L'ordre dans : $\mathbb{R}$

Exercice1: comparer $\frac{101}{102}$ *et* $\frac{100}{101}$

SOLUTION :

$\frac{101}{102}-\frac{100}{101}=\frac{101\times101-100\times102}{101\times102}=\frac{10201-10200}{101\times102}$

$\frac{101}{102}-\frac{100}{101}=\frac{1}{101\times102}\in\mathbb{R}^+$ donc : $\frac{101}{102}\geq\frac{100}{101}$

Exercice2: comparer a et b

$a=2+\sqrt{3}$ et $b=2\sqrt{3}$

SOLUTION : $a-b=2-\sqrt{3}$ nombre positif

cad : $a-b\in\mathbb{R}^{*+}$ donc : $a\succ b$

Exercice3: comparer $2a$ et a^2+1 avec $a\in\mathbb{R}$

SOLUTION : $(a^2+1)-2a=a^2-2a+1=(a-1)^2\geq0$

Donc : $a^2+1\geq2a$ si $a\in\mathbb{R}$

Exercice4 : I) comparer les réels suivants :

1) $\frac{8}{11}$ et $\frac{5}{11}$ 2) $\frac{13}{9}$ et $\frac{13}{6}$ 3) $\frac{-15}{7}$ et $\frac{-15}{4}$

4) $\frac{-12}{7}$ et $\frac{15}{4}$ 5) $2\sqrt{5}$ et $5\sqrt{2}$

II) soient a et b deux réels tel que : $a\leq b$

comparer : 1) $5a$ et $5b$ 2) $-13a$ et $-13b$

III) soient a et b deux réels strictement positifs tel que :

$a\leq b$ comparer : 1) a^2 et b^2 2) $\sqrt{a}$ et $\sqrt{b}$

3) $\frac{1}{a}$ et $\frac{1}{b}$

IV) soient a et b deux réels négatifs tel que : $a\leq b$

comparer : a^2 et b^2

SOLUTION : I) Comparer a et b revient à étudier le signe de : $a-b$.

1) on compare $\frac{8}{11}$ et $\frac{5}{11}$

$\frac{8}{11}-\frac{5}{11}=\frac{8-5}{11}=\frac{3}{11}\geq0$ donc $\frac{8}{11}\geq\frac{5}{11}$

2) on compare $\frac{13}{9}$ et $\frac{13}{6}$

$\frac{13}{6}-\frac{13}{9}=\frac{39-26}{18}=\frac{13}{18}>0$ donc $\frac{13}{6}>\frac{13}{9}$ ou $\frac{13}{6}\geq\frac{13}{9}$

3) on compare $\frac{-15}{7}$ et $\frac{-15}{4}$

$\frac{-15}{7}-\left(-\frac{15}{4}\right)=\frac{-15}{7}+\frac{15}{4}=\frac{-60+105}{28}=\frac{45}{28}>0$

donc $\frac{-15}{7}>-\frac{15}{4}$ ou $\frac{-15}{7}\geq-\frac{15}{4}$

4) on compare $\frac{-12}{7}$ et $\frac{15}{4}$

$\frac{-12}{7}-\frac{15}{4}=\frac{-48-105}{7}=\frac{-165}{28}<0$ donc $\frac{-12}{7}<\frac{15}{4}$

ou $\frac{-12}{7}\leq\frac{15}{4}$

5) on compare $2\sqrt{5}$ et $5\sqrt{2}$

On a $(2\sqrt{5})^2=20$ et $(5\sqrt{2})^2=50$ et

$50-20=30>0$ et puisque $2\sqrt{5}$ et $5\sqrt{2}$ sont positifs

alors $5\sqrt{2}>2\sqrt{5}$

II) soient a et b deux réels tel que : $a\leq b$

1) on compare $5a$ et $5b$

On a : $5a-5b=5(a-b)$ et puisque $a\leq b$ alors

$a-b\leq0$

Et on a : $5>0$ donc $5a\leq5b$

2) on compare $-13a$ et $-13b$

On a : $-13a-(-13b)=-13a+13b=-13(a-b)$ et puisque $a\leq b$ alors $a-b\leq0$

Et on a : $-13<0$ donc $-13a\geq-13b$

III) soient a et b deux réels strictement positifs tel que : $a\leq b$

1)on compare : a^2 et b^2

$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

On a : a et b deux réels strictement positifs donc $a+b\geq0$

et puisque $a\leq b$ alors $a-b\leq0$

alors : $(a-b)(a+b)\leq0$

D'où $a^2\leq b^2$

2) on compare : $\sqrt{a}$ et $\sqrt{b}$

$\sqrt{a}-\sqrt{b}=\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{a}^2-\sqrt{b}^2}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$

On a : $a\leq b$ alors $a-b\leq0$

et puisque $\sqrt{a}+\sqrt{b}\geq0$ car c'est la somme de deux nombres positifs

donc $\frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\leq0$ D'où $\sqrt{a}\leq\sqrt{b}$

3) on compare : $\frac{1}{a}$ et $\frac{1}{b}$

$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{b-a}{ab}$

On a : $a\leq b$ alors $b-a\geq 0$

et puisque a et b deux réels strictement positifs alors $ab>0$ car c'est la produit de deux nombres positifs

donc $\frac{b-a}{ab}\geq 0$ D'où $\frac{1}{a}\geq\frac{1}{b}$

IV) soient a et b deux réels strictement négatifs tel que : $a\leq b$

on compare : a^2 et b^2

$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

On a : a et b deux réels négatifs donc $a+b\leq 0$

et puisque $a\leq b$ alors $a-b\leq 0$ alors : $(a-b)(a+b)\geq 0$

D'où $a^2\geq b^2$

Exercice5: *Soit* a est un réel strictement positif.

