

Corrigé de l'exercice 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$1) \quad a - b = \frac{1}{n} - \frac{2}{n+1} = \frac{n+1-2n}{n(n+1)} = \frac{1-n}{n(n+1)}$$

On a $n \in \mathbb{N}^*$ donc $n > 0$ et $n \geq 1$

Donc $n(n+1) > 0$ et $1-n \leq 0$

$$\text{Donc } \frac{1-n}{n(n+1)} \leq 0$$

Donc $a - b \leq 0$

Et par suite $a \leq b$

$$2) \quad a - b = \frac{n}{n+1} - \frac{n+1}{n+2} = \frac{n(n+2) - (n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n^2 + 2n - n^2 - 2n - 1}{(n+1)(n+2)} = \frac{-1}{(n+1)(n+2)}$$

On a $n \in \mathbb{N}^*$ donc $n > 0$

Donc $(n+1)(n+2) > 0$

$$\text{Donc } \frac{-1}{(n+1)(n+2)} < 0$$

Donc $a - b < 0$

Et par suite $a < b$

$$3) \quad a - b = \frac{n}{\sqrt{n+1}} - \sqrt{n+1} = \frac{n - n - 1}{\sqrt{n+1}} = \frac{-1}{\sqrt{n+1}}$$

On a $\sqrt{n+1} > 0$

$$\text{Donc } \frac{-1}{\sqrt{n+1}} < 0$$

Corrigé de l'exercice 2

1) Soient a et b deux réels strictement positifs

$$\begin{aligned} \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) - 2 &= \frac{a^2 + b^2 - 2ab}{ab} \\ &= \frac{(a-b)^2}{ab} \end{aligned}$$

On a $(a-b)^2 \geq 0$ et $ab > 0$

Donc $\frac{(a-b)^2}{ab} \geq 0$

Donc $\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) - 2 \geq 0$

Et par suite $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$ pour tous a et b deux réels strictement positifs.

2) $(a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) = 1 + \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 1 = \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 2$

3) Soient a et b deux réels strictement positifs

D'après le résultat de la question 1), on a : $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$

Donc $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 2 \geq 4$

Et par suite $(a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geq 4$ pour tous a et b deux réels strictement positifs.

Corrigé de l'exercice 3

Soient a et b deux réels tels que $a \geq 1$ et $b \geq 1$.

$$\begin{aligned} (\sqrt{a-1} + \sqrt{b-1})^2 - (\sqrt{ab})^2 &= a-1 + 2\sqrt{(a-1)(b-1)} + b-1 - ab \\ &= a-ab + b-1 + 2\sqrt{(a-1)(b-1)} - 1 \\ &= a(1-b) - (1-b) + 2\sqrt{(a-1)(b-1)} - 1 \\ &= -(a-1)(b-1) + 2\sqrt{(a-1)(b-1)} - 1 \\ &= -[(a-1)(b-1) - 2\sqrt{(a-1)(b-1)} + 1] \\ &= -[\sqrt{(a-1)(b-1)} - 1]^2 \end{aligned}$$

Puisque $-[\sqrt{(a-1)(b-1)} - 1]^2 \leq 0$ alors $(\sqrt{a-1} + \sqrt{b-1})^2 - (\sqrt{ab})^2 \leq 0$

Donc $(\sqrt{a-1} + \sqrt{b-1})^2 \leq (\sqrt{ab})^2$

Et par suite $\sqrt{a-1} + \sqrt{b-1} \leq \sqrt{ab}$ pour tous a et b deux réels strictement positifs.

(Rq : $\sqrt{a-1} + \sqrt{b-1} \geq 0$ et $\sqrt{ab} \geq 0$)

Corrigé de l'exercice 4

1) Soient x et y deux réels positifs tels que $x + y = 1$

On a $0 \leq (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2$

Donc $0 \leq x + y - 2\sqrt{xy}$

Donc $2\sqrt{xy} \leq x + y$

Et puisque $x + y = 1$ alors $2\sqrt{xy} \leq 1$

Donc $4xy \leq 1$

D'où $xy \leq \frac{1}{4}$

2) Soit $n \in \mathbb{N}$:

