



I. Base d'un plan (P) – repère d'un plan (P) – coordonnées d'un point du plan (P) .

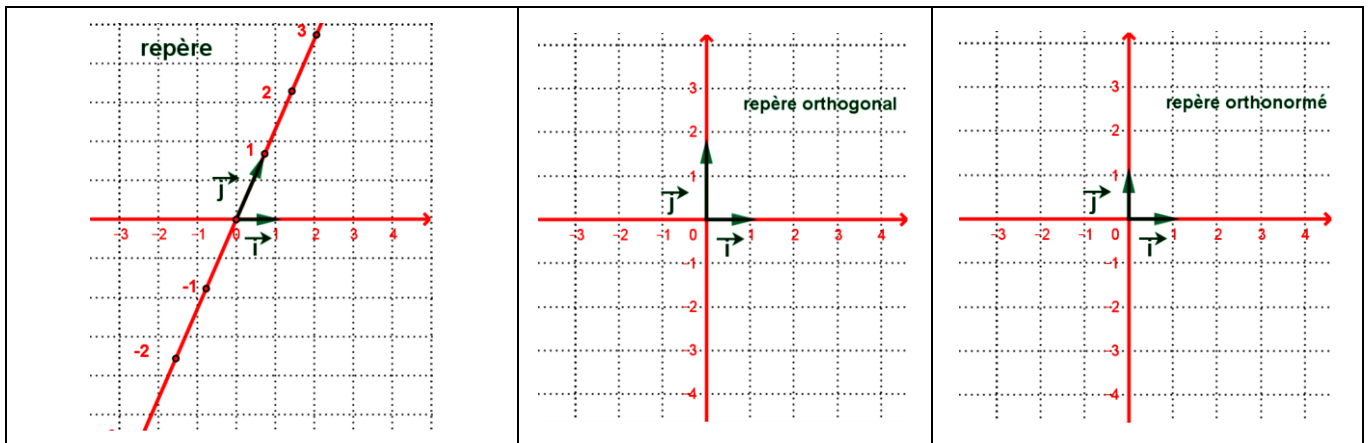
A. Base du plan - repère du plan :

a. Définition :

\vec{i} et \vec{j} deux vecteurs non colinéaires du plan (P) .

- Le couple (\vec{i}, \vec{j}) est appelé base du plan (P) ; on dit que le plan (P) est rapporté à la base (\vec{i}, \vec{j}) .
(ou le plan est muni de la base (\vec{i}, \vec{j}) .
- Si on prend un point quelconque de (P) ; le triplet (O, i, j) est appelé repère du plan (P) .
on dit que le plan (P) est rapporté au repère (O, i, j) . (ou le plan est muni au repère (O, i, j) .
- O et I et J trois points non alignés de (P) , le couple (\vec{OI}, \vec{OJ}) est une base de (P) ; le triplet (O, \vec{OI}, \vec{OJ}) est un repère de (P) .
- En général on pose $\vec{OI} = \vec{i}$ et $\vec{OJ} = \vec{j}$ on aura (O, i, j) repère du plan (P) .
- Si $(\vec{OJ}) \perp (\vec{OI})$ la base (\vec{i}, \vec{j}) est appelée base orthogonale et le repère (O, i, j) est appelé repère orthogonal .
- Si $\|\vec{j}\| = \|\vec{i}\| = 1$ la base (\vec{i}, \vec{j}) est appelée base normée et le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) est appelé repère normé .
- Si $(\vec{OJ}) \perp (\vec{OI})$ et $\|\vec{j}\| = \|\vec{i}\| = 1$ la base (\vec{i}, \vec{j}) est appelé base orthonormée et le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) est appelé repère orthonormé .

b. Exemples :



B. Coordonnées d' un point du plan (P) :

a. Activité :

Le plan (P) est rapporté au repère (O, i, j) . On considère :

- La droite $(D_x) = (OI)$ tel que : $\vec{OI} = \vec{i}$.