1. montrer que : Si $a>1$, alors $a^3>a^2>a$
2. montrer que : si $a<1$, alors $a^3<a^2<a$.

Réponse : De l'hypothèse $a>1$, on déduit d'une part que $a^2>a$ (on multiplie les deux membres par $a>0$) et d'autre part que $a^3>a^2$ (on multiplie par $a^2>0$). Donc $a^3>a^2>a$.

De la même façon, lorsque $0<a<1$, on démontre que : $a^3<a^2<a$.

Exercice6: comparer a et b :

$a=\sqrt{6}$ et $b=\sqrt{3}+\sqrt{2}-1$

Réponse :

$a-b=\sqrt{3}\times\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{2}+1=\sqrt{3}\times(\sqrt{2}-1)-(\sqrt{2}-1)$

$a-b=(\sqrt{2}-1)(\sqrt{3}-1)$

on compare : $\sqrt{2}$ et 1

On a $(\sqrt{2})^2=2$ et $(1)^2=1$ donc $\sqrt{2}>1$

par suite $(\sqrt{2}-1)\in\mathbb{R}^{+*}$

On a $(\sqrt{3})^2=3$ et $(1)^2=1$ donc $\sqrt{3}>1$

par suite $(\sqrt{3}-1)\in\mathbb{R}^{+*}$ Donc

$a-b=(\sqrt{2}-1)(\sqrt{3}-1)\in\mathbb{R}^{+*}$

D'où $a>b$

Exercice7: soit $x\in\mathbb{R}^{+*}$

1)Comparer : $\sqrt{x+1}+\sqrt{x}$ et $\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}$

2)En déduire une comparaison de : $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$ et $\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}$

Réponse :1) On a $x+2\geq x$ car $(x+2)-x\geq 0$

Donc $\sqrt{x+2}\geq\sqrt{x}$

On ajoutant $\sqrt{x+1}$ au deux membres on trouve :

$\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}\geq\sqrt{x}+\sqrt{x+1}$

2) $\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}=\frac{(\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1})(\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1})}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}}$ (le conjugué)

$\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}=\frac{(\sqrt{x+2})^2-(\sqrt{x+1})^2}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}}=\frac{x+2-x-1}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}}$

Donc : $\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}=\frac{1}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}}$

Et on aussi : $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}$

$\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\frac{(\sqrt{x+1})^2-(\sqrt{x})^2}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}=\frac{x+1-x}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}$

Et puisque : $\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}\geq\sqrt{x}+\sqrt{x+1}$

On a donc : $\frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+1}}\leq\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}$

D'où $\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\leq\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}$

Exercice8: soit $a\in\mathbb{R}^{*+}$ et $b\in\mathbb{R}^{*+}$

Comparer : $x=\frac{7a+2b}{7a}$ et $y=\frac{8b}{7a+2b}$

Réponse : On a $x+2\geq x$ car $(x+2)-x\geq 0$

$x-y=\frac{7a+2b}{7a}-\frac{8b}{7a+2b}$

$x-y=\frac{(7a+2b)^2-7a\times 8b}{7a(7a+2b)}=\frac{49a^2+14ab+14ab+4b^2-56a\times b}{7a(7a+2b)}$

$x-y=\frac{49a^2-28a\times b+4b^2}{7a(7a+2b)}=\frac{(7a)^2-2\times 7a\times 2b+(2b)^2}{7a(7a+2b)}$

$x-y=\frac{(7a-2b)^2}{7a(7a+2b)}\in\mathbb{R}^{+}$

car $7a(7a+2b)\in\mathbb{R}^{+}$ et $(7a-2b)^2\in\mathbb{R}^{+}$ D'où $x\geq y$

Exercice9: calculer les expressions suivantes (éliminer le signe de valeur absolue)

1) $|-3|$ 2) $|3|$ 3) $\left|-\frac{3}{5}\right|$ 4) $|\sqrt{5}-2|$ 5) $|1-\sqrt{3}|$

6) $|\pi-4|$ 7) $|\sqrt{2}-\sqrt{7}|$ 8) $|3-2\sqrt{3}|$

9) $A=|4-2\sqrt{3}|-|5-3\sqrt{3}|+|9-5\sqrt{3}|$

Solution :1) $|-3|=-(-3)=3$ 2) $|3|=3$ 3) $\left|-\frac{3}{5}\right|=\frac{3}{5}$

4) $|\sqrt{5}-2|$ on compare : $\sqrt{5}$ et 2

On a $\left(\sqrt{5}\right)^2=5$ et $(2)^2=4$ donc $\sqrt{5}>2$ par suite $\left(\sqrt{5}-2\right)\in\mathbb{R}^{+*}$ Donc $\left|\sqrt{5}-2\right|=\sqrt{5}-2$

5) $\left|1-\sqrt{3}\right|$ on compare : $\sqrt{3}$ et 1

On a $\left(\sqrt{3}\right)^2=3$ et $(1)^2=1$ donc $\sqrt{3}>1$ par suite $\left(1-\sqrt{3}\right)\in\mathbb{R}^{-*}$ donc : $\left|1-\sqrt{3}\right|=-\left(1-\sqrt{3}\right)=-1+\sqrt{3}$

6) $|\pi-4|=-(\pi-4)=-\pi+4$ car $4>\pi$

7) $\left|\sqrt{2}-\sqrt{7}\right|$ on compare : $\sqrt{7}$ et $\sqrt{2}$

On a $\left(\sqrt{7}\right)^2=7$ et $\left(\sqrt{2}\right)^2=2$ donc $\sqrt{7}>\sqrt{2}$

par suite $\sqrt{2}-\sqrt{7}<0$

Donc $\left|\sqrt{2}-\sqrt{7}\right|=-\left(\sqrt{2}-\sqrt{7}\right)=-\sqrt{2}+\sqrt{7}$

