Série d'exercices N° 05

prof: atmani najib

La droite dans le plan

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

Exercice 01 :

1) Etudier la colinéarité de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans les cas suivants :
   A) $\vec{u}(3;7)$; $\vec{v}(1;2)$.
   B) $\vec{u}\left(\sqrt{3};-1\right)$; $\vec{v}\left(\frac{1}{2};\sqrt{2}\right)$.
2) Etudier l'alignement des points A, B et C dans les cas suivants :
   A) $A(-4;2)$; $B(5;1)$; $C(11;3)$.
   B) $A(-2;3)$; $B(3;-1)$; $C(7;-4)$.

Exercice 02 :

1) Construire la droite (D) passant par $A(0;1)$ et dirigé par $\vec{u}(1;1)$.
2) Construire la droite (Δ) passant par $B(-1;1)$ et de vecteur directeur $\vec{v}(-1;2)$.
3) Déterminer les vecteurs directeurs de l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées.

Exercice 03:

Déterminer une représentation paramétrique de la droite (D) passant par A et dirigé par $\vec{u}$ dans les cas suivants :

1) $A(-1;2)$; $\vec{u}=3\vec{i}+4\vec{j}$.
2) $A(2;-3)$; $\vec{u}=\vec{i}-2\vec{j}$.
3) $A(1;0)$; $\vec{u}(5;-7)$.

Exercice 04:

Déterminer une équation cartésienne de la droite (D) passant par A et dirigé par $\vec{u}$ dans les cas suivants :

1) $A(-1;2)$; $\vec{u}=3\vec{i}+4\vec{j}$.
2) $A(2;-3)$; $\vec{u}=\vec{i}-2\vec{j}$.
3) $A(1;0)$; $\vec{u}(5;-7)$.

Exercice 05 :

Déterminer une équation cartésienne de la droite (D) définie par sa représentation paramétrique dans les cas suivants :

1) $(D):\begin{cases} x=2-3t \\ y=-1+t \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R})$.
2) $(D):\begin{cases} x=-2k \\ y=\frac{5}{2}+3k \end{cases} \quad (k\in\mathbb{R})$.

Exercice 06 :

Déterminer une représentation paramétrique de la droite (D) définie par son équation cartésienne dans les cas suivants :

1) $(D): 3x-2y+2=0$.
2) $(D): 2x+3y-2=0$.
3) $(D): x+2y=0$.
4) $(D): -7x-3y+6=0$.

Exercice 07 :

Soient $A(-6;-1)$; $B(2;3)$ et $C(9;6)$ trois points dans le plan, déterminer une représentation paramétrique et une équation cartésienne des droites suivantes (AB), (AC) et (BC).

Résumé du cours

- **Repère du plan :** Deux droites $D(O,I)$ et $D(O,J)$ gradués et sécantes et qui ont la même origine constituent un repère noté $\left(O,\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}\right)$.

La droite $D(O,I)$ s'appelle l'axe des abscisses.
La droite $D(O,J)$ s'appelle l'axe des ordonnées.
On dit que le plan est muni du repère $\left(O,\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}\right)$.
Le couple $\left(\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}\right)$ s'appelle base du plan.
Si (OI) et (OJ) sont orthogonaux, on dit que $\left(O,\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}\right)$ est orthogonal.
Si $(OI)\perp(OJ)$ et $\|\overrightarrow{OI}\|=\|\overrightarrow{OJ}\|=1$, on dit que $\left(O,\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}\right)$ est orthonormé.

- **Coordonnées d'un point- Coordonnées d'un vecteur**

-Soit M un point du plan, si A est le projeté du point M sur $D\left(O,\vec{i}\right)$ parallèlement à $D\left(O,\vec{j}\right)$ alors $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ avec $\overrightarrow{OA}=x\,\vec{i}$ et $\overrightarrow{OB}=y\,\vec{j}$. Le couple (x,y) s'appelle les coordonnées du point M (ou du vecteur $\overrightarrow{OM}$) noté par $M(x,y)$.
- Si $A(x_A,y_A)$ et $B(x_B,y_B)$ alors :
$$\overrightarrow{AB}(x_B-x_A\,,\,y_B-y_A).$$
-Si I est le milieu de $[AB]$ alors :
$$I\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2}\right).$$

- **Norme d'un vecteur-Distance de deux points**

-Si $\vec{u}(x,y)$ est un vecteur, alors $\|\vec{u}\|=\sqrt{x^2+y^2}$.
-Si $A(x_A,y_A)$ et $B(x_B,y_B)$ alors :
$$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}.$$

- **Colinéarité de deux vecteurs**

-Déterminant de deux vecteurs $\vec{u}(x_1,y_1)$ et $\vec{v}(x_2,y_2)$ est le réel $x_1y_2-x_2y_1$, noté par :
$$\det\left(\vec{u},\vec{v}\right)=\begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}.$$
-Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires ssi $\det\left(\vec{u},\vec{v}\right)=0$.

