

## L'ordre dans $\mathbb{R}$

### Exercice 01 :

Comparer les deux nombres  $a$  et  $b$  dans les cas suivants :

- 1)  $a = 2 - \sqrt{3}$  et  $b = (2 - \sqrt{3})^2$ .
- 2)  $a = 5 + \sqrt{2}$  et  $b = \sqrt{25 + 10\sqrt{2}}$ .
- 3)  $a = \sqrt{10}$  et  $b = \sqrt{3} + \sqrt{7}$ .
- 4)  $a = 4 + \sqrt{17}$  et  $b = 3\sqrt{2} + \sqrt{17}$ .
- 5)  $a = 4\sqrt{5} - \sqrt{79}$  et  $b = 9 - 4\sqrt{5}$ .

### Exercice 02 :

- 1) Soit  $a > 0$  et  $b < 0$ , posant  $A = \frac{9a - 4b}{3a - 2b}$ .

Montrer que :  $2 < A < 3$ .

- 2) Soit  $a > 0$  et  $b > 0$ , posant  $A = \frac{12a + 10b}{3a + 2b}$ .

Montrer que :  $4 < A < 5$ .

### Exercice 03 :

Soient  $a$  et  $b$  deux réels distincts strictement positifs.

- 1) Montrer que :  $a^2 + b^2 > 2ab$ .
- 2) Montrer que :  $\frac{2}{a^2 + b^2} < \frac{1}{ab} < \frac{a^2 + b^2}{2a^2 b^2}$ .
- 3) Déduire que :  $3,75 < \sqrt{15} < 4$ .

### Exercice 04 :

Soient  $a$  et  $b$  des nombres réels tels que :

$$-6 < a < 3 \text{ et } 5 < b < 9$$

Encadrer les nombres suivants :

$$ab ; a^2 ; b^2 ; 3a^2 + b^2 - a + b .$$

### Exercice 05 :

1) Écrire les inégalités suivantes sous forme d'intervalles :

$$3 \leq x \leq 7 ; \frac{2}{3} < x < \frac{5}{4} ; -3 < x \leq 0 ; -5 \leq x < -8 ; x \geq 5 ;$$

$$x \leq 7 ; x > \frac{6}{11} ; x < 0 .$$

2) Écrire les intervalles suivantes sous forme d'inégalités :

$$[2;5[ ; ]-2;+\infty[ ; ]-\infty;0] ; \left[\frac{1}{3};+\infty\right[ ; ]4;5[ ; ]-3;3].$$

### Exercice 06 :

Simplifier :

$$\begin{aligned} & ]-3;4[ \cap [2;7[ ; [-8;4[ \cap [10;20[ ; ]-\infty;1[ \cap \left[-\frac{7}{4};+\infty\right[ \\ & ]5;9[ \cup [4;8[ ; [-5;-2[ \cup [-3;+\infty[ ; ]-\infty;\frac{2}{7}[ \cup \left[\frac{-1}{2};+\infty\right[ \end{aligned}$$

### Exercice 07 :

- 1) Soient  $x$  et  $y$  des nombres réels tels que :  $x \in [-2;5]$  et  $y \in [-3;-1]$  simplifier l'expression :

$$A = 2|2x + 7| - |3y| + 2|y + 8| - |2y - x|$$

- 2) Simplifier les nombres :  $\sqrt{(5\sqrt{7} - 59\sqrt{3})^2}$  ;  $|3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}|$  ;  $|-5\sqrt{13} - 13\sqrt{5}|$  ;  $\sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$ .

- 3) Soient  $a$  et  $b$  des nombres réels tels que :  $a \in \mathbb{R}^-$  et  $b \in \left[0; \frac{1}{3}\right]$ .

Simplifier  $\sqrt{(3b-1)^2}$  et  $\sqrt{(a-5)^2}$ .

