

## Exercices

PROF : ATMANI NAJIB

Tronc CS

## TD : L'ordre dans : $\mathbb{R}$

**Exercice1:** comparer  $\frac{101}{102}$  et  $\frac{100}{101}$

**Exercice2:** comparer  $a$  et  $b$

$$a = 2 + \sqrt{3} \text{ et } b = 2\sqrt{3}$$

**Exercice3:** comparer  $2a$  et  $a^2 + 1$  avec  $a \in \mathbb{R}$

**Exercice4 :** I) comparer les réels suivants :

$$\begin{array}{lll} 1) \frac{8}{11} \text{ et } \frac{5}{11} & 2) \frac{13}{9} \text{ et } \frac{13}{6} & 3) \frac{-15}{7} \text{ et } \frac{-15}{4} \\ 4) \frac{-12}{7} \text{ et } \frac{15}{4} & 5) 2\sqrt{5} \text{ et } 5\sqrt{2} & \end{array}$$

II) soient  $a$  et  $b$  deux réels tel que :  $a \leq b$

comparer : 1)  $5a$  et  $5b$     2)  $-13a$  et  $-13b$

III ) soient  $a$  et  $b$  deux réels strictement positifs tel que :  $a \leq b$

comparer : 1)  $a^2$  et  $b^2$     2)  $\sqrt{a}$  et  $\sqrt{b}$

$$3) \frac{1}{a} \text{ et } \frac{1}{b}$$

IV ) soient  $a$  et  $b$  deux réels négatifs tel que :  $a \leq b$

comparer :  $a^2$  et  $b^2$

**Exercice5:** Soit  $a$  est un réel strictement positif.

1. montrer que : Si  $a > 1$ , alors  $a^3 > a^2 > a$

2. montrer que : si  $a < 1$ , alors  $a^3 < a^2 < a$ .

**Exercice6:** comparer  $a$  et  $b$  :

$$a = \sqrt{6} \text{ et } b = \sqrt{3} + \sqrt{2} - 1$$

**Exercice7:** soit  $x \in \mathbb{R}^{++}$

1) Comparer :  $\sqrt{x+1} + \sqrt{x}$  et  $\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2}$

2) En déduire une comparaison de :  $\sqrt{x+1} - \sqrt{x}$  et  $\sqrt{x+2} - \sqrt{x+1}$

**Exercice8:** soit  $a \in \mathbb{R}^{++}$  et  $b \in \mathbb{R}^{++}$

$$\text{Comparer : } x = \frac{7a+2b}{7a} \text{ et } y = \frac{8b}{7a+2b}$$

**Exercice9:** calculer les expressions suivantes (éliminer le signe de valeur absolue)

$$1) |-3| \quad 2) |3| \quad 3) \left| -\frac{3}{5} \right| \quad 4) |\sqrt{5} - 2| \quad 5) |1 - \sqrt{3}|$$

$$6) |\pi - 4| \quad 7) |\sqrt{2} - \sqrt{7}| \quad 8) |3 - 2\sqrt{3}|$$

$$9) A = |4 - 2\sqrt{3}| - |5 - 3\sqrt{3}| + |9 - 5\sqrt{3}|$$

**Exercice10 :** (Résolution des équations)

Résoudre les équations suivantes :

$$1) |x - 1| = 5 \quad 2) |2x + 1| = |x - 3| \quad 3) |x + 2| = -1$$

**Exercice11:** 1) calculer  $(3\sqrt{2} - 5)^2$

2) comparer :  $3\sqrt{2}$  et  $5$

3) simplifier  $\sqrt{43 - 30\sqrt{2}}$

**Exercice12:** simplifier si c'est possible

- 1)  $[2 ; 5] \cap [4 ; 6]$
- 2)  $[2 ; 5] \cup [4 ; 6]$
- 3)  $]-\infty ; 2] \cap [-1 ; +\infty[$
- 4)  $]-\infty ; 2] \cup [-1 ; +\infty[$

**Exercice13:** calculer  $I \cap J$  et  $I \cup J$  dans les cas suivants :

$$J = [-1, +\infty[ \text{ et } I = ]-3, 7]$$

$$J = [4; 10] \text{ et } I = ]-\infty, 5[$$

$$I = [0, 10[ \text{ et } J = [-5; -1]$$

$$I = \left[ \frac{-2}{3}, 2 \right] \text{ et } J = \left] -1, \frac{3}{2} \right[$$

**Exercice14:** représenter chaque inégalité ou encadrement par l'intervalle qui convient ; 1)  $x \geq -3$  2)  $x < 5$

$$3) 1 \leq 2x \leq 4 \quad 4) 0 < 6x - 2 \leq 10 \quad 5) -8 \leq 2 - 2x \leq 6$$

**Exercice15:** résoudre les systèmes suivants :

$$\begin{array}{ll} 1) \begin{cases} x \geq -3 \\ x > 2 \end{cases} & 2) \begin{cases} x > 5 \\ x \leq 4 \end{cases} \quad 3) \begin{cases} x > 7 \\ x \geq 0 \end{cases} \quad 3) \begin{cases} -3 \leq x \leq 0 \\ -7 < x < 10 \end{cases} \end{array}$$