On a : $\left(1 + \frac{1}{x^n}\right)\left(1 + \frac{1}{y^n}\right) = 1 + \frac{1}{x^n} + \frac{1}{y^n} + \frac{1}{(xy)^n} = 1 + \frac{x^n + y^n}{(xy)^n} + \frac{1}{(xy)^n}$

✓ D'après le résultat de la question 1) on a : $xy \leq \frac{1}{4}$ donc $\frac{1}{(xy)^n} \geq 2^{2n}$ (*)

✓ On sait que $(\sqrt{x^n} - \sqrt{y^n})^2 \geq 0$ donc $x^n + y^n \geq 2\sqrt{(xy)^n}$

Donc $\frac{x^n + y^n}{(xy)^n} \geq \frac{2}{\sqrt{(xy)^n}}$

Et en utilisant (*) : Il est clair que : $\frac{2}{\sqrt{(xy)^n}} \geq 2 \times 2^n$

D'où $\frac{x^n + y^n}{(xy)^n} \geq 2 \times 2^n$ (**)

✓ D'après (*) et (**) : $1 + \frac{x^n + y^n}{(xy)^n} + \frac{1}{(xy)^n} \geq 1 + 2 \times 2^n + 2^{2n}$

D'où $\boxed{\left(1 + \frac{1}{x^n}\right)\left(1 + \frac{1}{y^n}\right) \geq (1 + 2^n)^2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Corrigé de l'exercice 5

1) Soient x et y deux réels tels que : $0 < x < y$

On a $x < y$ et $x > 0$

donc $x \times x < x \times y$

donc $x^2 < xy$

et on a $x < y$ et $y > 0$

donc $x \times y < y \times y$

donc $xy < y^2$

et par suite $x^2 < xy < y^2$

2) Supposons que $xy = 15$

D'après le résultat de la question 1), on a $x^2 < xy < y^2$

Donc $x^2 < 15 < y^2$

Donc $\sqrt{x^2} < \sqrt{15} < \sqrt{y^2}$

Donc $|x| < \sqrt{15} < |y|$

Et puisque $x > 0$ et $y > 0$ alors $x < \sqrt{15} < y$

3) Posons $x = \frac{931}{241}$ et $y = \frac{3615}{931}$

On a $0 < x < y$ et $xy = \frac{931}{241} \times \frac{3615}{931} = 15$

Donc D'après le résultat de la question 2), on a : $\frac{931}{241} < \sqrt{15} < \frac{3615}{931}$.

Corrigé de l'exercice 6

Soient x et y deux réels tels que : $1 \leq x \leq 2$ et $\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{3}{2}$

1) On a $1 \leq x \leq 2$

donc $1 \leq x^2 \leq 4$

Et on a $\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{3}{2}$

donc $\frac{1}{4} \leq y^2 \leq \frac{9}{4}$

donc $\frac{-9}{4} \leq -y^2 \leq \frac{-1}{4}$

donc $1 - \frac{9}{4} + 1 + \frac{1}{2} \leq x^2 - y^2 + x + y \leq 4 - \frac{1}{4} + 2 + \frac{3}{2}$

d'où $\boxed{\frac{1}{4} \leq E \leq \frac{29}{4}}$

2)

✓ $(x+y)(x-y+1) = x^2 - xy + x + xy - y^2 + y = x^2 - y^2 + x + y = E$

✓ On a $1 \leq x \leq 2$ et $\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{3}{2}$

Donc $\boxed{\frac{3}{2} \leq x+y \leq \frac{7}{2}}$ et $\boxed{\frac{1}{2} \leq x-y+1 \leq \frac{5}{2}}$

Donc $\frac{3}{4} \leq (x+y)(x-y+1) \leq \frac{35}{4}$

Et par suite $\boxed{\frac{3}{4} \leq E \leq \frac{35}{4}}$

3) On a :

d'après le résultat de la question 1) : $E \in \left[\frac{1}{4}, \frac{29}{4} \right]$ et d'après le résultat de la question

2) : $E \in \left[\frac{3}{4}, \frac{35}{4} \right]$

donc $E \in \left[\frac{1}{4}, \frac{29}{4} \right] \cap \left[\frac{3}{4}, \frac{35}{4} \right]$

d'où $E \in \left[\frac{3}{4}, \frac{29}{4} \right].$

つづく