

La droite dans le plan

Leçon : droite dans le plan

Présentation globale

- I) Repère et coordonnées d'un point et coordonnées d'un vecteur
- II) Condition analytique de colinéarité de deux vecteurs
- III) La droite dans le plan
- IV) positions relatives de deux droites dans le plan

I) Repère et coordonnées d'un point et coordonnées d'un vecteur

Activité :

Soient O, I et J trois points non alignés dans le plan P.

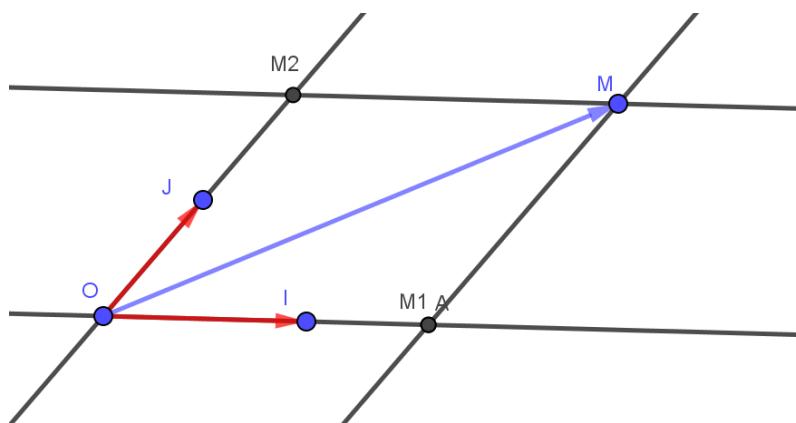
Et soit M un point quelconque du plan

- 1) Construire le point M_1 la projection de M sur (OI) parallèlement à (OJ) et le point M_2 la projection de M sur (OJ) parallèlement à (OI)
- 2) soit x l'abscisse de M_1 sur l'axe gradué (OI) et y l'abscisse de M_2 sur l'axe (OJ)

a) Ecrire $\overrightarrow{OM_1}$ en fonction de \overrightarrow{OI} et écrire $\overrightarrow{OM_2}$ en fonction de \overrightarrow{OJ}

b) En déduire \overrightarrow{OM} en fonction de \overrightarrow{OI} et \overrightarrow{OJ}

Réponse : 1)



$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{M_1M}$$

$$2) \text{ a : on a : } x \text{ l'abscisse de } M_1 \text{ sur l'axe gradué } (OI) \text{ donc } \overrightarrow{OM_1} = x\overrightarrow{OI}$$

$$\text{Et on a : } y \text{ l'abscisse de } M_2 \text{ sur l'axe } (OJ) \text{ donc } \overrightarrow{OM_2} = y\overrightarrow{OJ}$$

b) dans le quadrilatère OM_1MM_2 : $(OM_1) \parallel (MM_2)$ et $(OM_2) \parallel (MM_1)$

Donc OM_1MM_2 est un parallélogramme

Et par suite : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2}$ alors $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{OI} + y\overrightarrow{OJ}$

1) Le Repère dans le plan :

Soient O, I et J trois points non alignés dans le plan P.

Le triplet $(O; I; J)$ détermine un Repère dans le plan. On le note $R(O; I; J)$ ou R

Le point O est l'origine du Repère $(O; I; J)$

La droite (OI) est l'axe des abscisses du Repère $(O; I; J)$

La droite (OJ) est l'axe des ordonnées du Repère $(O; I; J)$

Si les droites (OI) et (OJ) sont perpendiculaires on dit que le Repère est orthogonal

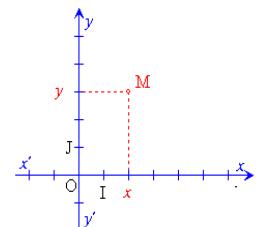
Si on a $OI = OJ = 1$ on dit que le Repère $(O; I; J)$ est normé

Si les droites (OI) et (OJ) sont perpendiculaires et si on a $OI = OJ = 1$

on dit que le Repère $(O; I; J)$ est orthonormé

On pose $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$ et $\overrightarrow{OJ} = \vec{j}$ on note alors le Repère $(O; I; J)$ par

$(O; \vec{i}, \vec{j})$



2) Les coordonnées d'un point :

Propriété et définition : Le plan est rapporté au Repère $(O; I; J)$

Pour tout point M du plan il existe un unique couple (x, y) tel que $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$

et $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{OI} + y\overrightarrow{OJ}$

