Cours avec Exercices
Avec solutions

PROF : ATMANI NAJIB

Tronc CS

La droite dans le plan

Leçon : droite dans le plan
Présentation globale

I) Repère et coordonnées d'un point et coordonnées d'un vecteur
II) Condition analytique de colinéarité de deux vecteurs
III) La droite dans le plan
IV)positions relatives de deux droites dans le plan

I) Repère et coordonnées d'un point et coordonnées d'un vecteur

1)Activité :

Soient O. I et J trois points non alignés dans le plan P.
Et soit M un point quelconque du plan

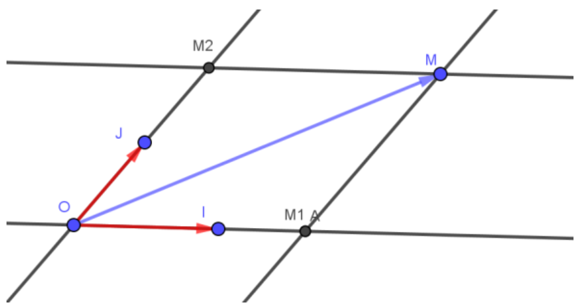
1)Construire le point M_1 la projection de M sur (OI) parallèlement a (OJ) et le point M_2 la projection de M sur (OJ) parallèlement a (OI)

2)soit x l'abscisse de M_1 sur l'axe gradué (OI) et y l'abscisse de M_2 sur l'axe (OJ)

a) Ecrire $\overrightarrow{OM_1}$ en fonction de $\overrightarrow{OI}$ et écrire $\overrightarrow{OM_2}$ en fonction de $\overrightarrow{OJ}$

b) En déduire $\overrightarrow{OM}$ en fonction de $\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OJ}$

Réponse : 1)



$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{M_1M}$

2) a) on a : x l'abscisse de M_1 sur l'axe gradué (OI) donc $\overrightarrow{OM_1} = x\overrightarrow{OI}$

Et on a : y l'abscisse de M_2 sur l'axe (OJ) donc $\overrightarrow{OM_2} = y\overrightarrow{OJ}$

b) dans le quadrilatère OM_1MM_2 : $(OM_1) \parallel (MM_2)$ et $(OM_2) \parallel (MM_1)$

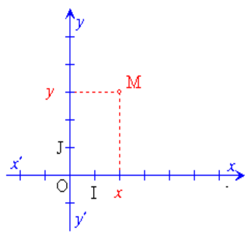
Donc OM_1MM_2 est un parallélogramme

Et par suite : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2}$ alors

$\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{OI} + y\overrightarrow{OJ}$

2) Le Repère dans le plan :

Soient O. I et J trois points non alignés dans le plan P.
Le triplet (O ; I ; J) détermine un Repère dans le plan. On le note R (O ; I ; J) ou R
Le point O est l'origine du Repère (O ; I ; J)
La droite (O I) est l'axe des abscisses du Repère (O ; I ; J)
La droite (O J) est l'axe des ordonnées du Repère (O ; I ; J)
Si les droites (O I) et (O J) sont perpendiculaires ont dit que le Repère est orthogonal
Si on a OI =OJ = 1 ont dit que le Repère (O ; I ; J) est normé
Si les droites (O I) et (O J) sont perpendiculaires et si on a OI =OJ = 1 ont dit que le Repère (O ; I ; J) est orthonormé



On pose $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$ et $\overrightarrow{OJ} = \vec{j}$ on note alors le Repère (O ; I ; J) par $(O;\vec{i};\vec{j})$

3) Les coordonnées d'un point :

Propriété et définition : Le plan est rapporté au Repère (O ; I ; J).Pour tout point M du plan il existe un unique couple (x, y) tel que $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$

et $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{OI} + y\overrightarrow{OJ}$

Le couple (x, y) est le couple de coordonnée de M et on note : $M(x, y)$: x est l'abscisse du point M et y est l'ordonnée du point M