**Exercice16:** on considéré l'intervalle  $I = [-3; 4]$

Trouver le milieu et l'amplitude et le rayon de intervalle  $I$

**Exercice17 :** (Résolution des inéquations)

Résoudre les inéquations suivantes :  $|2x + 1| < 6$

$$1) |x - 1| \leq 2 \quad 2) |x + 2| \geq 3 \quad 3) |2x + 1| < 6$$

**Exercice18:** Soit  $x$  et  $y$  deux réels tq :  $x \geq \frac{1}{2}$  et  $y \leq 1$

et  $x - y = 3$

$$1) \text{ Calculer : } E = \sqrt{(2x-1)^2} + \sqrt{(2y-2)^2}$$

$$2) \text{ Montrer que : } \frac{1}{2} \leq x \leq 4 \text{ et } -\frac{5}{2} \leq y \leq 1$$

$$3) \text{ Calculer : } F = |x + y - 5| + |x + y + 2|$$

**Exercice19:** sachant que :  $(\sqrt{3} \approx 1.732050808\dots)$

donner un encadrement du réel  $\sqrt{3}$  à  $10^{-2}$  près

Et préciser la valeur par défaut et par excès

**Exercice20 :**  $x$  est un réel tel que  $-1 < x < 2$ . On pose  $B = -2x - 3$ .

Trouver un encadrement de  $B$  et trouver son amplitude

**Exercice21 :**  $x \in [1; 3]$  et  $y \in [2; 4]$

1) Trouver un encadrement de :  $x^2$  et  $y^2$  et  $2x$  et  $3y$

et  $-x$  et  $-y$  et  $\frac{1}{x}$  et  $\frac{1}{y}$  et  $\frac{x}{y}$

2) Trouver un encadrement de :  $A = x^2 + y^2 + 2x - 3y$  et  $B = \frac{2x-1}{x+1}$  et trouver les amplitudes des encadrements

**Exercice22 :** 1) Vérifier que  $14^2 < 200 < 15^2$  et en déduire que ;  $1,4 < \sqrt{2} < 1,5$

2) Trouver un encadrement de :  $\sqrt{5}$

3) en déduire un encadrement de :  $\sqrt{2} + \sqrt{5}$  et  $\sqrt{10}$

**Exercice23 :**  $x \in [-3; 1]$  et  $y \in [-6; -2]$

Trouver un encadrement de : 1)  $x+y$  2)  $x-y$  3)  $x^2$

4)  $y^2$  5)  $x \times y$  6)  $\frac{x}{y}$

**Exercice24 :** sachant que :  $1,38 < \sqrt{2} < 1,42$

montrer que :  $|\sqrt{2} - 1,40| < 0,02$

Que peut-on déduire ?

**Exercice25:** sachant que :  $2,645 \leq \sqrt{7} \leq 2,646$

a) Que représente  $2,645$  pour  $\sqrt{7}$  ?

a) Que représente  $2,646$  pour  $\sqrt{7}$  ?

**Exercice26:** soit  $x \in \mathbb{R}^+$

Comparer  $2\sqrt{x} - 1$  et  $x$

**Exercice27 :** soit  $n \in \mathbb{N}$

On pose :  $a = \sqrt{4n^2 + 1}$  et  $b = 2n + 1$

Comparer  $a$  et  $b$

**Exercice28 :** soient  $x$  et  $y$  deux réels tels que :

$x < y < 3$

1) Montrer que :  $x + y - 6 < 0$

2) Comparer  $a = x^2 - 6x + 1$  et  $b = y^2 - 6y + 1$

**Exercice29:** on pose  $B = \sqrt{6-2\sqrt{5}} - \sqrt{6+2\sqrt{5}}$

1) donner le signe de :  $B$

2) Calculer  $B^2$

3) donner une écriture simplifiée de  $B$

**Exercice30:** on pose :  $a = \frac{1+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$  et  $b = \frac{4+\sqrt{2}}{7}$

1) montrer que :  $b - a = \frac{8-5\sqrt{2}}{14}$

2) comparer  $a$  et  $b$

**Exercice31 :**  $a$  un nombre réel

Comparer :  $4a - 1$  et  $4a^2$

**Solution :** on a  $4a^2 - (4a - 1) = 4a^2 - 4a + 1 = (2a - 1)^2 \geq 0$

Donc :  $4a^2 \geq 4a - 1$

**Exercice32:**

soit  $x$  un élément de l'intervalle  $]-1, +\infty[$

comparer :  $12$  et  $-5x + 1$  on utilisant les propriétés de l'ordre

**Exercice33:** 1) montrer que :  $\sqrt{\frac{6+\sqrt{31}}{2}} + \sqrt{\frac{6-\sqrt{31}}{2}} = \sqrt{6+\sqrt{5}}$

2) montrer que :  $\sqrt{9-\sqrt{79}} + \sqrt{9+\sqrt{79}} = \sqrt{18+\sqrt{8}}$

**Exercice34:** soit  $a \geq 1$  on pose :  $A = \sqrt{1 + \frac{1}{a}}$

1) montrer que :  $a(A+1)(A-1) = 1$

2) a) montrer que :  $2 \leq A+1 \leq 3$

b) en déduire que :  $1 + \frac{1}{3a} \leq A \leq 1 + \frac{1}{2a}$

3) montrer que :  $1,1$  est une valeur approchée de

$\sqrt{1,2}$  à  $\frac{1}{30}$  près

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices

Que l'on devient un mathématicien