Le couple (x, y) est le couple de coordonnée de M et on note : $M(x, y)$

x est l'abscisse du point M et y est l'ordonnée du point M

3) Les coordonnées d'un vecteur :

définition : Le plan est rapporté au Repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$

Le couple de coordonnée d'un vecteur \vec{u} est le couple de coordonnée du point M tel que

$\overrightarrow{OM} = \vec{u}$ et on note : $\vec{u}(x, y)$ ou $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Application : Le plan est rapporté au Repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ Construire

les points $A(-4; 2)$; $B(-2; 3)$;

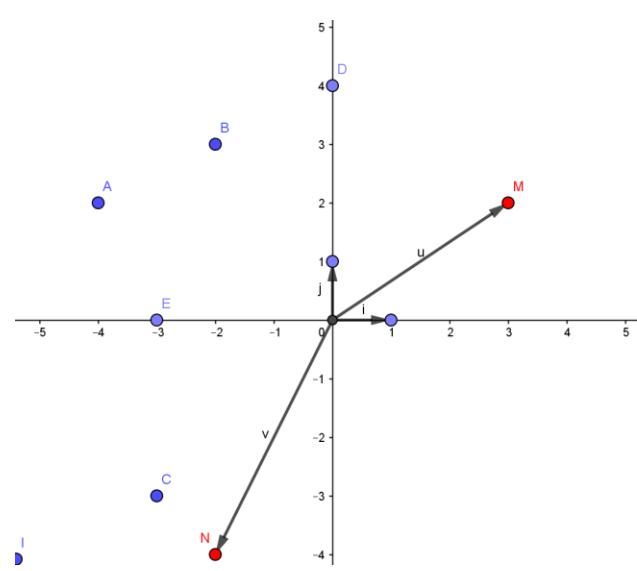
$C(-3; 3)$; $E(0; 4)$; $F(-3; 0)$ et les

vecteurs $\vec{u}(3; 2)$; $\vec{v}(-2; -4)$

Réponse : soit M tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$ donc

$M(3; 2)$ et soit N tel que $\overrightarrow{ON} = \vec{v}$ donc

$N(-2; -4)$



Propriétés : Le plan est rapporté au

Repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$

Soient $A(x_A; y_A)$; $B(x_B; y_B)$; $I(x_I; y_I)$ trois points dans le plan et $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{v}(x'; y')$ deux vecteurs

$$\overrightarrow{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A) \text{ et } AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Le milieu I du segment $[AB]$ a pour coordonnées $I\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right)$

$$\vec{u}(x; y) = \vec{v}(x'; y') \text{ ssi } x' = x \text{ et } y = y'$$

$$\vec{u} + \vec{v}(x + x'; y + y') \text{ et } \vec{u} - \vec{v}(x - x'; y - y')$$

$$\vec{u} + \vec{v} = (x + x')\vec{i} + (y + y')\vec{j}$$

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ $\alpha \cdot \vec{u}(\alpha x; \alpha y)$

Application : Le plan est rapporté au Repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ et soient $A(1; 2)$; $B(-5; 4)$

1. Déterminer les coordonnées de I le milieu du segment $[AB]$ et calculer $AB = \|\overrightarrow{AB}\|$
2. Déterminer les coordonnées du point C tel que $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$
3. Quelle est la nature du quadrilatère $OACB$
4. Déterminer les coordonnées du vecteur \vec{u} tel que $\vec{u} = \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{IC}$

Réponse : 1) Le milieu I du segment $[AB]$ a pour coordonnées $I\left(\frac{x_B + x_A}{2}; \frac{y_B + y_A}{2}\right)$

$$\text{Donc : } I\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right) \text{ donc } I\left(\frac{1 + (-5)}{2}; \frac{2 + 4}{2}\right) \text{ donc } I(-2; 3)$$

$$AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(-5 - 1)^2 + (4 - 2)^2} = \sqrt{36 + 4} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$$

2) on a $A(1; 2)$; $B(-5; 4)$; $O(0; 0)$ donc $\overrightarrow{OA}(x_A - x_O; y_A - y_O)$ donc $\overrightarrow{OA}(1 - 0; 2 - 0)$ donc $\overrightarrow{OA}(1; 2)$

$$\overrightarrow{OB}(x_B - x_O; y_B - y_O) \text{ donc } \overrightarrow{OB}(-5 - 0; 4 - 0) \text{ donc } \overrightarrow{OB}(-5; 4)$$

$$\text{on a } \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} \text{ donc } \overrightarrow{OC}(1 + (-5); 2 + 4) \text{ donc } \overrightarrow{OC}(-4; 6) \text{ donc } C(-4; 6)$$

