

~ Tronc Commun ~  
L'ordre dans R  
(6 exercices résolus)

**Exercice 1 :**

soit  $n$  un entier naturel non nul, comparer  $a$  et  $b$  dans les cas suivants :

- 1)  $a = \frac{1}{n}$  ;  $b = \frac{2}{n+1}$
- 2)  $a = \frac{n}{n+1}$  ;  $b = \frac{n+1}{n+2}$
- 3)  $a = \frac{n}{\sqrt{n+1}}$  ;  $b = \sqrt{n+1}$

**Exercice 2 :**

Soient  $a$  et  $b$  deux réels strictement positifs.

- 1) Montrer que  $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$
- 2) Développer  $(a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$
- 3) En déduire que  $(a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geq 4$

**Exercice 3 :**

Soient  $a$  et  $b$  deux réels tels que  $a \geq 1$  et  $b \geq 1$ .

Montrer que  $\sqrt{a-1} + \sqrt{b-1} \leq \sqrt{ab}$

**Exercice 4 :**

Soient  $x$  et  $y$  deux réels positifs tels que  $x + y = 1$

- 1) Montrer que  $xy \leq \frac{1}{4}$
- 2) En déduire que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $\left(1 + \frac{1}{x^n}\right)\left(1 + \frac{1}{y^n}\right) \geq (1 + 2^n)^2$

**Exercice 5 :**

$x$  et  $y$  deux réels tels que :  $0 < x < y$

- 1) Montrer que  $x^2 < xy < y^2$
- 2) Montrer que si  $xy = 15$  alors  $x < \sqrt{15} < y$

3) Montrer que  $\frac{931}{241} < \sqrt{15} < \frac{3615}{931}$

**Exercice 6 :**

Soient  $x$  et  $y$  deux réels tels que :  $1 \leq x \leq 2$  et  $\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{3}{2}$

On pose  $E = x^2 - y^2 + x + y$

- 1) Donner un encadrement de  $E$
- 2) Vérifier que :  $E = (x + y)(x - y + 1)$  et en déduire un encadrement de  $E$ .
- 3) En déduire que :  $\frac{3}{4} \leq E \leq \frac{29}{4}$