

Les polynômes

Leçon : les polynômes

Présentation globale

I) Définition d'un polynôme

II) Les polynômes et les opérations

III) La valeur absolue et propriétés La division par $x - a$ et factorisation de polynômes

I) Définition d'un polynôme

Activité : Soit un parallélépipède rectangle dont les dimensions : x , $x + 3$ et $x + 5$ avec x réel strictement positif. Soit $V(x)$ le volume de ce parallélépipède

1) Montrer que $V(x) = x^3 + 8x^2 + 15x$

2) Calculer $V(1)$ et $V(2)$?

3) Quelles opérations as-tu utilisé pour calculer $V(1)$ et $V(2)$?

I) Vocabulaire

L'expression : $V(x) = x^3 + 8x^2 + 15x$ est appelée polynôme de degré 3

On note $\deg(V) = 3$.

Les réels 1, 8, 15,0 sont appelés coefficients du polynôme $V(x)$.

$8x^2$ est un monôme de degré 2 et de coefficient 8.

x^3 est un monôme, de degré 3 et de coefficient 1.

$15x$ est un monôme, de degré 1 et de coefficient 15.

2) Définition : Un polynôme est une somme de monômes.

Un polynôme de la variable x sera noté souvent $P(x)$

, $Q(x)$, ... Le degré du polynôme P , noté $\deg P$, est celui de son monôme de plus haut degré.

3) Remarque et exemples :

1) $P(x) = 3x^4 + x^3 - 7x + \sqrt{3}$ est un polynôme de degré 4 donc $\deg(P) = 4$.

Il est ordonné suivant les puissances décroissantes. Son terme constant (le terme sans la variable x) est $\sqrt{3}$

2) $Q(x) = 2x^2(x-2) + (x-1)(2x+3)$

$Q(x) = 2x^3 - 4x^2 + 2x^2 + 3x - 2x - 3$

$R(x) = 2x^3 - 2x^2 + x - 3$ Donc $\deg(Q) = 3$.

3) $R(x) = x^3 + 3x^2 - \frac{2}{x} - 1$ n'est pas un polynôme

4) $E(x) = \sqrt{x} + x^2 - 3$ n'est pas un polynôme

5) $F(x) = 2 = 2x^0$ est un polynôme de degré 0 et

S'appelle un polynôme constant

6) $M(x) = 2x + 6$ est un polynôme de degré 1 et s'appelle un monôme

Donc un monôme c'est un polynôme qui s'écrit sous la forme : $M(x) = ax + b$

7) un polynôme de degré 2 s'appelle un trinôme

Donc un trinôme c'est un polynôme qui s'écrit sous la forme : $T(x) = ax^2 + bx + c$

Avec $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$

Application : Déterminer un polynôme P de degré 2 tel que :

$$P(0) = P(1) = 5 \text{ et } P(-2) = 3$$

Solution : P de degré 2 donc P s'écrit sous la forme : $P(x) = ax^2 + bx + c$

On a $P(0) = 5$ donc $a \times 0^2 + b \times 0 + c = 5$ donc $c = 5$

On a $P(1) = 5$ donc $a \times 1^2 + b \times 1 + c = 5$ donc $a + b + c = 5$ donc $a + b + 5 = 5$

$$\text{donc } a + b = 0 \quad (1)$$

On a $P(-2) = 3$ donc $a \times (-2)^2 + b \times (-2) + 5 = 3$ donc $4a - 2b + 5 = 3$

$$\text{donc } 4a - 2b = -2 \quad (2)$$

donc On a le système suivant : $\begin{cases} 4a - 2b = -2 \\ a + b = 0 \end{cases}$ donc

$\begin{cases} 4a - 2b = -2 \\ b = -a \end{cases}$ donc $4a + 2a = -2$ donc $6a = -2$ donc

$$a = -\frac{1}{3} \text{ donc } b = \frac{1}{3} \text{ Alors : } P(x) = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}x + 5$$

4) Egalité de deux polynômes

Définition. Deux polynômes P et Q sont égaux et on écrit $P = Q$ ssi . $P(x) = Q(x)$ pour tout x réel

Propriété. Deux polynômes P et Q sont égaux si et seulement si ils ont le même degré et les coefficients de leurs monômes de même degré sont égaux.

Exemple : Lesquels des polynômes ci-dessous sont égaux ? Expliquez

$$P(x) = 2x^3 - 2x^2 + x - 3 \text{ et}$$

$$Q(x) = 2x^2(x-2) + (x-1)(2x+3) \text{ et}$$

$$R(x) = 2x^3 + 3x^2 - 2x - 3$$

Solution :

$$O(x) = 2x^2(x-2) + (x-1)(2x+3) = 2x^3 - 4x^2 + 2x^2 + 3x - 2x - 3$$

$$Q(x) = 2x^3 - 2x^2 + x - 3 \quad \deg(Q) = 3$$

$$P(x) = 2x^3 - 2x^2 + x - 3 \quad \deg(P) = 3$$

Donc : $P(x) = Q(x)$ car $\deg(P) = \deg(Q)$ et les coefficients de leurs monômes de même degré sont égaux