3) on a $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$ donc $OACB$ est un parallélogramme

On vérifie : on a $\overrightarrow{OA}(1; 2)$ ①

Et $\overrightarrow{BC}(-4 + 5; 6 - 4)$ c a d $\overrightarrow{BC}(1; 2)$ ②

De ① et ② on a donc $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BC}$ donc $OACB$ est un parallélogramme

4) on a $\vec{u} = \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{IC}$ et $\overrightarrow{OA}(1; 2)$ et $2\overrightarrow{OB}(-10; 8)$

$$\overrightarrow{IC}(-4 + 2; 6 - 3) \text{ donc } \overrightarrow{IC}(-2; 3)$$

$$\text{on a } \vec{u} = \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{IC} \text{ donc } \vec{u}(1 - 10 + 2; 1 + 8 + 3) \text{ donc } \vec{u}(-11; 13)$$

II) Condition analytique de colinéarité de deux vecteurs

Dans la suite de ce cours le plan est rapporté au Repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$

Soient $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{v}(x'; y')$ deux vecteurs

\vec{u} et \vec{v} sont colinéaires ssi il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{u} = \alpha \cdot \vec{v}$

On a $\vec{u}(x; y)$ et $\alpha \cdot \vec{v}(\alpha x'; \alpha y')$

On a $\vec{u} = \alpha \cdot \vec{v}$ donc $x = \alpha x'$ et $y = \alpha y'$

Si $x' \neq 0$ et $y' \neq 0$ alors $\alpha = \frac{x}{x'}$ et $\alpha = \frac{y}{y'}$

donc $\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'}$ alors $xy' = x'y$ finalement on a : $xy' - x'y = 0$

Si $x' = 0$ alors $x = 0$ la condition est juste

Si $y' = 0$ alors $y = 0$ la condition est juste

1) Le déterminant de deux vecteurs :

Définition : Soient $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{v}(x'; y')$ deux vecteurs

On appelle le déterminant de deux vecteurs $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{v}(x'; y')$ le réel : $xy' - x'y$

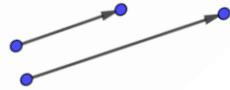
Et on le note : $\det(\vec{u}; \vec{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - x'y$

Exemple : $\vec{u}(-2; 3)$ et $\vec{v}(4; 5)$

$$\det(\vec{u}; \vec{v}) = \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = (-2) \times 5 - 3 \times 4 = -10 - 12 = -22$$

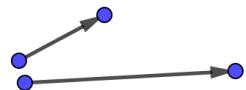
2) Propriété :

Deux vecteurs $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{v}(x'; y')$ sont colinéaires ssi $\det(\vec{u}; \vec{v}) = 0$



Deux vecteurs $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{v}(x'; y')$ sont non colinéaires ssi

$$\det(\vec{u}; \vec{v}) \neq 0$$



Remarque :

Trois points A, B et C sont alignés ssi les vecteurs \vec{AB} et \vec{AC} sont colinéaires

$$\text{Ssi } \det(\vec{AB}; \vec{AC}) = 0$$

Exemple : 1) $\vec{u}(1; 2)$ et $\vec{v}(-3; 1)$

$$\det(\vec{u}; \vec{v}) = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \times 1 - (-3) \times 2 = 1 + 6 = 7 \neq 0 \text{ donc } \vec{u}(1; 2) \text{ et } \vec{v}(-3; 1) \text{ sont non colinéaires}$$

2) $\vec{u}(-6; 4)$ et $\vec{v}(3; -2)$

$$\det(\vec{u}; \vec{v}) = \begin{vmatrix} -6 & 3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = (-6) \times (-2) - 3 \times 4 = 12 - 12 = 0 \text{ Donc } \vec{u}(-6; 4) \text{ et } \vec{v}(3; -2) \text{ sont colinéaires}$$

Application : Le plan est rapporté au Repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$

Soit m un paramètre réel

Discuter suivant les valeurs de m la colinéarité de \vec{u} et \vec{v} dans chaque cas :