- La droite $(D_y) = (OJ)$ tel que : $\vec{OJ} = \vec{j}$.
- M est un point du plan (P) .
- M_x est la projection de M sur la droite (D_x) parallèlement à (D_y) .
- M_y est la projection de M sur la droite (D_y) parallèlement à (D_x) .

1. Ecrire le vecteur \vec{OM}_x en fonction de \vec{i} ou \vec{OI} .(on utilise le réel x)

2. Ecrire le vecteur \vec{OM}_y en fonction de \vec{j} ou \vec{OJ} .(on utilise le réel y)

3. Ecrire le vecteur \vec{OM} en fonction de \vec{i} et \vec{j} (ou bien \vec{OI} ou \vec{OJ}) .

b. Définition et théorème :

Le plan (P) est rapporté au repère (O, i, j) .

Pour tout point M du plan (P) , il existe un et un seul couple $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ tel que : $\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

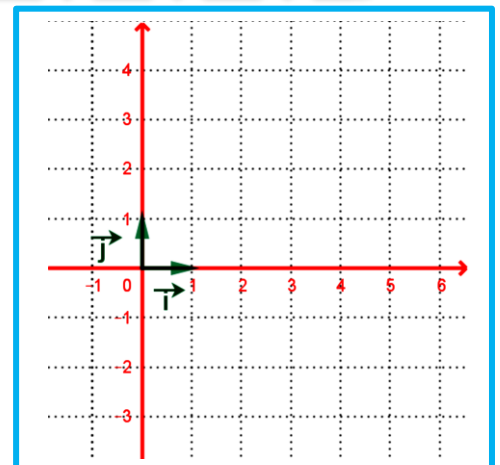
- Le couple (x, y) est appelé couple des coordonnées du point M par rapport au repère (O, i, j) .
- On note $\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$: par $M(x, y)$ ou $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$; d'où : $M(x, y)$ équivaut à $\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$
- Le nombre x est appelé **abscisse** du point M .
- Le nombre y est appelé **ordonnée** du point M .
- La droite $(D_x) = (OI)$ est appelée **axe des abscisses**.
- La droite $(D_y) = (OJ)$ est appelée **axe des ordonnées**.
- Pour tout vecteur \vec{u} du plan (P) il existe un point unique de (P) tel que $\vec{u} = \vec{OM}$ (\vec{OM} est le représentant d'origine O) d'où les coordonnées du point sont aussi les coordonnées de \vec{u} par suite si $M(x, y)$ et $\vec{u} = \vec{OM}$ alors $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ou $\vec{u}(x, y)$.
- L'écriture $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ signifie $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$.
- $x\vec{i} + y\vec{j} = x'\vec{i} + y'\vec{j}$ équivaut à $x = x'$ et $y = y'$

C. Coordonnées de la somme de deux vecteurs -

Coordonnées du produit d'un vecteur par un réel :

a. Activité :

1. Construire les vecteurs $\vec{v}(1, -2)$ et $\vec{u}(2, 3)$ à partir de O .
2. Construire le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ puis déterminer graphiquement les coordonnées du vecteur $\vec{u} + \vec{v}$.
3. Construire le vecteur $2\vec{u}$ puis déterminer graphiquement les coordonnées du vecteur $2\vec{u}$.
4. Donner la propriété.



**b. Propriété :**

Le plan (P) est rapporté au repère (O, i, j).

- $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont deux vecteurs de (P).
- $B(x_B, y_B)$ et $A(x_A, y_A)$ et $I(x_I, y_I)$ sont des points de (P).
- $\alpha \in \mathbb{R}$, On a :
 - ❖ Le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \end{pmatrix}$ on note : $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = (\vec{u} + \vec{v})\begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \end{pmatrix}$.
 - ❖ Le vecteur $\alpha \vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} \alpha x \\ \alpha y \end{pmatrix}$ on note : $\alpha \vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (\alpha \vec{u})\begin{pmatrix} \alpha x \\ \alpha y \end{pmatrix} = \alpha \vec{u}\begin{pmatrix} \alpha x \\ \alpha y \end{pmatrix}$.
 - ❖ Le vecteur \overrightarrow{AB} a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$ on note :

