Série 4

Exercice 1 :

Comparer a et b dans les cas suivants :

1°/ $a = 2\sqrt{3}$ et $b = \sqrt{7}$

2°/ $a = 3\sqrt{2}$ et $b = 2\sqrt{5}$

3°/ $a = 7\sqrt{3}$ et $b = 120$

4°/ $a = -5\sqrt{3} + \sqrt{11}$ et $b = \sqrt{11} - 7\sqrt{2}$

5°/ $a = \frac{3}{\sqrt{11}}$ et $b = \frac{11}{2\sqrt{5}}$

6°/ $a = 3^{1431}$ et $b = 2^{2010}$

Exercice 2 :

1°/ - Comparer les nombres a et b dans les cas suivants :

$$a = \sqrt{5} - 2 \quad et \quad b = \sqrt{9 - 4\sqrt{5}}$$

$$a = \sqrt{5} - 3 \quad et \quad b = \sqrt{15 - 6\sqrt{5}}$$

$$a = 2\sqrt{5} - 5 \quad et \quad b = \sqrt{45 - 20\sqrt{5}}$$

$$a = \frac{1+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}} \quad et \quad b = \frac{4+\sqrt{2}}{7}$$

2°/- Simlifier $b = \sqrt{45 - 20\sqrt{5}}$

Exercice 3 :

1°/- Soit $n \in \mathbb{N}^*$; Comparer :

$$\frac{n-1}{n} \quad et \quad \frac{n}{n+1}$$

2°/- Comparer :

$$\frac{2009}{2010} \quad et \quad \frac{2010}{2011}$$

Exercice 4 :

a et b deux nombres réels et strictement négatifs avec $a \neq b$

$$Comparer : \quad 1 - \frac{b}{a} \quad et \quad \frac{a}{b} - 1$$

Exercice 5 :

a et b deux nombres réels et strictement positifs ; Comparer A et B dans chaque cas :

1°/ $A = ab + 1$ et $B = (a+1)(b+1)$

2°/ $A = \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$ et $B = 2$

Exercice 6 :

Soit x un nombre réel tel que $x \geqslant 2$. On considère les deux expressions :$A = (x-1)^2$ et $B = (x-2)^2$.

1°/- Calculer $A - B$

2°/- Comparer A et B .

Exercice 7 :

a et b deux nombres réels tel que : $(a < b)$.

Ranger dans l'ordre croissant les nombres :

$$a \;;\; b \;;\; \frac{a+b}{2} \quad et \quad \frac{a-b}{2}$$

Exercice 8 :

a et b deux nombres réels tel que $a < 1 < b$; Simplifier l'expression :

$K = |2a-2| + 3|b-1| - \sqrt{(a-1)^2} + |a-b|$

Exercice 9 :

x et y deux nombres réels ;

1°/- Simplifier $|xy|$ dans les deux cas :

a°/ x et y ont même signe

b°/ x et y n'ont pas le même signe

2°/- Déduire que : $|xy| \geqslant xy$

3°/- Montrer que : $(|x|+|y|)^2 - (|x+y|)^2 = 2(|xy| - xy)$

4°/- Déduire l'inégalité triangulaire : $|x+y| \leqslant |x| + |y|$

Exercice 10 :

x et y deux nombres réels tel que : $-1 \leqslant 2x-5 \leqslant 7$ et $|y| + 4 \leqslant 9$

1°/- Montrer que : $x \in [2;6]$ et $y \in [-5;5]$

2°/- Encadrer les nombres : $x+y$; $y-x$; $x-5y+1$; $x(y+5)$; y^2-7y ; $\frac{7+y}{x-1}$

3°/- Montrer que :$|y(x-4)| \leqslant 10$

4°/- Ecrire l'expression suivante sans racine carrée et sans valeur absolue : $K = \sqrt{(y^2(x-4)-100)^2}$

Exercice 11 :

x un réel positif

1°/- Montrer que : $1 + \frac{1}{2}x \geqslant \sqrt{x+1}$

2°/- Montrer que : $1 + \frac{1}{2}x + \sqrt{x+1} \geqslant 2$

3°/- Vérifier que :

$$1 + \frac{1}{2}x - \sqrt{x+1} = \frac{\frac{1}{4}x^2}{1 + \frac{1}{2}x + \sqrt{x+1}}$$

4°/- Déduire que : $1 + \frac{1}{2}x - \sqrt{x+1} \geqslant \frac{1}{8}x^2$

5°/- Montrer que :

$$|\sqrt{x+1} - \left(1 + \frac{1}{2}x\right)| \leqslant \frac{x^2}{8}$$

6°/- Donner une valeur approchée de $\sqrt{1.02}$ près de 5×10^{-5}

Exercice 12 :

x un réel positif

1°/- Montrer que : $\frac{1}{x+1} = 1 - x + x^2 + \frac{x^3}{x+1}$

2°/- Montrer que : $0 \leqslant \frac{x^3}{x+1} \leqslant x^3$

3°/- Déduire que : $|\frac{1}{x+1} - (1 - x + x^2)| \leqslant x^3$

4°/- Donner une valeur approchée de $\frac{1}{1.02}$ près de 10^{-6}

Exercice 13 :

On pose : $A = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{6} \times ...... \times \frac{2013}{2014}$ et $B = \frac{2}{3} \times \frac{4}{5} \times \frac{6}{7} \times ...... \times \frac{2014}{2015}$

Montrer que $A < \frac{1}{\sqrt{2015}} < B$

Exercice 14 :

a un nombre réel tel que $|a| < 1$; On pose :$E = a^3 + a^2 - 5a + 3$

1°/- Montrer que : $-3 < E < 10$

2°/- Vérifier que : $E = (a+3)(a-1)^2$

3°/- Déduire que : $0 < E < 16$

4°/- Montrer que : $|E-5| < 5$