1) $\vec{u}(3; 2m+1)$ et $\vec{v}(2; m)$

2) $\vec{u}(m; 1)$ et $\vec{v}(1; m)$

Réponse :1) on a : $\det(\vec{u}; \vec{v}) = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2m+1 & m \end{vmatrix} = 3m - 2(2m+1) = 3m - 4m - 2 = -m - 2$

$$\det(\vec{u}; \vec{v}) = 0 \text{ ssi } -m - 2 = 0 \text{ ssi } m = -2$$

Si $m = -2$ alors $\det(\vec{u}; \vec{v}) = 0$ donc les vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires

Si $m \neq -2$ alors $\det(\vec{u}; \vec{v}) \neq 0$ donc les vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont non colinéaires

2) on a : $\det(\vec{u}; \vec{v}) = \begin{vmatrix} m & 1 \\ 1 & m \end{vmatrix} = m^2 - 1 = m^2 - 1^2 = (m+1)(m-1)$

$$\det(\vec{u}; \vec{v}) = 0 \text{ ssi } (m+1)(m-1) = 0 \text{ ssi } m = -1 \text{ ou } m = 1$$

Si $m = 1$ alors $\det(\vec{u}; \vec{v}) = 0$ donc les vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires

Si $m = -1$ alors $\det(\vec{u}; \vec{v}) = 0$ donc les vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires

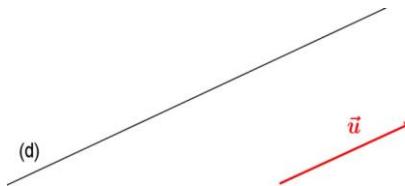
Si $m \neq 1$ et $m \neq -1$ alors $\det(\vec{u}; \vec{v}) \neq 0$ donc les vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont non colinéaires

III) La droite dans le plan

1) Définition vectorielle d'une droite :

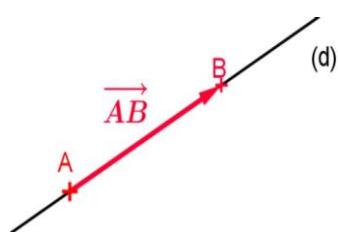
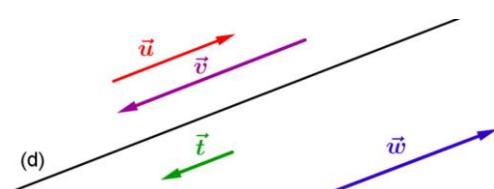
a. Vecteur directeur d'une droite :

Un vecteur directeur d'une droite (D) est un vecteur non nul u qui possède la même direction que la droite (D)

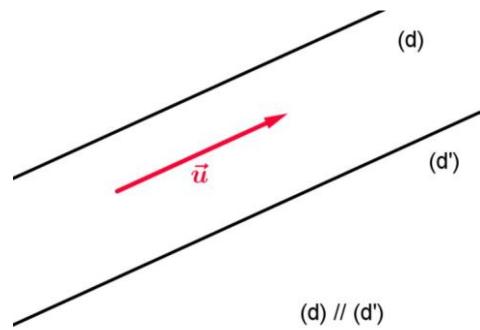


Remarques :

- Toute droite possède une infinité de vecteurs directeurs.
- si \vec{u} est un vecteur directeur de la droite (D) alors tout vecteur non nul et colinéaire au vecteur \vec{u} est aussi vecteur directeur de cette droite.
- Deux points distincts quelconques de la droite (D) définissent un vecteur directeur de cette droite.



- Deux droites (D), et (D') sont parallèles si tout vecteur directeur de l'une est aussi vecteur directeur de l'autre.



b. Propriété :

Soit \vec{u} un vecteur non nul et A un point du plan

L'ensemble des points M du plan tq il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tq : $\overrightarrow{AM} = \alpha \vec{u}$ est la droite (D) de vecteur directeur \vec{u} et passant par A qu'on note : $D(A; \vec{u})$

$$D(A; \vec{u}) = \{M \in P / \overrightarrow{AM} = \alpha \vec{u}\} \text{ avec } \alpha \in \mathbb{R}$$

C'est la Définition vectorielle d'une droite

2) Représentation paramétrique d'une droite :

Soit $\vec{u}(a; b)$ un vecteur non nul et $A(x_A; y_A)$ un point du plan

On a $M \in D(A; \vec{u})$ ssi il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tq : $\overrightarrow{AM} = \alpha \vec{u}$