Mais $P(x) \neq R(x)$ car les coefficients de leurs monômes de même degré ne sont pas égaux

Application: soit : $P(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - 1$ et

$$Q(x) = ax^5 + (b+c)x^4 + (c+d)x^3 + dx^2 + e$$

Déterminer a ; b ; c et d pour que : $P = Q$

Solution : $P = Q$ c a d $P(x) = Q(x)$ donc On a le système suivant :

$$\begin{cases} a = 0 \\ b + c = 1 \\ c + d = -2 \\ d = 1 \\ c = -1 \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} a = 0; d = 1; c = -1 \\ c = -2 - d = -2 - 1 = -3 \\ b = 1 - c = 1 + 3 = 4 \end{cases}$$

$$\text{donc } Q(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - 1$$

II) Les polynômes et les opérations

1) Activité : soient $P(x)$ et $Q(x)$ deux polynômes

I) Calculer dans chacun des cas suivants :

$$P(x) + Q(x); \quad P(x) - Q(x); \quad 3P(x) - 2Q(x)$$

$$1) \quad P(x) = x^3 + 2x^2 - 1 \quad ; \quad Q(x) = 3x^4 - x^3 + x$$

$$2) \quad P(x) = x^5 - x^2 + 3 \quad ; \quad Q(x) = -x^5 + x^2 - 5$$

II) Calculer $P(x) \times Q(x)$ et $(P(x))^2$

dans chacun des cas suivants et comparer :

$\deg(PQ)$ et $\deg(P) + \deg(Q)$

$$1) \quad P(x) = x^2 - 1 \quad ; \quad Q(x) = x^2 + 2x - 3$$

$$2) \quad P(x) = x^4 - x^2 + 2 \quad ; \quad Q(x) = 3x + 2$$

$$\text{Solution : I) 1) } P(x) = x^3 + 2x^2 - 1 \quad ;$$

$$Q(x) = 3x^4 - x^3 + x$$

$$\text{On a : } P(x) + Q(x) = x^3 + 2x^2 - 1 + 3x^4 - x^3 + x$$

$$\text{donc } P(x) + Q(x) = 3x^4 + 2x^2 + x - 1$$

$$\text{On a : } P(x) - Q(x) = x^3 + 2x^2 - 1 - 3x^4 + x^3 - x$$

$$P(x) - Q(x) = -3x^4 + 2x^3 + 2x^2 - x - 1$$

$$3P(x) - 2Q(x) = 3(x^3 + 2x^2 - 1) - 2(3x^4 - x^3 + x)$$

$$3P(x) - 2Q(x) = 3x^3 + 6x^2 - 3 - 6x^4 + 2x^3 - 2x$$

$$3P(x) - 2Q(x) = -6x^4 + 5x^3 + 6x^2 - 2x - 3$$

$$\deg(P) = 3; \quad \deg(Q) = 4; \quad \deg(P+Q) = 4; \quad \deg(P-Q) = 4$$

$$\text{I) 2) } P(x) = x^5 - x^2 + 3; \quad Q(x) = -x^5 + x^2 - 5$$

$$\text{On a : } P(x) + Q(x) = x^5 - x^2 + 3 - x^5 + x^2 - 5 = -2$$

$$\text{On a : } P(x) - Q(x) = x^5 - x^2 + 3 + x^5 - x^2 + 8 = 2x^5 - 2x^2 + 8$$

$$3P(x) - 2Q(x) = 3(x^5 - x^2 + 3) - 2(-x^5 + x^2 - 5)$$

$$3P(x) - 2Q(x) = 3x^5 - 3x^2 + 9 + 2x^5 - 2x^2 + 10$$

$$3P(x) - 2Q(x) = 5x^5 - 5x^2 + 19$$

$$\deg(P) = 5; \quad \deg(Q) = 5; \quad \deg(P+Q) = 0; \quad \deg(P-Q) = 5$$

$$\text{II) 1) on a } P(x) = x^2 - 1; \quad Q(x) = x^2 + 2x - 3$$

$$P(x) \times Q(x) = (x^2 - 1)(x^2 + 2x - 3) = x^5 + 2x^4 - 3x^3 - x^2 - 2x + 3$$

$$(P(x))^2 = (x^2 - 1)^2 = (x^2)^2 - 2x^2 \times 1 + 1 = x^4 - 2x^2 + 1$$

$$2) \quad P(x) = x^4 - x^2 + 2 \quad ; \quad Q(x) = 3x + 2$$

$$P(x) \times Q(x) = (3x + 2)(x^4 - x^2 + 2) = 3x^5 + 2x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 6x + 4$$

$$(P(x))^2 = (x^4 - x^2 + 2)^2 = (x^4 - x^2 + 2)(x^4 - x^2 + 2)$$

$$(P(x))^2 = (x^4 - x^2 + 2)^2 = x^8 - 2x^6 + 5x^4 - 4x^2 + 4$$

$$\deg(P \times Q) = 5 \quad \deg(P) = 4; \quad \deg(Q) = 1$$

$$\text{Donc } \deg(P \times Q) = \deg(P) + \deg(Q) \quad \text{et}$$

$$\deg(P^2) = 2\deg(P)$$

2) Résumé :

a) La somme de deux polynômes :

