'écrire sous la forme :

$\left(\sqrt{x}\right)^2-\left(\sqrt{2}+1\right)\sqrt{x}+\sqrt{2}=0$

On pose : $X=\sqrt{x}$ On a donc : $X^2-\left(\sqrt{2}+1\right)X+\sqrt{2}=0$

D'après la question précédente les solutions sont : $X_1=\sqrt{2}$ **et** $X_2=1$

On a donc : $\sqrt{x_1}=\sqrt{2}$ **et** $\sqrt{x_2}=1$

donc : $\left(\sqrt{x_1}\right)^2=\left(\sqrt{2}\right)^2$ **et** $\left(\sqrt{x_2}\right)^2=(1)^2$

donc : $x_1=2$ **et** $x_2=1$ On a donc : $S=\{2,1\}$

5) recherche des solutions de l'équation $P(x)=0$

On a : $P(x)=(x+1)\left(x^2-\left(\sqrt{2}+1\right)x+\sqrt{2}\right)$

$P(x)=0$ ssi $x+1=0$ ou $x^2-\left(\sqrt{2}+1\right)x+\sqrt{2}=0$

ssi $x=-1$ ou $x_1=\sqrt{2}$ ou $x_2=1$

On a donc : $S=\left\{-1,1,\sqrt{2}\right\}$

6) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $P(x)\leq 0$

$P(x)\leq 0$ ssi $(x+1)\left(x^2-\left(\sqrt{2}+1\right)x+\sqrt{2}\right)\leq 0$

x	$-\infty$		-1		1		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$Q(x)$		+		+	0	−	0	+	
$x+1$		−	0	+		+		+	
$P(x)$		−	0	+	0	−	0	+	

On a donc : $S=\left]-\infty,-1\right]\cup\left[1,\sqrt{2}\right]$

Exercice7 : soit l'équation (E) :

$x^2+\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)x-2\sqrt{6}=0$ et soit Δ son discriminant

1) Vérifier que : $\Delta=\left(2\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E)

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(x)=0$

4) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $P(x)>0$

5)en déduire les solutions de l'équation $x+\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\sqrt{x}-2\sqrt{6}=0$

Solution : (E) : $x^2+\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)x-2\sqrt{6}=0$

1) $\Delta=b^2-4ac=\left(2\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2-4\times1\times2\sqrt{6}$

$\Delta=12-4\sqrt{6}+2+8\sqrt{6}=14+4\sqrt{6}$

$14+4\sqrt{6}=14+2\times2\sqrt{3}\times\sqrt{2}=\left(2\sqrt{3}\right)^2+2\times2\sqrt{3}\times\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}\right)^2$

$14+4\sqrt{6}=\left(2\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E):

$x^2+\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)x-2\sqrt{6}=0$

On a $\Delta=14+4\sqrt{6}>0$ donc

$$x_1=\frac{-2\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{14+4\sqrt{6}}}{2\times 1}=\frac{-2\sqrt{3}+\sqrt{2}+\left|2\sqrt{3}+\sqrt{2}\right|}{2\times 1}$$

et $x_2=\dfrac{-2\sqrt{3}+\sqrt{2}-\left|2\sqrt{3}+\sqrt{2}\right|}{2\times 1}$

$x_1=\dfrac{-2\sqrt{3}+\sqrt{2}+2\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2\times 1}=\dfrac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$ et

$x_2=\dfrac{-2\sqrt{3}+\sqrt{2}-2\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2\times 1}=\dfrac{-4\sqrt{3}}{2}=-2\sqrt{3}$

On a donc : $S=\left\{\sqrt{2},-2\sqrt{3}\right\}$

4) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $P(x)>0$

x	$-\infty$		$-2\sqrt{3}$		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$x^2+\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)x-2\sqrt{6}$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On a donc : $S=\left]-\infty,-2\sqrt{3}\right[\cup\left]\sqrt{2},+\infty\right[$

5)en déduire les solutions de l'équation $x+\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\sqrt{x}-2\sqrt{6}=0$

$x+\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\sqrt{x}-2\sqrt{6}=0$ peut s'écrire sous la forme :

$\left(\sqrt{x}\right)^2+\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\sqrt{x}-2\sqrt{6}=0$

On pose : $X=\sqrt{x}$ On a donc :

$X^2+\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)X-2\sqrt{6}=0$

D'après la question précédente les solutions sont : $X_1=\sqrt{2}$ **et** $X_2=-2\sqrt{3}$

On a donc : $\sqrt{x_1}=\sqrt{2}$ **et** $\sqrt{x_2}=-2\sqrt{3}$ **or**

l'équation $\sqrt{x_2}=-2\sqrt{3}$ **n'a pas de** solutions

donc : $\left(\sqrt{x_1}\right)^2=\left(\sqrt{2}\right)^2$ donc : $x_1=2$ On a donc : $S=\{2\}$

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices
Que l'on devient un mathématicien