On a $\overrightarrow{AM}(x - x_A; y - y_A)$ et $\alpha \vec{u}(\alpha a; \alpha b)$ donc

$$\overrightarrow{AM} = \alpha \vec{u} \text{ ssi } \begin{cases} x - x_A = \alpha a \\ y - y_A = \alpha b \end{cases} \text{ ssi } \begin{cases} x = \alpha a + x_A \\ y = \alpha b + y_A \end{cases} \text{ avec } \alpha \in \mathbb{R}$$

Définition : Soit $\vec{u}(a; b)$ un vecteur non nul et $A(x_A; y_A)$ un point du plan et $t \in \mathbb{R}$

le système : $\begin{cases} x = ta + x_A \\ y = tb + y_A \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$ s'appelle une représentation paramétrique de la

droite $D(A; \vec{u})$

Exemples :

Exemple 1 : Donner un point et un vecteur directeur de la la droite D de représentation

paramétrique $\begin{cases} x = 7t - 1 \\ y = -4t + 11 \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$

Réponse : on a $A(-1; 11) \in D$ et $\vec{u}(7; -4)$ est un vecteur directeur de la la droite D

Exemple 2 :

Soient A(1 ; 2) et B(-3 ; 0)

1) Donner une représentation paramétrique de la droite (AB).

2) Déterminer si chacun des points suivants appartient ou non a la droite (AB) :

$C(0; 2)$; $D(-1; 1)$; $E(9; 6)$

Réponse :1) \vec{AB} est un vecteur directeur de (AB), ses composantes sont : $\vec{AB} (-4, -2)$

La représentation paramétrique de (AB) est donnée par le système :

$$\textcircled{1} \begin{cases} x = -4t + 1 \\ y = -2t + 2 \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}$$

2) on a $C(0; 2)$ on remplace les coordonnées de C dans le système $\textcircled{1}$

$$\text{Donc } \begin{cases} 0 = -4t + 1 \\ 2 = -2t + 2 \end{cases} \text{ on trouve } \begin{cases} t = \frac{1}{4} \\ t = 0 \end{cases} \text{ or } \frac{1}{4} \neq 0 \text{ don } C \notin (AB)$$

on a $D(-1; 1)$ on remplace les coordonnées de D dans le système $\textcircled{1}$

$$\text{Donc } \begin{cases} -1 = -4t + 1 \\ 1 = -2t + 2 \end{cases} \text{ on trouve } \begin{cases} t = \frac{1}{2} \\ t = \frac{1}{2} \end{cases} \text{ don } D \in (AB)$$

on a $E(9; 6)$ on remplace les coordonnées de E dans le système $\textcircled{1}$

$$\text{Donc } \begin{cases} 9 = -4t + 1 \\ 6 = -2t + 2 \end{cases} \text{ on trouve } \begin{cases} t = -2 \\ t = -2 \end{cases} \text{ donc } E \notin (AB)$$

3) Equations cartésiennes d'une droite

Soit $\vec{u}(\alpha; \beta)$ un vecteur non nul et $A(x_A; y_A)$ un point du

plan et soit $(D) = D(A; \vec{u})$

On a $M(x; y) \in (D)$ ssi \overrightarrow{AM} et \vec{u} sont colinéaires

ssi $\det(\overrightarrow{AM}; \vec{u}) = 0$ On a $\overrightarrow{AM}(x - x_A; y - y_A)$

et on a $\begin{vmatrix} x - x_A & \alpha \\ y - y_A & \beta \end{vmatrix} = \beta(x - x_A) - \alpha(y - y_A) = \beta x - \beta x_A - \alpha y + \alpha y_A = \beta x - \alpha y - \beta x_A + \alpha y_A$

on pose : $\beta = a$ et $-\alpha = b$ et $-\beta x_A + \alpha y_A = c$ alors :

$M(x; y) \in (D)$ ssi $ax + by + c = 0$

Définition :

Toute droite (D) admet une équation cartésienne de la forme $ax + by + c = 0$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$ ou $b \neq 0$

Remarque : Une droite (D) admet une infinité d'équations cartésiennes

En effet, si $ax + by + c = 0$ est une équation cartésienne de (D), alors pour tout réel k non nul alors $kax + kby + kc = 0$ est une autre équation de la même droite.