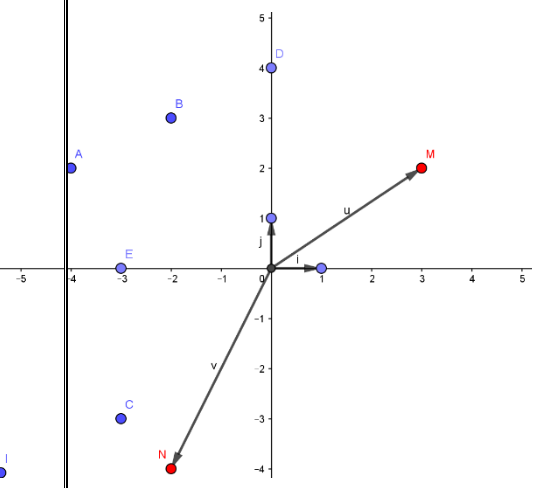
4) Les coordonnées d'un vecteur :

Définition : Le plan est rapporté au Repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

Le couple de coordonnée d'un vecteur $\vec{u}$ est le couple de coordonnée du point M tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$ et on note :

$\vec{u}(x, y)$ ou $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Application : Le plan est rapporté au Repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ Construire les points $A(-4;2)$; $B(-2;3)$; $C(-3;3)$; $E(0;4)$; $F(-3;0)$ et les vecteurs $\vec{u}(3;2)$; $\vec{v}(-2;-4)$



Réponse : soit M tel que $\overrightarrow{OM}=\vec{u}$ donc $M(3;2)$ et soit N tel que $\overrightarrow{ON}=\vec{v}$ donc $N(-2;-4)$

Propriétés : Le plan est rapporté au Repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

Soient $A(x_A;y_A)$; $B(x_B;y_B)$; $I(x_I;y_I)$ trois points dans le plan et $\vec{u}(x;y)$ et $\vec{v}(x';y')$ deux vecteurs

$\overrightarrow{AB}(x_B-x_A;y_B-y_A)$ et

$AB=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$

Le milieu I du segment [AB] a pour coordonnées $I\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2}\right)$

$\vec{u}(x;y)=\vec{v}(x';y')$ ssi $x'=x$ et $y=y'$

$\vec{u}+\vec{v}(x+x';y+y')$ et $\vec{u}-\vec{v}(x-x';y-y')$

$\vec{u}+\vec{v}=(x+x')\vec{i}+(y+y')\vec{j}$

Pour tout $\alpha\in\mathbb{R}$ $\quad\alpha\bullet\vec{u}(\alpha x;\alpha y)$

Application : Le plan est rapporté au Repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ et soient $A(1;2)$; $B(-5;4)$

1. Déterminer les coordonnée de I le milieu du segment [AB] et calculer $AB=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|$
2. Déterminer les coordonnées du point C tel que $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}$
3. Quelle est la nature du quadrilatère $OACB$
4. Déterminer les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ tel que $\vec{u}=\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{IC}$

Réponse :1) Le milieu I du segment [AB] a pour coordonnées $I\left(\frac{x_B+x_A}{2};\frac{y_B+y_A}{2}\right)$

Donc : $I\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2}\right)$ donc $I\left(\frac{1+(-5)}{2};\frac{2+4}{2}\right)$ donc : $I(-2;3)$

$AB=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=\sqrt{(-5-1)^2+(4-2)^2}=\sqrt{36+4}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$

2) on a $A(1;2)$; $B(-5;4)$; $O(0;0)$ donc

$\overrightarrow{OA}(x_A-x_O;y_A-y_O)$ donc $\overrightarrow{OA}(1-0;2-0)$ donc $\overrightarrow{OA}(1;2)$

$\overrightarrow{OB}(x_B-x_O;y_B-y_O)$ donc $\overrightarrow{OB}(-5-0;4-0)$ donc $\overrightarrow{OB}(-5;4)$

on a $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ donc $\overrightarrow{OC}(1+(-5);2+4)$ donc

$\overrightarrow{OC}(-4;6)$ donc $C(-4;6)$

3) on a $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}$ donc $OACB$ est un parallélogramme