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} \text{ ou } \overrightarrow{AB}(x_B - x_A, y_B - y_A).$$
 - ❖ $I(x_I, y_I)$ est le milieu du segment [A, B] on a : $x_I = \frac{x_A + x_B}{2}$ et $y_I = \frac{y_A + y_B}{2}$.

c. Exemple :

1. donner les coordonnées de \overrightarrow{AB} sachant que I B(1,2) et A(3,4).
2. donner les coordonnées de $-5\overrightarrow{AB} + 3\vec{u}$ sachant que $\vec{u}(2,0)$
3. Donner les coordonnées de $I(x_I, y_I)$ tel que $I(x_I, y_I)$ est le milieu du segment [A, B].

II. Déterminant de deux vecteurs – condition de colinéarité de deux vecteurs :**A. Déterminant de deux vecteurs :****a. Définition :**

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux vecteurs du plan (P) qui est rapporté au repère (O, i, j).

- Le nombre $xy' - x'y$ est appelé le déterminant des vecteurs \vec{u} et \vec{v} .
- On note : $\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - yx'$.

B. Condition de colinéarité de deux vecteurs :**b. Propriété :**

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux vecteurs du plan (P) qui est rapporté au repère (O, i, j).

- \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires équivaut à $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ (ou $\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - yx' = 0$).

c. Exemple :

Etudier la colinéarité de $\vec{u}(2,3)$ et $\vec{v}(-4, -9)$ puis de $\vec{w} = -\vec{i} + 2\vec{j}$ et $\vec{u} = 5\vec{i} - 4\vec{j}$.



III. Norme d'un vecteur - Distance entre deux points (uniquement dans un repère orthonormé)

a. Propriété :

Le plan (P) est rapporté à un repère orthonormé (O,i,j)

- $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est un vecteur de (P) . A(x_A,y_A) et B(x_B,y_B) sont de points de (P) on a :
- La norme (ou la longueur) du vecteur \vec{u} est $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$
- la distance entre A et B est $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

b. Exemple :

Calculer la distance AB sachant que A(1,4) et B(1,2) .

IV. Vecteur directeur d'une droite -représentation paramétrique et équation cartésienne d'une droite :

A. Vecteur directeur d'une droite :

a. Définition :

Soit (D) une droite du plan (P) qui est rapporté au repère (O,i,j) . A et B sont deux points de (P) .

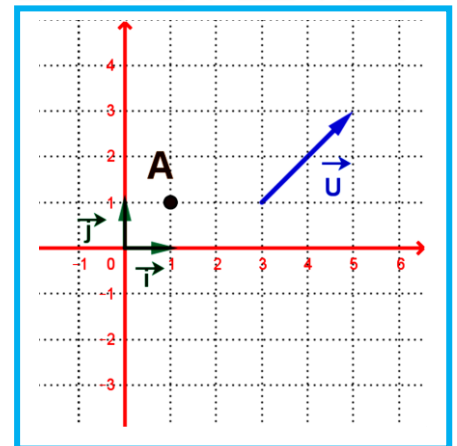
- Tout vecteur **non nul** \vec{u} est colinéaire avec le vecteur \overrightarrow{AB} est appelé vecteur directeur de la droite (D) .
- La droite (D) est appelée la droite passant par A (ou B) a pour vecteur directeur \vec{u} .
- La droite (D) est notée par : $D(A, \vec{u})$ ou $D(B, \vec{u})$ ou $D(A, \overrightarrow{AB})$.

B. Représentation paramétrique d'une droite :

a. Activité :

Soit $D(A, \vec{u})$ une droite du plan (P) qui est rapporté au repère (O,i,j) . (voir figure ci-contre)

1. Construire un point M de (P) tel que \overrightarrow{AM} et \vec{u} sont colinéaires.
2. Ecrire le vecteur \overrightarrow{AM} en fonction de \vec{u} .
3. On pose : M(x,y) et A(x_A,y_A) et $\vec{u}(a,b)$.
exprimer x et y en fonction de a et b et x_A et y_A .



b. Définition :

Soit $D(A, \vec{u})$ une droite du plan (P) qui est rapporté au repère (O,i,j) tel que A(x_A,y_A) et $\vec{u}(a,b)$.