Propriété : Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$ tel que $a \neq 0$ ou $b \neq 0$

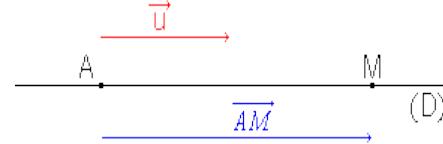
L'ensemble des points $M(x; y)$ vérifiant l'équation : $ax + by + c = 0$ est une droite de vecteur directeur $\vec{u}(-b; a)$

Exemples :

Exemple 1 : Déterminer une équation cartésienne de la droite D) passant par le point

$A(1; -1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(-1; 3)$

Réponse : Soit M un point de d de coordonnées : $M(x; y)$



Les vecteurs $\overrightarrow{AM}(x-1; y+1)$ et $\vec{u}(-1; 3)$ sont colinéaires si, et seulement si $\det(\overrightarrow{AM}; \vec{u}) = 0$

équivaut à : $(x - 1)(3) - (y + 1)(-1) = 0$ équivaut à : $3x - 3 + y + 1 = 0$ équivaut à : $3x + y - 2 = 0$

Une équation cartésienne de la droite (D), est : $3x + y - 2 = 0$

Exemple 2 : Déterminer une équation cartésienne de la droite (D), passant par les points A (5 ; 13) et B (10; 23).

Réponse : Les points A et B appartiennent à la droite (D), donc le vecteur \overrightarrow{AB} est un vecteur directeur de cette droite.

On a $\overrightarrow{AB}(10-5; 23-13)$ donc $\overrightarrow{AB}(5; 10)$ en divisant les coordonnées du vecteur \overrightarrow{AB} par 5, nous obtenons le vecteur $\vec{u}(1; 2)$ est vecteur directeur aussi de la droite (D),

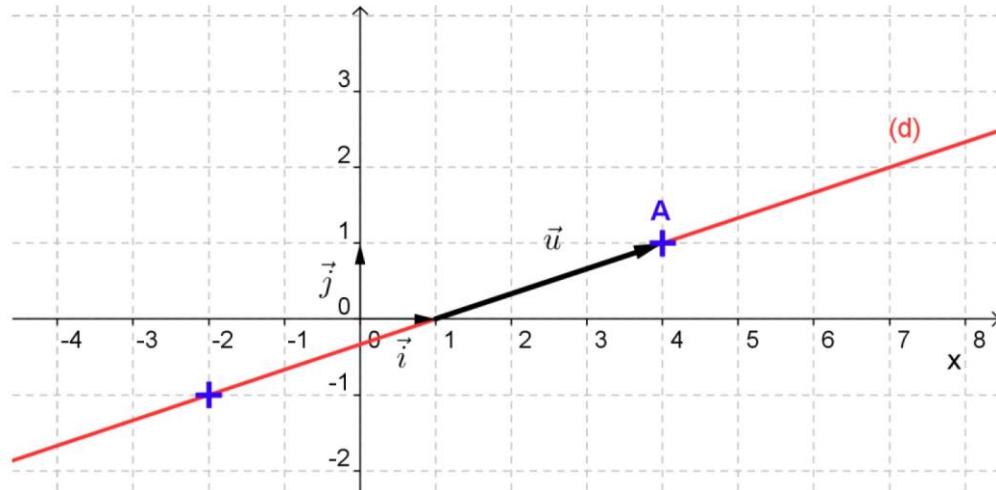
Donc $b = 1$ et $a = -2$ Une équation cartésienne de la droite d est donc

de la forme : $-2x + y + c = 0$ Comme le point A (5 ; 13) appartient à la droite (D), ses coordonnées vérifient l'équation : $-2 \cdot 5 + 13 + c = 0$ donc $-10 + 13 + c = 0$ D'où : $c = -3$

Une équation cartésienne de la droite (D), est donc : $-2x + y - 3 = 0$

Exemple 3 : Déterminer l'équation cartésienne d'une droite à partir de sa représentation graphique

Soit $(O; \vec{i}; \vec{j})$ un repère du plan. Déterminer une équation cartésienne de la droite (D), , tracée ci-dessous



Réponse :

Méthode 1 : Le vecteur \vec{u} est un vecteur directeur de la droite (D),

On lit graphiquement $\vec{u}(3; 1)$ Donc $a = -1$ et $b = 3$

Une équation cartésienne de la droite d est de la forme :

$-x + 3y + c = 0$ Comme le point A (4 ; 1) appartient à la droite (D), ses coordonnées vérifient l'équation : $-4 + 3 + c = 0$ $c = 1$

Une équation cartésienne de la droite d est : $-x + 3y + 1 = 0$

Méthode 2 : On prend deux points de la droite, par exemple : A (4 ; 1) et B (-2 ; -1) et on applique la même méthode qu'à l'exemple 2.