On vérifie : on a $\overrightarrow{OA}(1;2)$ ①

Et $\overrightarrow{BC}(-4+5;6-4)$ c a d $\overrightarrow{BC}(1;2)$ ②

De ① et ② on a donc $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{BC}$ donc $OACB$ est un parallélogramme

4) on a $\vec{u}=\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{IC}$ et $\overrightarrow{OA}(1;2)$ et

$2\overrightarrow{OB}(-10;8)$

$\overrightarrow{IC}(-4+2;6-3)$ donc $\overrightarrow{IC}(-2;3)$

on a $\vec{u}=\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{IC}$ donc $\vec{u}(1-10+2;1+8+3)$

donc $\vec{u}(-11;13)$

II) Condition analytique de colinéarité de deux vecteurs

Dans la suite de ce cours le plan est rapporté au Repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

Soient $\vec{u}(x;y)$ et $\vec{v}(x';y')$ deux vecteurs

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires ssi il existe $\alpha\in\mathbb{R}$ tel que $\vec{u}=\alpha\bullet\vec{v}$

On a $\vec{u}(x;y)$ et $\alpha\bullet\vec{v}(\alpha x';\alpha y')$

On a $\vec{u}=\alpha\bullet\vec{v}$ donc $x=\alpha x'$ et $y=\alpha y'$

Si $x'\neq 0$ et $y'\neq 0$ alors $\alpha=\frac{x}{x'}$ et $\alpha=\frac{y}{y'}$

donc $\frac{x}{x'}=\frac{y}{y'}$ alors $xy'=x'y$ finalement on a :

$xy'-x'y=0$

Si $x'=0$ alors $x=0$ la condition est juste

Si $y'=0$ alors $y=0$ la condition est juste

1) Le déterminant de deux vecteurs :

Définition : Soients $\vec{u}(x;y)$ et $\vec{v}(x';y')$ deux vecteurs

On appelle le déterminant de deux vecteurs $\vec{u}(x;y)$ et $\vec{v}(x';y')$ le réel : $xy'-x'y$

Et on le note : $\det(\vec{u};\vec{v})=\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}=xy'-x'y$

Exemple : $\vec{u}(-2;3)$ et $\vec{v}(4;5)$

$\det(\vec{u};\vec{v})=\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}=(-2)\times 5-3\times 4=-10-12=-22$

Propriété : Deux vecteurs $\vec{u}(x;y)$ et $\vec{v}(x';y')$ sont colinéaires ssi $\det(\vec{u};\vec{v})=0$

Deux vecteurs $\vec{u}(x;y)$ et $\vec{v}(x';y')$ sont non colinéaires ssi $\det(\vec{u};\vec{v}) \neq 0$

Remarque : Trois points A. B et C sont alignés ssi les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires

Ssi $\det(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) = 0$

Exemple :1) $\vec{u}(1;2)$ et $\vec{v}(-3;1)$

$\det(\vec{u};\vec{v}) = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1\times1-(-3)\times2 = 1+6 = 7 \neq 0$ donc $\vec{u}(1;2)$ et $\vec{v}(-3;1)$ sont non colinéaires

2) $\vec{u}(-6;4)$ et $\vec{v}(3;-2)$

$\det(\vec{u};\vec{v}) = \begin{vmatrix} -6 & 3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = (-6)\times(-2)-3\times4 = 12-12 = 0$

Donc $\vec{u}(-6;4)$ et $\vec{v}(3;-2)$ sont colinéaires

<u>Application :</u> Le plan est rapporté au Repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

Soit m un paramètre réel

Discuter suivant les valeurs de m la colinéarité de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans chaque cas :

1) $\vec{u}(3;2m+1)$ et $\vec{v}(2;m)$

2) $\vec{u}(m;1)$ et $\vec{v}(1;m)$

<u>Réponse :1) on a :</u>

$\det(\vec{u};\vec{v}) = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2m+1 & m \end{vmatrix} = 3\times m-2(2m+1) = 3m-4m-2 = -m-2$