8) on a $3<2\sqrt{3}$ car $3^2<\left(2\sqrt{3}\right)^2$

Donc : $3-2\sqrt{3}\in\mathbb{R}^-$

Donc ; $\left|3-2\sqrt{3}\right|=-\left(3-2\sqrt{3}\right)=-3+2\sqrt{3}$

9)on a : $\sqrt{5}>\sqrt{2}$ donc : $\sqrt{5}-\sqrt{2}\in\mathbb{R}^+$ donc : $\left|\sqrt{5}-\sqrt{2}\right|=\sqrt{5}-\sqrt{2}$

$A=\left|4-2\sqrt{3}\right|-\left|5-3\sqrt{3}\right|+\left|9-5\sqrt{3}\right|$

$A=4-2\sqrt{3}--\left(5-3\sqrt{3}\right)+\left(5\sqrt{3}-9\right)$

$A=4-2\sqrt{3}+5-3\sqrt{3}+5\sqrt{3}-9=0$

Exercice10: (*Résolution des équations)*

Résoudre les équations suivantes :

1) $|x-1|=5$ 2) $|2x+1|=|x-3|$ 3) $|x+2|=-1$

Réponse : **1)** $|x-1|=5$

$|x-1|=5$ ssi $x-1=5$ ou $x-1=-5$

ssi $x=6$ ou $x=-4$ donc : $S=\{-4;6\}$

2) $|2x+1|=|x-3|$ ssi $2x+1=x-3$ ou $2x+1=-(x-3)$

ssi $2x+1=x-3$ ou $2x+1=-x+3$

ssi $x=-4$ ou $x=\frac{2}{3}$ donc : $S=\left\{-4;\frac{2}{3}\right\}$

3) $|x+2|=-1$ $S=\varnothing$ car $|x+2|\geq 0$

Exercice11: 1) calculer $\left(3\sqrt{2}-5\right)^2$

2)comparer : $3\sqrt{2}$ et 5

3)simplifier $\sqrt{43-30\sqrt{2}}$

Réponse : **1)**

$\left(3\sqrt{2}-5\right)^2=\left(3\sqrt{2}\right)^2-2\times3\sqrt{2}\times5+(5)^2=18-30\sqrt{2}\times5+25$

$\left(3\sqrt{2}-5\right)^2=43-30\sqrt{2}$

2) $\left(3\sqrt{2}\right)^2=18$ et $(5)^2=25$

Donc $3\sqrt{2}>5$ donc $3\sqrt{2}-5\in\mathbb{R}^-$

3) $\sqrt{43-30\sqrt{2}}=\sqrt{\left(3\sqrt{2}-5\right)^2}=\left|3\sqrt{2}-5\right|=-\left(3\sqrt{2}-5\right)$

car $3\sqrt{2}-5\in\mathbb{R}^-$ donc $\sqrt{43-30\sqrt{2}}=-3\sqrt{2}+5$

Exercice12: simplifier si c'est possible

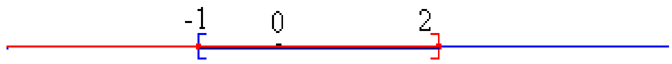
1) [2 ; 5] ∩ [4 ; 6] 2) [2 ; 5] ∪ [4 ; 6]

3)]-∞ ; 2] ∩ [-1 ; +∞[4)]-∞ ; 2] ∪ [-1 ; +∞[

Solution :

1) [2 ; 5] ∩ [4 ; 6] = [4 ; 5] 2) [2 ; 5] ∪ [4 ; 6] = [2 ; 6].

3)]-∞ ; 2] ∩ [-1 ; +∞[= [-1 ; 2]



4)]-∞ ; 2] ∪ [-1 ; +∞[=]-∞ ; +∞[

Exercice13: calculer $I\cap J$ et $I\cup J$ dans les cas suivants

$J=[-1,+\infty[$ et $I=]-3,7]$

$J=[4;10]$ et $I=]-\infty,5[$

$I=[0,10[$ et $J=[-5;-1]$

$I=\left[\frac{-2}{3},2\right]$ et $J=\left]-1,\frac{3}{2}\right[$

Réponse $I\cap J=]-1,7]$ et $I\cup J=]-3;+\infty[$

$I\cap J=[4,5[$ et $I\cup J=]-\infty;10]$

$I\cap J=\varnothing$ et $I\cup J=[-5;10]$

$I\cap J=\left[-\frac{2}{3};\frac{3}{2}\right[$ et $I\cup J=]-1,2]$

Exercice14: représenter chaque inégalité ou encadrement par l'intervalle qui convient ; 1) $x\geq-3$ 2) $x<5$

3) $1\leq 2x\leq 4$ 4) $0<6x-2\leq 10$ 5) $-8\leq 2-2x\leq 6$

Réponse : 1) $x\geq-3$ ssi $x\in[-3,+\infty[$

2) $x<5$ ssi $x\in]-\infty,5]$

3) $1\leq 2x\leq 4$ ssi $\frac{1}{2}\times1\leq\frac{1}{2}\times2x\leq4\times\frac{1}{2}$ ssi $\frac{1}{2}\leq x\leq 2$

ssi $x\in\left[\frac{1}{2},2\right]$

4) $0<6x-2\leq10$ ssi $0+2<6x-2+2\leq10+2$

ssi $2<6x\leq12$

ssi $2\times\frac{1}{2}<6x\times\frac{1}{2}\leq12\times\frac{1}{2}$ ssi $1<3x\leq6$ ssi