4) Equation réduite d'une droite

Soit (D) une droite d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ donc $by = -ax - c$

Si $b \neq 0$ alors $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$

On pose : $m = -\frac{a}{b}$ et $p = -\frac{c}{b}$ alors $y = mx + p$

Si $b = 0$ alors on a $ax + c = 0$ donc $x = -\frac{c}{a}$ ($a \neq 0$) dans ce cas (D) est parallèle à l'axe des ordonnées

Propriété : une droite n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées si son équation cartésienne s'écrit sous la forme : $y = mx + p$ avec $m \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{R}$

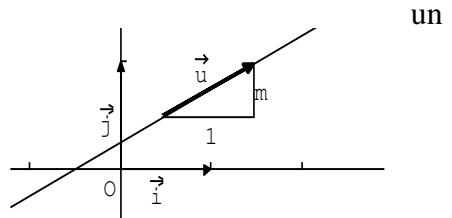
Définition : Soit (D) une droite non parallèle à l'axe des ordonnées.

L'équation: $y = mx + p$ s'appelle L'équation réduite de (D)

- le nombre m s'appelle le coefficient directeur de la droite
- le nombre p s'appelle l'ordonnée à l'origine

Remarque :

- si m est le coefficient directeur de la droite alors vecteur directeur de cette droite est $\vec{u}(1; m)$
- si $\vec{u}(-b; a)$ est un vecteur directeur de la droite (D) et $b \neq 0$ alors $m = -\frac{a}{b}$ est un coefficient directeur de la droite



Exemple: Soit (D) la droite d'équation cartésienne: $4x + 2y + 3 = 0$

- Son équation réduite est de la forme: $y = -2x - 3$
- -2 est le coefficient directeur de la droite (D)
- Un vecteur directeur de cette droite est $\vec{u}(-2; 4)$ ou $\vec{u}(1; -2)$

Récapitulatif : Equations cartésiennes et équations réduites

	Cas où $b = 0$ et $a \neq 0$	Cas où $a = 0$ et $b \neq 0$	Cas où $c = 0$ et $a \neq 0$ et $b \neq 0$	Cas où $c \neq 0$ et $a \neq 0$ et $b \neq 0$
Equation cartésienne	$ax + 0 + c = 0$ $ax + c = 0$	$0 + by + c = 0$ $by + c = 0$	$ax + by + 0 = 0$ $ax + by = 0$	$ax + by + c = 0$
Equation réduite	$x = -\frac{c}{a}$	$y = -\frac{c}{b}$	$y = -\frac{a}{b}x$	$y = -\frac{a}{b}x + \frac{-c}{b}$
Représentation graphique				

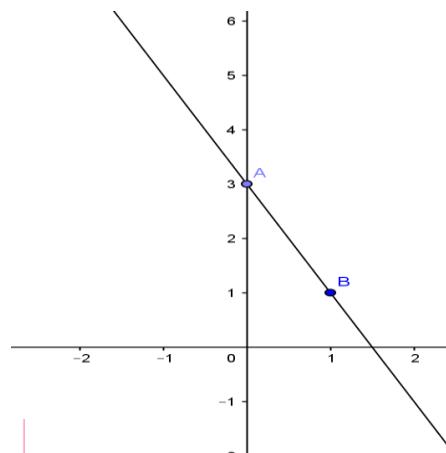
Remarque : si $A(x_A; y_A)$; $B(x_B; y_B)$ et $x_A \neq x_B$ alors $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ est coefficient directeur de la droite (AB)

Exemple: Représenter graphiquement les droites suivantes :

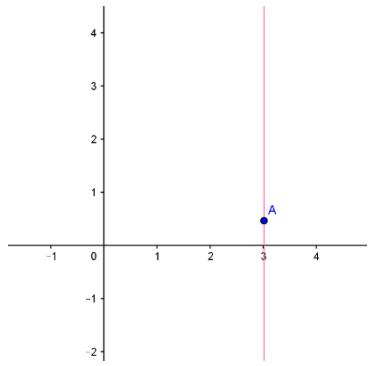
1) (D_1) $2x + y - 3 = 0$ 2) (D_2) : $x = 3$ 3) (D_3) : $y = 2$

Réponse :1)

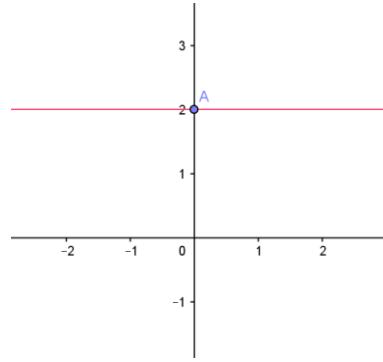
x	0	1
y	3	1



2)