$\det(\vec{u};\vec{v}) = 0$ ssi $-m-2=0$ ssi $m=-2$

Si $m=-2$ alors $\det(\vec{u};\vec{v}) = 0$ donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires

Si $m\neq-2$ alors $\det(\vec{u};\vec{v}) \neq 0$ donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires

<u>2) on a :</u>

$\det(\vec{u};\vec{v}) = \begin{vmatrix} m & 1 \\ 1 & m \end{vmatrix} = m^2-1 = m^2-1^2 = (m+1)(m-1)$

$\det(\vec{u};\vec{v}) = 0$ ssi $(m+1)(m-1)=0$ ssi $m=-1$ ou $m=-1$

Si $m=1$ alors $\det(\vec{u};\vec{v}) = 0$ donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires

Si $m=-1$ alors $\det(\vec{u};\vec{v}) = 0$ donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires

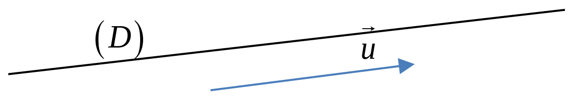
Si $m\neq1$ et $m\neq-1$ alors $\det(\vec{u};\vec{v}) \neq 0$ donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires

III)La droite dans le plan

1) Définition vectorielle d'une droite :

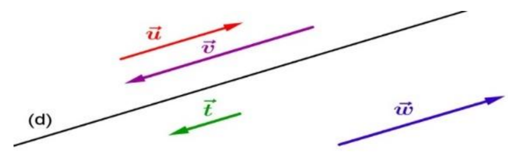
a. Vecteur directeur d'une droite :

Un vecteur directeur d'une droite (D) est un vecteur non nul $\vec{u}$ qui possède la même direction que la droite (D)

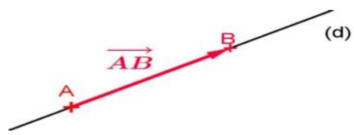


Remarques :

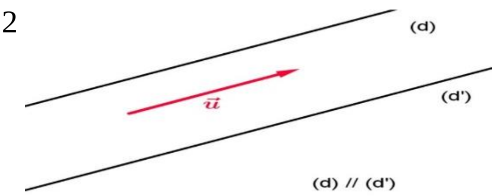
- Toute droite possède une infinité de vecteurs directeurs.
- si $\vec{u}$ est un vecteur directeur de la droite (D) alors tout vecteur non nul et colinéaire au vecteur $\vec{u}$ est aussi vecteur directeur de cette droite.



- Deux points distincts quelconques de la droite (D) définissent un vecteur directeur de cette droite



- . Deux droites (D), et (D') sont parallèles si tout vecteur directeur de l'une est aussi vecteur directeur de l'autre.



b. Propriété : Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul et A un point du plan .L'ensemble des points M du plan tq il existe $\alpha\in\mathbb{R}$ tq : $\overrightarrow{AM} = \alpha\vec{u}$ est la droite (D) de vecteur directeur $\vec{u}$ et passant par A qu'on note : $D(A;\vec{u})$

$$D(A;\vec{u}) = \{M\in P / \overrightarrow{AM} = \alpha\vec{u}\} \text{ avec } \alpha\in\mathbb{R}$$

C'est la Définition vectorielle d'une droite

2) Représentation paramétrique d'une droite :

Soit $\vec{u}(a;b)$ un vecteur non nul et $A(x_A;y_A)$ un point du plan

On a $M\in D(A;\vec{u})$ ssi il existe $\alpha\in\mathbb{R}$ tq : $\overrightarrow{AM} = \alpha\vec{u}$

On a $\overrightarrow{AM}(x-x_A;y-y_A)$ et $\alpha\vec{u}(\alpha a;\alpha b)$ donc

$\overrightarrow{AM} = \alpha\vec{u}$ ssi $\begin{cases} x-x_A = \alpha a \\ y-y_A = \alpha b \end{cases}$ ssi