L'écriture $\begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$ est appelée représentation paramétrique de la droite $D(A, \vec{u})$.

c. Exemple :

Soit $D(A, \vec{u})$ une droite du plan (P) tel que A(2,1) et $\vec{u}(-4,0)$.

On donne une représentation paramétrique de la droite $D(A, \vec{u})$.



La représentation paramétrique de la droite est : $t \in \mathbb{R} ; \begin{cases} x = 2 - 4t \\ y = 1 \end{cases}$.

C. Equation cartésienne de d'une droite :

a. Activité :

On considère la droite $D(A(4,5); \vec{u}(2,3))$ du plan (P) qui est rapporté au repère (O,i,j) et $M(x,y)$ est un point de (P).

1. Déterminer le couple des coordonnées du vecteur \overrightarrow{AM} .
2. Donner la condition nécessaire et suffisante pour que $M \in (D)$ (donner deux réponses différentes)
3. En déduit que $M(x,y)$ vérifie $3x - 2y - 2 = 0$.

b. Définition et propriété :

Le plan (P) est rapporté à un repère (O,i,j).

Toute droite $D(A(x_A, y_A); \vec{u})$ du plan (P) a une équation de la forme $ax + by + c = 0$ avec

$c = -x_u y_A + y_u x_A$ et $\vec{u} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ vecteur directeur de la droite (D).

L'écriture $ax + by + c = 0$ est appelée équation cartésienne de la droite (D) avec $\vec{u} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ vecteur directeur de la droite (D).

c. Démonstration :

Soit $D(A(x_A, y_A); \vec{u} \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix})$ une droite de (P) et $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in (P)$.

On a :

$$M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in (D) \Leftrightarrow \vec{u} \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \end{pmatrix} \text{ sont colinéaires}$$

$$\Leftrightarrow \det(\vec{u}, \overrightarrow{AM}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_u & x - x_A \\ y_u & y - y_A \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow x_u (y - y_A) - y_u (x - x_A) = 0$$

$$\Leftrightarrow x_u y - y_u x - x_u y_A + y_u x_A = 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{-y_u x + x_u y}_{+c} - x_u y_A + y_u x_A = 0$$

$$\Leftrightarrow ax + by + c = 0 \quad \text{avec} \quad \vec{u} \begin{pmatrix} x_u \\ y_u \end{pmatrix} = \vec{u} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$$



Conclusion : la droite $D(A(x_A, y_A); \vec{u})$ du plan (P) a pour équation de la forme $ax + by + c = 0$.

avec $c = -x_A y_A + y_A x_A$ et $\vec{u} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ vecteur directeur de la droite (D).

D. Etude de l'ensemble des points $M(x, y)$ de (P) qui vérifie $ax + by + c = 0$ avec $(a, b) \neq (0, 0)$:

a. Activité :

Le plan (P) est rapporté à un repère (O, i, j) .

On considère (E) l'ensemble des points $M(x, y)$ de (P) qui vérifie $ax + by + c = 0$ et $(a, b) \neq (0, 0)$

1. Démontrer que le point $C(0, -\frac{c}{b}) \in (E)$.est-ce que $(E) \neq \emptyset$? (on suppose que $b \neq 0$)
2. Soit le point $A(x_A, y_A)$ de (E), montrer que si $M(x, y) \in (E)$ on a $a(x - x_A) + b(y - y_A) = 0$
3. On considère le vecteur $\vec{u}(-b, a)$ en déduit que :
 - $\det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}) = 0$.
 - Ecrire \overrightarrow{AM} en fonction de \vec{u} ; puis déterminer l'ensemble des points (E).
 - Donner la propriété :

b. Propriété :

Le plan (P) est rapporté à un repère (O, i, j) .

a et b et c de \mathbb{R} avec $(a, b) \neq (0, 0)$.

l'ensemble des points $M(x, y)$ de (P) qui vérifient $ax + by + c = 0$ est la droite passant par

le point $C(0, -\frac{c}{b})$ si $b \neq 0$ (ou $C'(-\frac{c}{a}, 0)$ si $a \neq 0$) et $\vec{u}(-b, a)$ comme vecteur directeur.

c. Exemple :

On considère (E) l'ensemble des points $M(x, y)$ de (P) qui vérifie $2x + 3y + 5 = 0$.