Soient P et Q deux polynômes

La somme de P et Q est un polynôme noté $P + Q$

tel que : $(P+Q)(x) = (P)(x) + (Q)(x)$

pour tous $x \in \mathbb{R}$

Remarque : $\deg(P+Q) \leq \max(\deg(P), \deg(Q))$

b) Le produit d'un polynôme par un réel :

Soient P un polynôme et $\alpha \in \mathbb{R}^*$

Le produit de P par un réel α est un polynôme noté αP et tel que : $(\alpha P)(x) = \alpha \times (P)(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

Remarque : $\deg(\alpha P) = \deg(P)$

c) Le produit de deux polynômes :

Soient P et Q deux polynômes non nuls

Le produit de P et Q est un polynôme noté PQ

et tel que : $(PQ)(x) = (P)(x) \times (Q)(x) \quad x \in \mathbb{R}$

Remarque : $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$

III) La division par $x - a$ et factorisation

de polynômes

1) La division euclidienne d'un polynôme par $x - a$

Propriétés : Soient P un polynôme de degré $n \in \mathbb{N}$ et soit $a \in \mathbb{R}$

Il existe un unique polynôme Q de degré $n-1$ et tq :

$P(x) = (x-a)Q(x) + P(a)$ Pour tous $x \in \mathbb{R}$

Cette égalité est la division euclidienne de $P(x)$ par $x-a$

$Q(x)$ est le quotient et $P(a)$ le reste

Exemple : Soit : $P(x) = x^3 + 3x^2 - 2x - 6$ et $a = -3$

$$\begin{array}{r|l} x^3 + 3x^2 - 2x - 6 & x + 3 \\ \hline -x^3 - 3x^2 & x^2 - 2 \\ \hline -2x - 6 & \\ -2x - 6 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

On a donc :

$$P(x) = (x+3)Q(x) + P(-3) = (x+3)(x^2 - 2) + 0 = (x+3)(x^2 - 2)$$

$Q(x) = x^2 - 2$ est le quotient et $P(-3) = 0$ le reste

Remarques : en remplaçons x par -3 dans le

polynôme : $P(x) = x^3 + 3x^2 - 2x - 6$

$$P(-3) = (-3)^3 + 3(-3)^2 - 2(-3) - 6 = -27 + 27 + 6 - 6 = 0$$

On dit que -3 est racine du polynôme $P(x)$

3) Le reste de la division de $P(x)$ par $x+3$ est 0. on

dit que le polynôme $P(x)$ est divisible par $x+3$.

2) Racine d'un polynôme :

Définition : Soient P un polynôme et soit $a \in \mathbb{R}$

On dit que a est racine du polynôme P ssi

$$P(a) = 0$$

Exemple : Soit : $P(x) = x^3 - 2x^2 + 1$

1) $P(1) = 1^3 - 2 \times 1^2 + 1 = 1 - 2 + 1 = 0$ donc 1 est racine du polynôme P

2) $P(2) = 2^3 - 2 \times 2^2 + 1 = 8 - 8 + 1 = 1 \neq 0$ donc

1 n'est pas une racine du polynôme P

Propriété : Soient P un polynôme de degré $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $a \in \mathbb{R}$. a est racine du polynôme P ssi $P(x)$ est divisible par $x - a$.

Exemple : Soit : $P(x) = x^3 - 3x^2 - 6x + 8$

On a $P(1) = 1^3 - 3 \times 1^2 - 6 \times 1 + 8 = 1 - 3 - 6 + 8 = 0$ donc 1 est racine du polynôme P

Donc $P(x)$ est divisible par $x - 1$

Effectuons la division euclidienne de $P(x)$ par $x - 1$

$$\text{On trouve : } P(x) = (x-1)(x^2 - 2x - 8) \quad (1)$$

$$\text{On pose : } Q(x) = x^2 - 2x - 8$$

$$\text{on a : } Q(-2) = (-2)^2 - 2(-2) - 8 = 4 + 4 - 8 = 0$$

Donc -2 est racine du polynôme Q Donc $Q(x)$ est divisible par $x + 2$

Effectuons la division euclidienne de $Q(x)$ par $x + 2$

$$\text{On trouve : } Q(x) = (x+2)(x-4) \quad (2)$$

D'après (1) et (2) on a :

$$P(x) = (x-1)(x+2)(x-4)$$

$$P(x) = 0 \text{ ssi } (x-1)(x+2)(x-4) = 0 \text{ ssi}$$

$$x-1=0 \text{ ou } x+2=0 \text{ ou } x-4=0$$

$P(x) = 0$ ssi $x = 1$ ou $x = -2$ ou $x = 4$ les racines du polynôme $P(x)$

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices

Que l'on devient un mathématicien