$\begin{cases} x = \alpha a + x_A \\ y = \alpha b + y_A \end{cases}$ avec $\alpha\in\mathbb{R}$

Définition : Soit $\vec{u}(a;b)$ un vecteur non nul et $A(x_A;y_A)$ un point du plan et $t\in\mathbb{R}$

le système : $\begin{cases} x=ta+x_A \\ y=tb+y_A \end{cases}$ avec $t\in\mathbb{R}$ s'appelle une représentation paramétrique de la droite $D(A;\vec{u})$

Exemples :

Exemple 1 : Donner un point et un vecteur directeur de la la droite D de représentation paramétrique $\begin{cases} x=7t-1 \\ y=-4t+11 \end{cases}$ avec $t\in\mathbb{R}$

Réponse : on a $A(-1;11)\in D$ et $\vec{u}(7;-4)$ est un vecteur directeur de la la droite D

Exemple 2 :

Soit A(1 ; 2) et B(-3 ; 0)

1) Donner une représentation paramétrique de la droite (AB).

2) Déterminer si chacun des points suivants appartient ou non a la droite (AB) :

$C(0;2)$; $D(-1;1)$; $E(9;6)$

Réponse :1) $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de (AB), ses composantes sont : $\overrightarrow{AB}$ (-4, -2)

La représentation paramétrique de (AB) est donnée par le système :

① $\begin{cases} x=-4t+1 \\ y=-2t+2 \end{cases}$ avec $t\in\mathbb{R}$

2)on a $C(0;2)$ on remplace les coordonnées de C dans le système ①

Donc $\begin{cases} 0=-4t+1 \\ 2=-2t+2 \end{cases}$ on trouve $\begin{cases} t=\frac{1}{4} \\ t=0 \end{cases}$ or $\frac{1}{4}\neq 0$ donc $C\notin(AB)$

on a $D(-1;1)$ on remplace les coordonnées de D dans le système ①

Donc $\begin{cases} -1=-4t+1 \\ 1=-2t+2 \end{cases}$ on trouve $\begin{cases} t=\frac{1}{2} \\ t=\frac{1}{2} \end{cases}$ don $D\in(AB)$

on a $E(9;6)$ on remplace les coordonnées de E dans le système ①

Donc $\begin{cases} 9=-4t+1 \\ 6=-2t+2 \end{cases}$ on trouve $\begin{cases} t=-2 \\ t=-2 \end{cases}$ donc $E\in(AB)$

3) Equations cartésiennes d'une droite

Soit $\vec{u}(\alpha;\beta)$ un vecteur non nul et $A(x_A;y_A)$ un point du plan et soit $(D)=D(A;\vec{u})$

On a $M(x;y)\in(D)$ ssi $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires ssi $\det(\overrightarrow{AM};\vec{u})=0$ On a $\overrightarrow{AM}(x-x_A;y-y_A)$ et on a

$\begin{vmatrix} x-x_A & \alpha \\ y-y_A & \beta \end{vmatrix}=\beta(x-x_A)-\alpha(y-y_A)=\beta x-\beta x_A-\alpha y+\alpha y_A$

$=\beta x-\alpha y-\beta x_A+\alpha y_A$

on pose : $\beta=a$ et $-\alpha=b$ et $-\beta x_A+\alpha y_A=c$

alors : $M(x;y)\in(D)$ ssi $ax+by+c=0$

Définition : Toute droite (D) admet une équation cartésienne de la forme $ax+by+c=0$ avec $a\in\mathbb{R}$ et $b\in\mathbb{R}$ et $c\in\mathbb{R}$ et $a\neq 0$ ou $b\neq 0$

Remarque : Une droite (D) admet une infinité d'équations cartésiennes

En effet, si **ax + by + c = 0** est une équation cartésienne de (D), alors pour tout réel ***k*** non nul alors kax + kby + kc = ***0*** est une autre équation de la même droite.

