Série:Polynômes

Exercice N°1

On considère le polynôme $P(x)=2x^3-3x^2-11x+6$

1) Montrer que $P(x)$ est divisible par $x+2$.
2) Déterminer le polynôme $Q(x)$ tel que: $P(x)=(x+2)Q(x)$.
3) a) Résoudre l'équation $Q(x)=0$.
   b) En déduire les solutions de l'équation $P(x)=0$.
   c) Montre que $P(x)=(2x-1)(x+2)(x-3)$
   d) Résoudre l'équation $5P(x)-(2x-3)Q(x)=0$
4) On suppose que $|x-1|<\frac{1}{3}$.
   a) Montrer que $\frac{2}{3}<x<\frac{4}{3}$.
   b) Montrer que : $\frac{1}{3}<2x-1<\frac{5}{3}$ et $\frac{8}{3}<x+2<\frac{10}{3}$ et $-\frac{7}{3}<x-3<-\frac{5}{3}$.
   c) En déduire que : $-\frac{350}{27}<P(x)<-\frac{40}{27}$

Exercice N°2

On considère le polynôme $P(x)=x^3-4x^2+4x-1$

1) Montrer que le nombre 1 est une racine du polynôme $P(x)$, que peut-on déduire ?
2) Déterminer le polynôme $Q(x)$ tel que: $P(x)=(x-1)Q(x)$.
3) a) Montrer que l'équation $Q(x)=0$, admet deux solutions distinctes x_1 et x_2 sans les calculer ($x_1<x_2$).
   b) Calculer $x_1^2+x_2^2$ et $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}$ et $x_1^3+x_2^3$.

Exercice N°3

Soit le polynôme : $P(x)=-3x^3-5x^2+3x+2$

1) a) Montrer que -2 est une racine de $P(x)$, que peut-on déduire ? .
   b) En utilisant la division euclidienne, montrer que $P(x)=(x+2)(-3x^2+x+1)$.
2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $-3x^2+x+1=0$.
3) a) Montrer que : $\frac{1-\sqrt{13}}{6}<\frac{1}{6}<\frac{1+\sqrt{13}}{6}$
   b) Montrer que : $\frac{1+\sqrt{13}}{6}<\frac{5}{6}$
4) Dresser le tableau de signes de $P(x)$. (On admet que $-1<\frac{1-\sqrt{13}}{6}<0$)
5) a) Résoudre l'inéquation : $P(x)\leq 0$
   b) Déterminer le signe de $P(x)$ sur l'intervalle $\left]\frac{1}{6}\,,\,\frac{5}{6}\right[$.