1. Donner un point A de (P) qui appartient à (E).
2. Déterminer l'ensemble des points de (E).

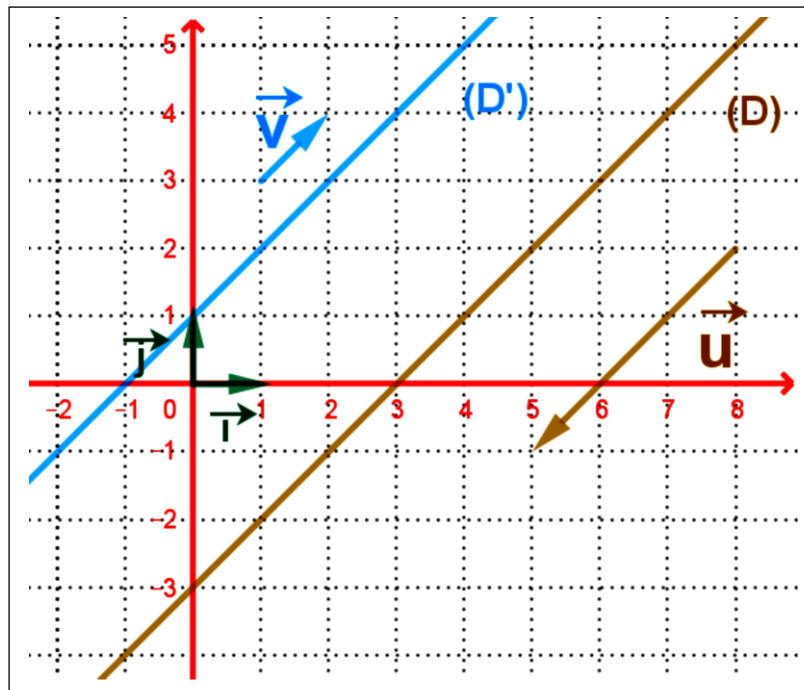
V. Droites parallèles dans le plan :

a. Activité :

❖ On considère deux droites d'équations cartésiennes : (D) : $ax + by + c = 0$ et

(D') : $a'x + b'y + c' = 0$ du plan (P) est rapporté à un repère (O, i, j) .

1. Déterminer \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs directeurs respectivement à (D) et (D').
2. Donner une condition nécessaire et suffisante tel que (D) et (D') sont parallèles.
3. En déduit que : $ab' - a'b = 0$ (ou $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$).



❖ On considère les droites (D) et (D') d'équations réduites (ou simplifiées)

$$(D): y = mx + p \text{ et } (D'): y = m'x + p'.$$

4. Donner une condition nécessaire et suffisante tel que (D) et (D') sont parallèles .

5. Donner la propriété .

b. Propriété :

Le plan (P) est rapporté à un repère (O, i, j) .

➤ (D) et (D') sont deux droites de (P) tel que : $(D): ax + by + c = 0$ et $(D'): a'x + b'y + c' = 0$.

$$(D) \parallel (D') \text{ équivaut à } ab' - a'b = 0 \left(\text{ou } \frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} \right).$$

➤ (D) et (D') sont deux droites de (P) tel que : $(D): y = mx + p$ et $(D'): y = m'x + p'$.

$$(D) \parallel (D') \text{ équivaut à } m = m'.$$

c. Exercice :

1. Donner équation cartésienne de la droite (Δ) passant par le point $B(2,1)$ et parallèle à la droite (D) d'équation cartésienne : $(D): 3x - 5y + 7 = 0$.

2. On considère la droite (Δ') a pour coefficient directeur $m = -3$ passant par $C(-1,4)$

✓ Donner un vecteur directeur de (Δ') .

✓ Donner une équation d'une droite (D') qui est parallèle à (Δ') .