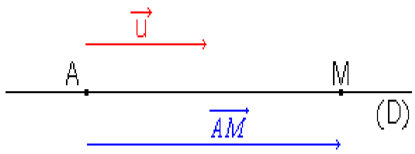
Propriété : Soient $a\in\mathbb{R}$ et $b\in\mathbb{R}$ et $c\in\mathbb{R}$ tel que $a\neq 0$ ou $b\neq 0$

L'ensemble des points M (x ; y) vérifiant l'équation : **ax + by + c =** 0 est une droite de vecteur directeur $\vec{u}(-b;a)$

Exemples :

Exemple 1 : Déterminer une équation cartésienne de la droite D) passant par le point A(1 ; -1) et de vecteur directeur $\vec{u}(-1;3)$

Réponse : Soit M un point de d de coordonnées : M (x ; y) Les vecteurs $\overrightarrow{AM}(x-1;y+1)$ et $\vec{u}(-1;3)$ sont colinéaires



si, et seulement si $\det(\overrightarrow{AM};\vec{u})=0$

Équivaut à : (x - 1) (**3**) - (y + 1) (**-1**) = 0 équivaut à :

3 x — 3+y + l = 0 équivaut à : **3 x + y —2 = 0**

Une équation cartésienne de la droite (D), est :

3 x + y —2 = 0

Exemple 2 : Déterminer une équation cartésienne de la droite (D), passant par les points A (5 ; 13) et B (10 ; 23).

Réponse : Les points A et B appartiennent à la droite (D), donc le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de cette droite.

On a $\overrightarrow{AB}(10-5;23-13)$ donc $\overrightarrow{AB}(5;10)$ en divisant les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ par 5, nous obtenons le vecteur $\vec{u}(1;2)$ est vecteur directeur aussi de la droite (D),

Donc b = 1 et a = -2 Une équation cartésienne de la droite d est donc

de la forme : — 2 x + y + c = 0 Comme le point A (**5** ; **13**) appartient à la droite (D), ses coordonnées vérifient l'équation : —2x5 + 1 3 + c = 0

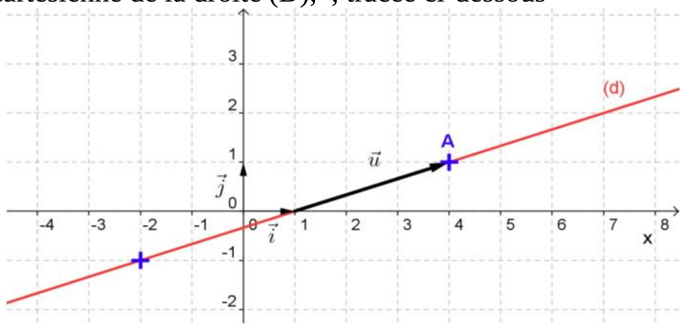
Donc — 10+ 13 + c = 0 D'où : c = — 3

Une équation cartésienne de la droite (D) est donc :

— 2 x + y — 3 = 0

Exemple 3 : Déterminer l'équation cartésienne d'une droite à partir de sa représentation graphique

Soit $(O;\vec{i};\vec{j})$ un repère du plan. Déterminer une équation cartésienne de la droite (D), , tracée ci-dessous



Réponse : *Méthode 1* : Le vecteur $\vec{u}$ est un vecteur directeur de la droite (D),

On lit graphiquement $\vec{u}(3;1)$ Donc a = -1 et b = 3

Une équation cartésienne de la droite d est de la forme :
- x + 3y + c = 0 Comme le point A (4 ; 1) appartient à la droite (D), ses coordonnées vérifient l'équation :
—4 + 3 + ***c*** = 0 donc : ***c*** = 1
Une équation cartésienne de la droite d est : **- x + 3** y + **1 = 0**
Méthode 2 : On prend deux points de la droite, par exemple : A (4 ; 1) et B (-2 ; -1) et on applique la même méthode qu'à l'exemple 2.