- **Une droite définie par un point et un vecteur directeur**

$\mathcal{D}\left(A,\vec{u}\right)=\left\{M\in\mathcal{P}\,/\,\det\left(\overrightarrow{AM},\vec{u}\right)=0\right\}$

- **Représentation paramétrique d'une droite :**

Le système $\begin{cases} x=x_A+t\alpha \\ y=y_A+t\beta \end{cases}(t\in\mathbb{R})$ est appelé représentation paramétrique de la droite $\mathcal{D}\left(A,\vec{u}\right)$ passant par $A(x_A,y_A)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(\alpha,\beta)$.

- **Equation cartésienne d'une droite :**

-Soit $M(x,y)\in\mathcal{D}\left(A,\vec{u}\right)$ alors $\det\left(\overrightarrow{AM},\vec{u}\right)=0$ équivaut à une équation de la forme $ax+by+c=0$ tel que :
$$(\alpha,\beta)=(-b,a) \text{ et } c=-ax_A-by_A.$$

- **Positions relatives de deux droites :**

- $\mathcal{D}\left(A,\vec{u}\right)$ et $\mathcal{D}\left(B,\vec{v}\right)$ sont parallèles ssi $\det\left(\vec{u},\vec{v}\right)=0$
- $(\mathcal{D}): ax+by+c=0$ et $(\Delta): a'x+b'y+c'=0$ sont parallèles si et seulement si $ab'-a'b=0$.

-Si les droites $(\mathcal{D})$ et (Δ) sont sécantes alors le point d'intersection est la solution du système :
$$\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0 \end{cases}$$

La droite dans le plan

prof: atmani najib

Exercice 08 :

Etudier l'intersection de deux droites (D) et (D') dans les cas suivants :

1) $(D):\begin{cases} x=4-3k \\ y=1+2k \end{cases} \ (k\in\mathbb{R})$ et $(D'):\begin{cases} x=3-t \\ y=2+2t \end{cases} \ (t\in\mathbb{R})$.

2) $(D): 2x-y+3=0$ et $(D'):\begin{cases} x=2-t \\ y=3-t \end{cases} \ (t\in\mathbb{R})$.

3) $(D): 2x+y-3=0$ et $(D'): x-y+1=0$.

Exercice 09 :

Soient $A(-2;-1)$ et $B\left(\frac{1}{2};-2\right)$ deux points dans le plan.

1) A) Donner une équation cartésienne de la droite (AB).

   B) Déterminer le couple des cordonnées de point I l'intersection de la droite (AB) et l'axe des abscisses.

2) Soit (Δ) la droite définie par sa représentation paramétrique suivante :

$$(\Delta):\begin{cases} x=-1+3t \\ y=-4+4t \end{cases} \ (t\in\mathbb{R}).$$

   A) Etablir que le point B appartient à la droite (Δ).

   B) Donner une équation cartésienne de la droite (Δ).

3) Construire les droites (Δ) et (AB).

Exercice 10 :

Soit ABC un triangle dans le plan.

1) Construire les points L, M et N tel que : $\overrightarrow{BN}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{MB}=\frac{1}{3}\overrightarrow{MA}$; $\overrightarrow{CL}=\frac{1}{4}\overrightarrow{CA}$.

2) Déterminer les cordonnées des points L, M et N dans le repère $\left(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$.

3) Ecrire une équation cartésienne de la droite (LM).

4) Montrer que les points L, M et N sont alignés.

Exercice 11 :

Soient $A(-2,1)$, $B(2,4)$, $\vec{u}(5,2)$, $(D): 2x-3y+1=0$ et $(D_m): (m-1)x-2my+3=0$ avec $m\in\mathbb{R}$.

1) Déterminer une équation cartésienne de la droite (Δ) passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$.

2) Vérifier que (D) et (Δ) sont sécantes et déterminer leur intersection.

   A) Déterminer la valeur de m pour que (D) et (D_m) soient en parallèle.

   B) Déterminer la valeur de m pour que $B\in(D_m)$.

3) A) Construire (D_0), (D_1) et (D_2).

   B) Montrer que toutes les droites (D_m) passent par le point $C\left(3,\frac{3}{2}\right)$.

Exercice 12 :

Soit $ABCD$ un trapèze a bases $[AB]$ et $[CD]$, I le point d'intersection de ses diagonales $[AC]$ et $[BD]$, J le point d'intersection de ses côtés $[AD]$ et $[BC]$.

On munit le plan d'un repère $\left(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)$ et on pose $x_C=a$ (l'abscisse de point C).

1) Donner des équations cartésiennes des droites (AC) et (BD) puis vérifier que $\left(\frac{a}{a+1};\frac{1}{a+1}\right)$ est le couple des cordonnée de point I.

2) Donner des équations cartésiennes des droites (AD) et (BC) puis déterminer le couple des cordonnée de point J.