I. Définition d'un polynome

1. Définition

Un **polynôme** P est une combinaison linéaire des puissances naturels d'une indéterminée "x" .
C'est-à-dire : $P(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1 x+a_0$ tels que $n\in\mathbb{N}$ et $a_i\in\mathbb{R}$, pour tout $0\le i\le n$.

a_i s'appelle coefficient du terme de degré i

a_0 est le terme constant

Si $a_n\neq 0$ alors $\deg(P)=d°P=n$

2. Propriétés

- Pour tout réel x : $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1 x+a_0=0 \Leftrightarrow a_n=a_{n-1}=\cdots=a_1=a_0=0$
- Pour tout réel x :
  $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1 x+a_0=b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1}+\cdots+b_1 x+b_0 \Leftrightarrow \text{pour tout } i, 0\le i\le n : a_i=b_i$

II. Operations sur les polynômes

1. Théorèmes

Pour tout réel x on a : $(P+Q)(x)=P(x)+Q(x)$; $(P\times Q)(x)=P(x)\times Q(x)$;
$(\alpha P)(x)=\alpha P(x)$ avec $\alpha\in\mathbb{R}^*$

2. Propriétés

Soient P et Q deux polynômes non nuls.

- $d°(P+Q)\le\max(d°P,d°Q)$
- $d°(\alpha P)=d°P$ pour tout α non nul
- $d°(PQ)=d°P+d°Q$ et pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $d°P^n=nd°P$

III. Racine d'un polynôme - Factorisation d'un polynôme

1. Division euclidienne

Théorème:

Soient P et H deux polynômes non nuls à coefficients réels.
Il existe un unique couple (Q,R) de polynômes à coefficients réels tels que:

$$P(x)=Q(x)H(x)+R(x) \text{ avec } d°R<d°H$$

Q et R sont respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de P par H

2. Division par : $(x-a)$

Théorème:

Soit P un polynôme de degré non nul n et a un réel donné
Il existe un polynôme Q de degré $n-1$ tel que $P(x)=(x-a)Q(x)+P(a)$

$Q(x)$ et $P(a)$ sont respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de $P(x)$ par $(x-a)$

3. Racine d'un polynôme

Définition:

Soit P un polynôme de degré $n, n\ge 1$

On dit qu'un réel a est une racine ou un zero du polynome P si $p(a)=0$

Remarque:

Déterminer les racines ou les zéros d'un polynome P , c'est résoudre l'équation $P(x)=0$

Théorème:

Soit P un polynôme de degré $n\in\mathbb{N}^*$ à coefficients réels.

- Le polynôme P possède au plus n racines réelles
- $P(a)=0$ si et seulement si $P(x)$ est divisible par $(x-a)$