4) Equation réduite d'une droite

Soit (D) une droite d'équation cartésienne $ax+by+c=0$ donc $by=-ax-c$

Si $b\neq 0$ alors $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$

On pose : $m=-\frac{a}{b}$ et $p=-\frac{c}{b}$ alors $y=mx+p$

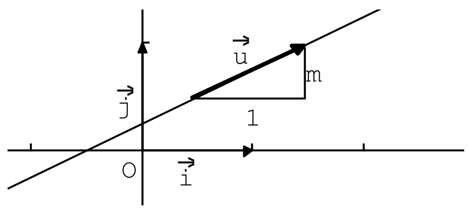
Si $b=0$ alors on a $ax+c=0$ donc $x=-\frac{c}{a}$ $(a\neq 0)$

dans ce cas (D) est parallèle à l'axe des ordonnées

Propriété : une droite n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées ssi son équation cartésienne s'écrit sous la forme :
y = mx + p ***avec*** $m\in\mathbb{R}$ ***et*** $p\in\mathbb{R}$

Définition : Soit (D) une droite non parallèle à l'axe des ordonnées.
L'équation : **y = mx + p** *s'appelle* L'équation réduite de (D)
- Le nombre *m s'appelle* le coefficient directeur de la droite
- Le nombre *p s'appelle* l'ordonnée a l'origine

Remarque :



- si *m est* le coefficient directeur de la droite alors un vecteur directeur de cette droite est $\vec{u}(1;m)$

- si $\vec{u}(-b;a)$ *est* un vecteur directeur de la droite (D) et $b\neq 0$ alors $m=-\frac{a}{b}$ est un coefficient directeur de la droite

Exemple : Soit (D) la droite d'équation cartésienne :
4x + 2 y + 3 = 0
- Son équation réduite est de la forme : y = -2x-3
- *-2 est* le coefficient directeur de la droite (D)
- Un vecteur directeur de cette droite est $\vec{u}(-2;4)$ ou $\vec{u}(1;-2)$

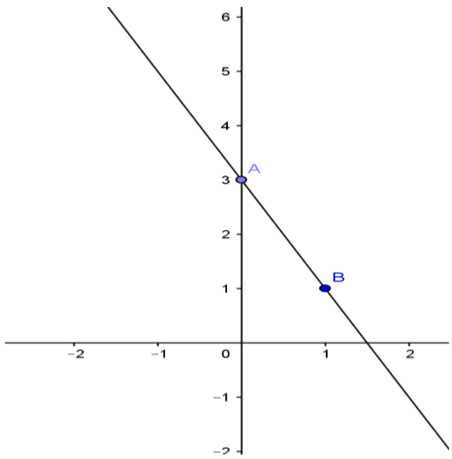
Remarque : si $A(x_A;y_A)$; $B(x_B;y_B)$ et $x_A\neq x_B$ alors

$m=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$ est coefficient directeur de la droite (AB)

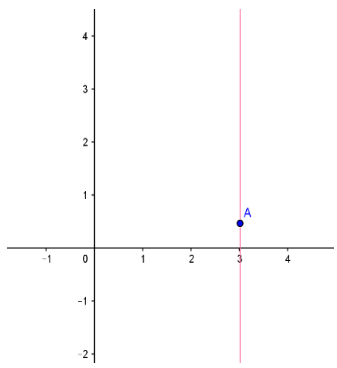
Exemple : Représenter graphiquemt les droites suivantes :
1) (D_1) *2x + y - 3 = 0* 2) (D_2) : *x = 3*
3) (D_2) : *y = 2*

Réponse :1)

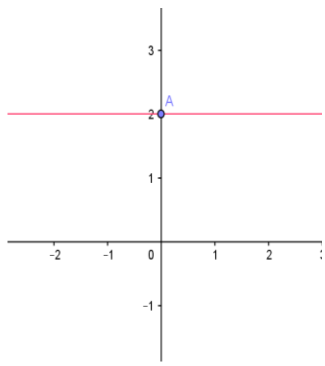
x	0	1
y	3	1



2)



3)



Iv)positions relatives de deux droites dans le plan

Propriété :
Deux droites (D) et (D'), d'équations respectives :
ax + by + c = 0 et *a'x + b 'y + c '* = 0
Sont parallèles si et seulement si : *a b ' - a'b* = 0
Démonstration :
$\vec{u}(-b;a)$ est un vecteur directeur de la la droite(D)
$\vec{u'}(-b';a')$ est un vecteur directeur de la la droite(D'),

(D) et (D') sont parallèles équivaut à $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ sont colinéaires ce qui équivaut à :
- b a' - a (- b') = 0 ce qui équivaut à : *a b' - a'b* = 0.