- 4) Résoudre les équations :

$$|5x + 2| = 8 ; |-2x + 1| = -1 ; |2x - 1| = |3x - 4|.$$

- 5) Résoudre les inéquations :

$$|2x - 3| \leq 1 ; |6x + 11| \geq \frac{1}{6} ; 2 \leq |10x + 2| \leq 5.$$

## Exercice 08 :

Soient  $x$  et  $y$  des nombres réels tels que :

$$x \geq -2 ; y \leq -1 ; x - y = 6.$$

- 1) Calculer :  $A = \sqrt{(x+2)^2} + \sqrt{(y+1)^2}$ .
- 2) Montrer que :  $x \leq 5$  et  $y \geq -8$ .
- 3) Établir que :  $0 \leq x^2 + y^2 \leq 89$ .
- 4) Calculer  $B = |x+y-4| + |x+y+10|$ .

## Exercice 09 :

Soient  $a$  et  $b$  des nombres réels tels que :  $|a| \leq 1$  et  $|b| \leq 1$

- 1) Encadrer le nombre  $ab + 1$  et déduire que  $ab + 1 \neq 0$ .
- 2) Montrer que :  $\left| \frac{a+b}{ab+1} \right| \leq 1$ .

## Exercice 10 :

Soit  $x \in \mathbb{R}$ .

On pose  $A = \sqrt{x^2 + 1} - |x|$  et  $B = \sqrt{x^2 + 1} + |x|$ .

- 1) Montrer que :  $A > 0$  et déduire que :  $B > 2|x|$ .
- 2) Calculer  $AB$  et déduire que :  $A < \frac{1}{2|x|}$  pour  $x \neq 0$ .
- 3) Démontrer que pour tout  $x \neq 0$  :
$$|x| < \sqrt{x^2 + 1} < |x| + \frac{1}{2|x|}.$$
- 4) Donner un encadrement d'amplitude  $\frac{1}{66}$  pour le nombre  $\frac{\sqrt{122}}{3}$ .

## Exercice 11 :

Soient  $x \in \mathbb{R}$  et  $y \in \mathbb{R}$  tels que :  $\left| 2x - \frac{3}{2} \right| < \frac{1}{2}$  et  $\left| y - \frac{3}{4} \right| < \frac{1}{4}$ .

- 1) Démontrer que :  $x \in \left[ \frac{1}{2}; 1 \right]$  et  $y \in \left[ \frac{1}{2}; 1 \right]$ .
- 2) Vérifier que :  $xy - 3x - y - 1 = (x-2)(y-3) - 7$ .
- 3) En déduire que :  $-5 < xy - 3x - y - 1 < \frac{-13}{4}$ .

## Exercice 12 :

Soit  $x \in \mathbb{R}^*$  tel que :  $|x-1| < \frac{1}{2}$ . Démontrer que  $\frac{4}{5}$  est une valeur approchée du nombre  $\frac{1}{x}$  avec la précision  $\frac{2}{3}$ .

## Exercice 13 :

Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$  tel que  $\alpha$  est une valeur approchée par excès de  $\frac{1}{3}$  à  $2 \times 10^{-1}$  près.

- 1) Montrer que :  $\frac{2}{15} \leq \alpha \leq \frac{1}{3}$  puis donner un encadrement de  $\frac{\alpha}{\alpha-1}$ .
- 2) Soit  $x \in \mathbb{R}$  tel que :  $\left| \frac{x-1}{\alpha} \right| < \frac{1}{10}$ , montrer que  $\frac{29}{30} < x < \frac{31}{30}$ .

## Exercice 14 :

Soit  $x \in \mathbb{R}$  tel que  $x \in [3; +\infty[$ . Posant  $A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}}$ .

- 1) Montrer que :  $A-1 = \frac{1}{\sqrt{x-1}(\sqrt{x} + \sqrt{x-1})}$ .
- 2) a) Établir que :  $2\sqrt{x-1} < \sqrt{x} + \sqrt{x-1} < 2\sqrt{x}$ .
- b) Déduire que :  $\frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{x-1}} < A-1 < \frac{1}{2(x-1)}$ .
- 3) a) Montrer que  $\frac{1}{x-1} \leq \frac{3}{2x}$  et  $\frac{1}{x} \leq \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{x-1}}$ .
- b) Déduire que :  $1 + \frac{1}{2x} < A < 1 + \frac{3}{4x}$ .
- 4) Déduire que  $\frac{9}{4}$  est une valeur approchée de  $\sqrt{5}$  avec la précision  $5 \times 10^{-2}$ .