$1\times\frac{1}{3}<3x\times\frac{1}{3}\leq6\times\frac{1}{3}$ ssi $\frac{1}{3}<x\leq2$ ssi $x\in\left]\frac{1}{3},2\right]$

5) $-8\leq2-2x\leq6$ ssi $-8-2\leq2-2x-2\leq6-2$

ssi $-10\leq-2x\leq4$

ssi $-10\times\frac{1}{2}\leq -2x\times\frac{1}{2}\leq 4\times\frac{1}{2}$ ssi $-5\leq -x\leq 2$ ssi $-2\leq x\leq 5$ ssi $x\in[-2,5]$

Exercice15: résoudre les systèmes suivants :

1) $\begin{cases}x\geq -3\\ x\succ 2\end{cases}$ 2) $\begin{cases}x\succ 5\\ x\leq 4\end{cases}$ 3) $\begin{cases}x\succ 7\\ x\geq 0\end{cases}$ 3) $\begin{cases}-3\leq x\leq 0\\ -7\prec x\prec 10\end{cases}$

Réponse : $\{$ c'est l'intersection

1) $\begin{cases}x\geq -3\\ x\succ 2\end{cases}$

$x\geq -3$ ssi $x\in[-3,+\infty[$ et $x>2$ ssi $x\in]2,+\infty[$

$S=]2,+\infty[\cap[-3,+\infty[=]2,+\infty[$

2) $\begin{cases}x\succ 5\\ x\leq 4\end{cases}$

$x\leq 4$ ssi $x\in]-\infty,4]$ et $x\succ 5$ ssi $]5,+\infty[$

$S=]5,+\infty[\cap]-\infty,4]=\varnothing$

3) $x>7$ ssi $x\in]7,+\infty[$ et $x\geq 0$ ssi $x\in[0,+\infty[$

$S=]7,+\infty[\cap[0,+\infty[=]7,+\infty[$

4) $\begin{cases}-3\leq x\leq 0\\ -7\langle x\langle 10\end{cases}$

$x\in]-7;10[$ ssi $-7\langle x\langle 10$

$-3\leq x\leq 0$ ssi $x\in[-3;0]$

$S=]-7;10[\cap[-3;0]=[-3;0]$

Exercice16: on considéré l'intervalle $I=[-3;4]$

Trouver le milieu et l'amplitude et le rayon de intervalle I

Réponse :

$\frac{-3+4}{2}=\frac{1}{2}$ est le milieu de intervalle I

$4-(-3)=7$ est le amplitude de intervalle I

$\frac{4-(-3)}{2}=\frac{7}{2}$ est le rayon de intervalle I

Exercice17 : (*Résolution des inéquations)*

Résoudre les inéquations suivantes : $|2x+1|\prec 6$

1) $|x-1|\leq 2$ 2) $|x+2|\geq 3$ 3) $|2x+1|\prec 6$

Réponse : 1) $|x-1|\leq 2$ ssi $-2\leq x-1\leq 2$ ssi $-2+1\leq x-1+1\leq 2+1$ ssi $-1\leq x\leq 3$ donc $S=[-1;3]$

2) $|x+2|\geq 3$ ssi $x+2\geq 3$ ou $x+2\leq -3$

Ssi $x\geq 1$ ou $x\leq -5$

Ssi $x\in[1;+\infty[$ ou $x\in]-\infty;-5]$

Donc $S=]-\infty;-5]\cup[1;+\infty[$

3) $|2x+1|<6$ ssi $-6<2x+1<6$

ssi $-6-1<2x+1-1<6-1$ ssi $-7<2x<5$

ssi $-7\times\frac{1}{2}<2x\times\frac{1}{2}<5\times\frac{1}{2}$ ssi $\frac{-7}{2}<x<\frac{5}{2}$ donc : $S=\left]-\frac{7}{2};\frac{5}{2}\right[$

Exercice18: Soit x et y deux réels tq : $x\geq\frac{1}{2}$ et $y\leq 1$ et $x-y=3$

1) Calculer : $E=\sqrt{(2x-1)^2}+\sqrt{(2y-2)^2}$

2) Montrer que : $\frac{1}{2}\leq x\leq 4$ et $-\frac{5}{2}\leq y\leq 1$

3) Calculer : $F=|x+y-5|+|x+y+2|$

Réponse : 1)

$E=\sqrt{(2x-1)^2}+\sqrt{(2y-2)^2}=|2x-1|+|2y-2|$

On a $x\geq\frac{1}{2}$ donc $2x\geq 1$ donc $2x-1\geq 0$

Et on a $y\leq 1$ donc $2y\leq 2$ donc $2y-2\leq 0$

donc $E=|2x-1|+|2y-2|=2x-1-(2y-2)$

donc $E=2x-2y+1=2(x-y)+1$

et on a $x-y=3$ donc $E=2\times 3+1=7$

2)on montre que $-\frac{5}{2}\leq y\leq 1$???

On a $x-y=3$ donc $x=y+3$

Et on a $x\geq\frac{1}{2}$ donc $y+3\geq\frac{1}{2}$ donc $y\geq\frac{1}{2}-3$ donc $y\geq\frac{-5}{2}$

Et on a $y\leq 1$ donc $-\frac{5}{2}\leq y\leq 1$

on montre que $\frac{1}{2}\leq x\leq 4$????

On a $x-y=3$ donc $y=x-3$

Et On a $-\frac{5}{2}\leq y\leq 1$ donc $-\frac{5}{2}\leq x-3\leq 1$ donc

$-\frac{5}{2}+3\leq x-3+3\leq 1+3$ D'où $\frac{1}{2}\leq x\leq 4$

3) $F=|x+y-5|+|x+y+2|$?????