Remarque: 1) si (D) et (D') sont parallèles : on prend un point $A \in (D)$

- Si $A \in (D')$ alors $(D) = (D')$ (confondues)
- Si $A \notin (D')$ alors $(D) \parallel (D')$ strictement

2) si (D) et (D') sont sécantes alors le point d'intersection E (x ; y) vérifie le système : $\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$

Conséquence : Soit la droite (D) d'équation : $y = mx + p$ et (D') : $y' = m'x + p'$

(D) et (D') sont parallèles si et seulement si $m = m'$

En effet les vecteurs de coordonnées (1 ; m) et (1 ; m) sont deux vecteurs directeurs respectifs de (D) et (D')

D'où : ces vecteurs sont colinéaires si et seulement si $m = m'$

Application : Étudier la position relative des deux droites D) et (D') dans chaque cas suivant :

1) (D) $2x - 4y + 3 = 0$ $\qquad (D') : -x + 2y + 5 = 0$

2) (D) $2x + 5y - 2 = 0$ $\qquad (D') : x + 3y - 2 = 0$

Réponse : 1) on a : (D) $2x - 4y + 3 = 0$ donc $\vec{u}(4;2)$ est un vecteur directeur de (D)

Et on a : $(D') : -x + 2y + 5 = 0$ donc $\vec{v}(-2;-1)$ est un vecteur directeur de (D')

$\det(\vec{u};\vec{v}) = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -4 + 4 = 0$ Alors les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires donc (D) et (D') sont parallèles

Soit $A(x;y) \in (D)$ on prend $x = 0$ Alors :

$0 - 4y + 3 = 0$ donc $y = \frac{3}{4}$ donc $A\left(0;\frac{3}{4}\right) \in (D)$

On vérifie si $A\left(0;\frac{3}{4}\right) \in (D')$?

on a : $-0 + 2 \times \frac{3}{4} + 5 = \frac{3}{2} + 5 = \frac{13}{2} \neq 0$

donc $A\left(0;\frac{3}{4}\right) \notin (D')$ D'où : $(D) \parallel (D')$ strictement

2) on a : (D) $2x + 5y - 2 = 0$ donc $\vec{u}(-5;2)$ est un vecteur directeur de (D)

Et on a : $(D') : x + 3y - 2 = 0$ donc $\vec{v}(-3;1)$ est un vecteur directeur de (D')

$\det(\vec{u};\vec{v}) = \begin{vmatrix} -5 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -5 + 6 = 1 \neq 0$ Alors les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires donc (D) et (D') sont sécantes

On détermine le point d'intersection de (D) et (D')

Soit $E(x;y)$ ce point d'intersection de (D) et (D')

Alors $(x;y)$ vérifie le système :

$\begin{cases} 2x + 5y - 2 = 0 \\ x + 3y - 2 = 0 \end{cases}$ donc $\begin{cases} 2x + 5y = 2 \\ x + 3y = 2 \end{cases}$

donc $\begin{cases} 2x + 5y = 2 \\ x = 2 - 3y \end{cases}$

donc $\begin{cases} 2(2 - 3y) + 5y = 2 \\ x = 2 - 3y \end{cases}$ donc $\begin{cases} 4 - 6y + 5y = 2 \\ x = 2 - 3y \end{cases}$

donc $\begin{cases} 4 - y = 2 \\ x = 2 - 3y \end{cases}$ donc $\begin{cases} y = 2 \\ x = 2 - 3y \end{cases}$ donc $\begin{cases} y = 2 \\ x = -4 \end{cases}$ donc $E(-4;2)$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices

Que l'on devient un mathématicien