3)



الأستاذ : عثمانى نجيب

IV) positions relatives de deux droites dans le plan

Propriété :

Deux droites (D) et (D') , d'équations respectives $ax + by + c = 0$ et $a'x + b'y + c' = 0$ sont parallèles si et seulement si : $a'b' - a'b = 0$

Démonstration :

$\vec{u}(-b; a)$ est un vecteur directeur de la droite (D)

$\vec{u}'(-b'; a')$ est un vecteur directeur de la droite (D') ,

(D) et (D') sont parallèles équivaut à \vec{u} et \vec{u}' sont colinéaires ce qui équivaut à :

$-b'a' - a(-b') = 0$ ce qui équivaut à : $a'b' - a'b = 0$.

Remarque: 1) si (D) et (D') sont parallèles : on prend un point $A \in (D)$

- Si $A \in (D')$ alors $(D) = (D')$ (confondues)
- Si $A \notin (D')$ alors $(D) \parallel (D')$ strictement

2) si (D) et (D') sont sécantes alors le point d'intersection $E(x; y)$ vérifie le système :

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$$

Conséquence : Soit la droite (D) d'équation : $y = mx + p$ et $(D') : y' = m'x + p'$

(D) et (D') sont parallèles si et seulement si $m = m'$

En effet les vecteurs de coordonnées $(1; m)$ et $(1; m')$ sont deux vecteurs directeurs respectifs de (D) et (D')

D'où : ces vecteurs sont colinéaires si et seulement si $m = m'$

Application :

Étudier la position relative des deux droites (D) et (D') dans chaque cas suivant :

1) $(D) : 2x - 4y + 3 = 0$ $(D') : -x + 2y + 5 = 0$

2) $(D) : 2x + 5y - 2 = 0$ $(D') : x + 3y - 2 = 0$

Réponse : 1) on a : $(D) : 2x - 4y + 3 = 0$ donc $\vec{u}(4; 2)$ est un vecteur directeur de (D)

Et on a : $(D') : -x + 2y + 5 = 0$ donc $\vec{v}(-2; 1)$ est un vecteur directeur de (D')

$$\det(\vec{u}; \vec{v}) = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -4 + 4 = 0 \quad \text{Alors les vecteurs } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires donc } (D) \parallel (D')$$

sont parallèles

Soit $A(x; y) \in (D)$ on prend $x = 0$ Alors $0 - 4y + 3 = 0$ donc $y = \frac{3}{4}$ donc $A\left(0; \frac{3}{4}\right) \in (D)$

On vérifie si $A\left(0; \frac{3}{4}\right) \in (D')$?

on a : $-0 + 2 \times \frac{3}{4} + 5 = \frac{3}{2} + 5 = \frac{13}{2} \neq 0$ donc $A\left(0; \frac{3}{4}\right) \notin (D')$ D'où : $(D) \parallel (D')$ strictement

2) on a : $(D) : 2x + 5y - 2 = 0$ donc $\vec{u}(-5; 2)$ est un vecteur directeur de (D)

Et on a : $(D') : x + 3y - 2 = 0$ donc $\vec{v}(-3; 1)$ est un vecteur directeur de (D')

$$\det(\vec{u}; \vec{v}) = \begin{vmatrix} -5 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -5 + 6 = 1 \neq 0 \quad \text{Alors les vecteurs } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont non colinéaires donc (D)}$$

et (D') sont sécantes

On détermine le point d'intersection de (D) et (D')

Soit $E(x; y)$ ce point d'intersection de (D) et (D') Alors $(x; y)$ vérifie le système :

$$\begin{cases} 2x + 5y - 2 = 0 \\ x + 3y - 2 = 0 \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} 2x + 5y = 2 \\ x + 3y = 2 \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} 2x + 5y = 2 \\ x = 2 - 3y \end{cases}$$

$$\text{donc} \quad \begin{cases} 2(2 - 3y) + 5y = 2 \\ x = 2 - 3y \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} 4 - 6y + 5y = 2 \\ x = 2 - 3y \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} 4 - y = 2 \\ x = 2 - 3y \end{cases}$$

$$\text{donc} \quad \begin{cases} y = 2 \\ x = 2 - 3y \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} y = 2 \\ x = -4 \end{cases} \quad \text{donc} \quad E(-4; 2)$$