On cherche le signe de : $x+y-5$

On a $-\frac{5}{2}\leq y\leq 1$ et $\frac{1}{2}\leq x\leq 4$ donc $\frac{1}{2}-\frac{5}{2}\leq x+y\leq 1+4$

donc $-2\leq x+y\leq 5$

donc $-2-5\leq x+y-5\leq 5-5$ donc $-7\leq x+y-5\leq 0$

donc $x+y-5\leq 0$

On cherche le signe de : $x+y+2$

On a $-2\leq x+y\leq 5$ donc $-2+2\leq x+y+2\leq 5+2$

donc $0\leq x+y+2\leq 7$

donc $x+y+2\geq 0$

donc $F=|x+y-5|+|x+y+2|=-(x+y-5)+x+y+2$

$F=-x-y+5+x+y+2=-x-y+5+x+y+2=7$

Exercice19: sachant que : $\left(\sqrt{3}\simeq 1.732050808...\right)$

donner un encadrement du réel $\sqrt{3}$ à 10^{-2} près
Et préciser la valeur par défaut et par excès

Solution : On a : $\left(\sqrt{3} \simeq 1.732050808...\right)$

Donc ① $1.73 \le \sqrt{3} \le 1.74$ et ② $1.732 \le \sqrt{3} \le 1.733$

① est un encadrement du réel $\sqrt{3}$ à $1.74-1.73$ près

c à d à $10^{-2}=0.01$ près

② est un encadrement du réel $\sqrt{3}$ à $1.733-1.732$ près

c à d à $10^{-3}=0.001$ près

Et on a 1.73 est une approximation du réel $\sqrt{3}$ par défaut à 10^{-2} près

1.74 est une approximation du réel $\sqrt{3}$ par excès à 10^{-2} près

Exercice20 : x est un réel tel que $-1 < x < 2$. On pose $B = -2x - 3$.
Trouver un encadrement de B et trouer son amplitude

Exercice21 : $x \in [1;3]$ **et** $y \in [2;4]$

1)Trouver un encadrement de : x^2 et y^2 et $2x$ et $3y$ et $-x$ et $-y$ et $\frac{1}{x}$ et $\frac{1}{y}$ et $\frac{x}{y}$

2)Trouver un encadrement de : $A=x^2+y^2+2x-3y$ et $B=\frac{2x-1}{x+1}$ et trouver les amplitudes des encadrements

Solution :

1) $x \in [1;3]$ ssi $1 \le x \le 3$ et $y \in [2;4]$ ssi $2 \le y \le 4$

On a $1 \le x \le 3$ donc $1^2 \le x^2 \le 3^2$ donc $1 \le x^2 \le 9$

On a $2 \le y \le 4$ donc $2^2 \le y^2 \le 4^2$ donc $4 \le y^2 \le 16$

On a $1 \le x \le 3$ donc $2\times1 \le 2x \le 2\times3$ donc $2 \le 2x \le 6$

On a $2 \le y \le 4$ donc $3\times2 \le 3\times y \le 3\times4$ donc $6 \le 3y \le 12$

On a $1 \le x \le 3$ donc $-3 \le -x \le -1$

On a $2 \le y \le 4$ donc $-4 \le -y \le -2$

On a $1 \le x \le 3$ donc $\frac{1}{3} \le \frac{1}{x} \le 1$

On a $2 \le y \le 4$ donc $\frac{1}{4} \le \frac{1}{y} \le \frac{1}{2}$

On a $\frac{x}{y} = x \times \frac{1}{y}$ donc $1\times\frac{1}{4} \le x\times\frac{1}{y} \le 3\times\frac{1}{2}$ donc $\frac{1}{4} \le \frac{x}{y} \le \frac{3}{2}$

2) encadrement de $A=x^2+y^2+2x-3y$

$6 \le 3y \le 12$ donc $-12 \le -3y \le -6$

On fait la somme membre a membre on trouve :

$1+4+2-12 \le x^2+y^2+2x-3y \le 9+16+6-6$

Donc ① $-5 \le A \le 25$ ① est un encadrement du réel A à $25-(-5)=30$ près

encadrement de $B=\frac{2x-1}{x+1}$

On a $B=\frac{2x-1}{x+1}=(2x-1)\times\frac{1}{x+1}$

et on a $1 \le x \le 3$ donc $2 \le 2x \le 6$ donc

$2-1 \le 2x-1 \le 6-1$ donc $1 \le 2x-1 \le 5$ ❸

et on a $1 \le x \le 3$ donc $2 \le x+1 \le 4$ donc $\frac{1}{4} \le \frac{1}{x+1} \le \frac{1}{2}$ ❹

On fait la produit membre a membre de ❸ et ❹ on trouve :

$1\times\frac{1}{4} \le (2x-1)\times\frac{1}{x+1} \le 5\times\frac{1}{2}$

donc $\frac{1}{4} \le B \le \frac{5}{2}$ est un encadrement du réel B

d'amplitudes $r=\frac{5}{2}-\frac{1}{4}=\frac{9}{4}$

Exercice22 : 1) Vérifier que $14^2 < 200 < 15^2$ et en déduire que ; $1,4 < \sqrt{2} < 1,5$

2) Trouver un encadrement de : $\sqrt{5}$

3) en déduire un encadrement de : $\sqrt{2}+\sqrt{5}$ et $\sqrt{10}$

Solution : 1) on a $14^2=196$ et $15^2=225$ donc

$14^2 < 200 < 15^2$ donc $\sqrt{14^2} < \sqrt{200} < \sqrt{15^2}$

donc $\sqrt{14^2} < \sqrt{2\times100} < \sqrt{15^2}$ donc $14 < \sqrt{2}\times10 < 15$

donc $14\times\frac{1}{10} < \sqrt{2}\times10\times\frac{1}{10} < 15\times\frac{1}{10}$

donc $1,4 < \sqrt{2} < 1,5$

2) on a $22^2=484$ et $23^2=529$ donc $22^2 < 500 < 23^2$

donc $\sqrt{22^2} < \sqrt{500} < \sqrt{23^2}$

donc $22 < \sqrt{5}\times10 < 23$ donc

$22\times\frac{1}{10} < \sqrt{5}\times10\times\frac{1}{10} < 23\times\frac{1}{10}$ donc $2,2 < \sqrt{5} < 2,3$

3)) on a $1,4 < \sqrt{2} < 1,5$ et $2,2 < \sqrt{5} < 2,3$ donc

$1,4+2,2 < \sqrt{2}+\sqrt{5} < 1,5+2,3$

donc $3,6 < \sqrt{2}+\sqrt{5} < 3,8$

on a $1,4 < \sqrt{2} < 1,5$ et $2,2 < \sqrt{5} < 2,3$ donc

$1,4\times2,2 < \sqrt{2}\times\sqrt{5} < 1,5\times2,3$ donc $3,08 < \sqrt{10} < 3,45$

Exercice23 : $x \in [-3;1]$ et $y \in [-6;-2]$

Trouver un encadrement de : 1) $x+y$ 2) $x-y$ 3) x^2 4) y^2 5) $x\times y$ 6) $\frac{x}{y}$

Solution : 1) $x \in [-3;1]$ ssi $-3 \le x \le 1$

$y \in [-6;-2]$ ssi $-6 \le y \le -2$

donc $(-3)+(-6) \le x+y \le 1+(-2)$

donc $-9 \le x+y \le -1$

2) On a $x-y=x+(-y)$ et on a $-6\le y\le -2$

donc $2\le -y\le 6$

donc $(-3)+2\le x+(-y)\le 1+6$

donc $-1\le x-y\le 7$

3) On a $-3\le x\le 1$ donc $0\le x\le 1$ ou $-3\le x\le 0$

donc $0^2\le x^2\le 1^2$ ou $0^2\le x^2\le (-3)^2$

donc $0\le x^2\le 1$ ou $0\le x^2\le 9$

donc $0\le x^2\le 9$

4) On a $-6\le y\le -2$ donc $(-2)^2\le y^2\le (-6)^2$

donc $4\le y^2\le 36$

5) encadrement de : $x\times y$

$-3\le x\le 1$ et $-6\le y\le -2$

Si $0\le x\le 1$

on a $-6\le y\le -2$ alors on a $2\le -y\le 6$

donc $0\le -xy\le 6$ donc ① $-6\le xy\le 0$

Si $-3\le x\le 0$ alors $0\le -x\le 3$ et on a $2\le -y\le 6$

donc ② $0\le xy\le 18$

D'après ① et ② on déduit que : $-6\le xy\le 18$

6) encadrement de : $\frac{x}{y}$ $-3\le x\le 1$ On a

$-6\le y\le -2$ donc $-\frac{1}{2}\le \frac{1}{y}\le -\frac{1}{6}$

donc $\frac{1}{6}\le -\frac{1}{y}\le \frac{1}{2}$

Si $0\le x\le 1$

on a $\frac{1}{6}\le -\frac{1}{y}\le \frac{1}{2}$ alors $0\le x\times\left(-\frac{1}{y}\right)\le \frac{1}{2}$ donc

$0\le -\frac{x}{y}\le \frac{1}{2}$ donc ❸ $-\frac{1}{2}\le \frac{x}{y}\le 0$

Si $-3\le x\le 0$ alors $0\le -x\le 3$ et on a $\frac{1}{6}\le -\frac{1}{y}\le \frac{1}{2}$

donc ❹ $0\le \frac{x}{y}\le \frac{3}{2}$

D'après ❸ et ❹ on déduit que : $-\frac{1}{2}\le \frac{x}{y}\le \frac{3}{2}$

Exercice24 : sachant que : $1,38<\sqrt{2}<1,42$

montrer que : $\left|\sqrt{2}-1,40\right|<0,02$

Que peut-on déduire ?

Solution : on a donc $1,40-0,02<\sqrt{2}<1,40+0,02$

$-0,02<\sqrt{2}-1,40<0,02$ donc $\left|\sqrt{2}-1,40\right|<0,02$

donc $1,40$ est une valeur approchée du nombre $\sqrt{2}$ à $0,02$ près

on a $1,40\le \sqrt{2}<1,40+0,02$ donc $1,40$ est une valeur approchée par défaut du nombre $\sqrt{2}$ à $0,02$ près

on a $1,42-0,02<\sqrt{2}<1,42$ donc $1,42$ est une valeur approchée par excès du nombre $\sqrt{2}$ à $0,02$ près

Exercice25: sachant que : $2,645\le \sqrt{7}\le 2,646$

a)Que représente $2,645$ pour $\sqrt{7}$?

a)Que représente $2,646$. pour $\sqrt{7}$?

Solution :

a) $2,645$ est une valeur approchée du réel $\sqrt{7}$ par défaut à 10^{-3} près

b) $2,645$ est une valeur approchée du réel $\sqrt{7}$ par excès à 10^{-3} près

Exercice26: soit $x\in\mathbb{R}^+$

Comparer $2\sqrt{x}-1$ et x

Solution :

$x-\left(2\sqrt{x}-1\right)=x-2\sqrt{x}+1=\left(\sqrt{x}\right)^2-2\sqrt{x}\times 1+1^2=\left(\sqrt{x}-1\right)^2\ge 0$

Donc : $x\ge\left(2\sqrt{x}-1\right)$ si $x\in\mathbb{R}^+$

Exercice27 : soit $n\in\mathbb{N}$

On pose : $a=\sqrt{4n^2+1}$ et $b=2n+1$

Comparer a et b

Solution : on a : $a\in\mathbb{R}^+$ et $b\in\mathbb{R}^+$

$a^2=\left(\sqrt{4n^2+1}\right)^2=4n^2+1$ et $b^2=(2n+1)^2=4n^2+4n+1$

$b^2-a^2=4n^2+4n+1-(4n^2+1)=4n^2+4n+1-4n^2-1$

$b^2-a^2=4n\ge 0$ donc $b^2\ge a^2$

Donc : $b\ge a$ si $n\in\mathbb{N}$

Exercice28 : soient x et y deux réels tels que : $x<y<3$

1)Montrer que : $x+y-6\prec 0$

2) Comparer $a=x^2-6x+1$ et $b=y^2-6y+1$

Solution :1) on a $x<y<3$ donc $x<3$ et $y<3$

Donc : $x+y<6$ donc : $x+y-6<0$

2) $a-b=(x^2-6x+1)-(y^2-6y+1)$

$a-b=x^2-6x+1-y^2+6y-1=x^2-y^2-6x+6y$

$a-b=(x-y)(x+y)-6(x-y)=(x-y)(x+y-6)$

On a : $x<y$ donc $x-y\in\mathbb{R}^-$

Et on a : $x+y-6\in\mathbb{R}^-$

Donc : $(x-y)(x+y-6)\in\mathbb{R}^+$

Donc : $a-b\in\mathbb{R}^+$ et par suite $a\ge b$

Exercice29: on pose $B=\sqrt{6-2\sqrt{5}}-\sqrt{6+2\sqrt{5}}$

1)donner le signe de : B

2) Calculer B^2

3) donner une écriture simplifié de B

Solution : $B=\sqrt{6-2\sqrt{5}}-\sqrt{6+2\sqrt{5}}$

1)on Remarque que : $6-2\sqrt{5}<6+2\sqrt{5}$

Donc : $\sqrt{6-2\sqrt{5}}<\sqrt{6+2\sqrt{5}}$

Donc: $\sqrt{6-2\sqrt{5}}-\sqrt{6+2\sqrt{5}}\in\mathbb{R}^{*-}$ cad $B<0$

2) $B^2=\left(\sqrt{6-2\sqrt{5}}-\sqrt{6+2\sqrt{5}}\right)^2$

Donc : $B^2=\left(\sqrt{6-2\sqrt{5}}\right)^2-2\sqrt{6-2\sqrt{5}}\sqrt{6+2\sqrt{5}}+\left(\sqrt{6+2\sqrt{5}}\right)^2$

Donc : $B^2=6-2\sqrt{5}-2\sqrt{\left(6-2\sqrt{5}\right)\left(6+2\sqrt{5}\right)}+6+2\sqrt{5}$

$B^2=12-2\sqrt{6^2-\left(2\sqrt{5}\right)^2}=12-2\sqrt{6^2-20}=12-2\sqrt{16}$

Donc : $B^2=12-2\times 4=4$

3) $B^2=4$ ssi $B=\sqrt{4}$ ou $B=-\sqrt{4}$

Donc : $B=2$ ou $B=-2$ or $B<0$ donc : $B=-2$

Exercice30:on pose : $a=\dfrac{1+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$ et $b=\dfrac{4+\sqrt{2}}{7}$

1)montrer que : $b-a=\dfrac{8-5\sqrt{2}}{14}$

2)comparer a et b

Solution :

1) $b-a=\dfrac{4+\sqrt{2}}{7}-\dfrac{1+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}=\dfrac{4+\sqrt{2}}{7}-\dfrac{\left(1+\sqrt{2}\right)\left(2-\sqrt{2}\right)}{\left(2+\sqrt{2}\right)\left(2-\sqrt{2}\right)}$

$b-a=\dfrac{4+\sqrt{2}}{7}-\dfrac{2-\sqrt{2}+\sqrt{2}-2}{4-2}=\dfrac{4+\sqrt{2}}{7}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{8+2\sqrt{2}-7\sqrt{2}}{14}$

$b-a=\dfrac{8-5\sqrt{2}}{14}$

2)on a : $b-a=\dfrac{8-5\sqrt{2}}{14}$

Or on a : $8>5\sqrt{2}$ car $(8)^2=64$ et $\left(5\sqrt{2}\right)^2=50$

Donc : $8-5\sqrt{2}\in\mathbb{R}^{+*}$ donc : $\dfrac{8-5\sqrt{2}}{14}\in\mathbb{R}^{+*}$

Par suite : $b>a$

Exercice31 : a un nombre réel

Comparer : $4a-1$ **et** $4a^2$

Solution :on a $4a^2-(4a-1)=4a^2-4a+1=(2a-1)^2\geq 0$

Donc : $4a^2\geq 4a-1$

Exercice32:

soit x un élément de l'intervalle $]-1,+\infty[$

comparer : 12 **et** $-5x+1$ on utilisant les propriétés de l'ordre

Solution : on a $x\in]-1;+\infty[$ donc : $x\succ -1$

Donc : $-5x\prec -5\times(-1)$ donc : $-5x\prec 5$

Donc : ① $-5x+1\prec 6$ et on sait que : $6\prec 12$ ②

Donc : de ① et ② en déduit que : $-5x+1\prec 12$

Exercice33:1)montrer que : $\sqrt{\dfrac{6+\sqrt{31}}{2}}+\sqrt{\dfrac{6-\sqrt{31}}{2}}=\sqrt{6+\sqrt{5}}$

2)montrer que : $\sqrt{9-\sqrt{79}}+\sqrt{9+\sqrt{79}}=\sqrt{18+\sqrt{8}}$

Solution :1)on pose : $B=\sqrt{\dfrac{6+\sqrt{31}}{2}}+\sqrt{\dfrac{6-\sqrt{31}}{2}}$

On va Calculer : B^2;

$B^2=\left(\sqrt{\dfrac{6+\sqrt{31}}{2}}\right)^2+2\sqrt{\dfrac{6+\sqrt{31}}{2}}\sqrt{\dfrac{6-\sqrt{31}}{2}}+\left(\sqrt{\dfrac{6-\sqrt{31}}{2}}\right)^2$

$B^2=\dfrac{6+\sqrt{31}}{2}+2\sqrt{\left(\dfrac{6+\sqrt{31}}{2}\right)\left(\dfrac{6-\sqrt{31}}{2}\right)}+\dfrac{6-\sqrt{31}}{2}$

$B^2=6+2\sqrt{\dfrac{36-1}{4}}=6+2\sqrt{\dfrac{5}{4}}=6+\sqrt{5}$

Donc : $B^2=6+\sqrt{5}$ donc : $B=\sqrt{6+\sqrt{5}}$ ou $B=-\sqrt{6+\sqrt{5}}$

Or $B>0$ donc : $B=\sqrt{6+\sqrt{5}}$

D'où: $\sqrt{\dfrac{6+\sqrt{31}}{2}}+\sqrt{\dfrac{6-\sqrt{31}}{2}}=\sqrt{6+\sqrt{5}}$

2) $\sqrt{9-\sqrt{79}}+\sqrt{9+\sqrt{79}}=\sqrt{18+\sqrt{8}}$??

On pose : $B=\sqrt{9-\sqrt{79}}+\sqrt{9+\sqrt{79}}$ calculons B^2?

$B^2=\left(\sqrt{9-\sqrt{79}}\right)^2+2\sqrt{9-\sqrt{79}}\sqrt{9+\sqrt{79}}+\left(\sqrt{9+\sqrt{79}}\right)^2$

$B^2=9-\sqrt{79}+2\sqrt{\left(9-\sqrt{79}\right)\left(9+\sqrt{79}\right)}+9+\sqrt{79}$

$B^2=18+2\sqrt{81-79}=18+\sqrt{8}$

Donc: $B^2=18+\sqrt{8}$ donc : $B=\sqrt{18+\sqrt{8}}$ ou $B=-\sqrt{18+\sqrt{8}}$

Or $B>0$ donc : $B=\sqrt{18+\sqrt{8}}$

Par suite: $\sqrt{9-\sqrt{79}}+\sqrt{9+\sqrt{79}}=\sqrt{18+\sqrt{8}}$

Exercice34:soit $a\geq 1$ on pose : $A=\sqrt{1+\dfrac{1}{a}}$

1)montrer que : $a(A+1)(A-1)=1$

2)a)montrer que : $2\leq A+1\leq 3$

b)en déduire que : $1+\dfrac{1}{3a}\leq A\leq 1+\dfrac{1}{2a}$

3)montrer que : 1,1 est une valeur approchée de $\sqrt{1,2}$ a $\dfrac{1}{30}$ prés

Solution :1) $a\geq 1$ et $A=\sqrt{1+\dfrac{1}{a}}$

montrons que : $a(A+1)(A-1)=1$?

on a : $(A+1)(A-1)=A^2-1=\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{a}}\right)^2-1$

$(A+1)(A-1)=1+\dfrac{1}{a}-1=\dfrac{1}{a}$ donc : $(A+1)(A-1)=\dfrac{1}{a}$

Donc : $a(A+1)(A-1)=1$

2) montrons que : $2\leq A+1\leq 3$?

on a : $a\geq 1>0$ donc : $\dfrac{1}{a}\geq 0$ donc : $\dfrac{1}{a}+1\geq 1$

donc : $A\geq 1$ donc : $A+1\geq 2$ (1)

on a : $a\geq 1$donc : $\dfrac{1}{a}\leq 1$ donc : $1+\dfrac{1}{a}\leq 2$

donc : $A \leq \sqrt{2}$ donc : $A+1 \leq \sqrt{2}+1 \leq 3 \; (2)$

de (1) et (2) en déduit que : $2 \leq A+1 \leq 3$

et on a : $a(A+1)(A-1)=1$ donc : $A-1=\frac{1}{a(A+1)}$

d'autre part on a : $\frac{1}{3} \leq \frac{1}{A+1} \leq \frac{1}{2}$ donc : $\frac{1}{3a} \leq \frac{1}{a(A+1)} \leq \frac{1}{2a}$

donc : $\frac{1}{3a} \leq A-1 \leq \frac{1}{2a}$ donc : $\frac{1}{3a}+1 \leq A \leq \frac{1}{2a}+1$

3)on a $1,2=1+0,2=1+\frac{1}{5}$ donc $A=\sqrt{1,2}=\sqrt{1+\frac{1}{5}}$

Donc : $a=5$

$\frac{1}{15}+1 \leq \sqrt{1,2} \leq \frac{1}{10}+1$ ssi $\frac{16}{15} \leq \sqrt{1,2} \leq \frac{11}{10}$

Ssi $\frac{32}{30} \leq \sqrt{1,2} \leq \frac{33}{30}$ et on a $\frac{33}{30}-\frac{32}{30}=\frac{1}{30}$ $\left(\frac{33}{30}=1,1\right)$

$1,1$ est une valeur approchée de $\sqrt{1,2}$ a $\frac{1}{30}$ prés

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.
C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices
Que l'on devient un mathématicien