

Professeur : Rachid BELEMOU	COURS <b>L'ordre dans IR</b>	Niveau : TCT - BIOF Année : 2017-2018
Lycée : Oued Eddahab		

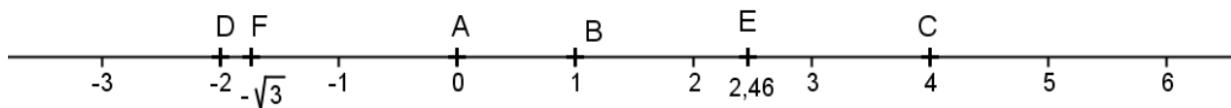
## I) Les intervalles de $\mathbb{R}$

### 1) Définitions

#### a) Représentation graphique de $\mathbb{R}$

L'ensemble des nombres réels est habituellement représenté sous la forme d'une droite graduée : à chaque point de la droite est associé un unique nombre réel appelé abscisse de ce point

Exemple :



Les abscisses des points A, B, C, D, E et F sont respectivement :

$$x_A = 0 ; x_B = 1 ; x_C = 4 ; x_D = -2 ; x_E = 2,46 \text{ et } x_F = -\sqrt{3}$$

#### b) Les intervalles de $\mathbb{R}$

Un intervalle de  $\mathbb{R}$  est représenté par un segment, une demi-droite ou par la droite toute entière. Chaque intervalle est associé à une inégalité ou un encadrement concernant les abscisses des points de la droite appartenant à ce segment ou cette demi-droite.

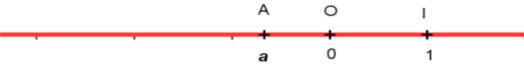
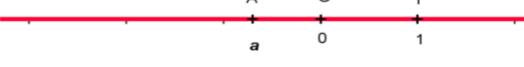
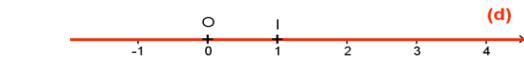
## 2) Tableau récapitulatif des neufs intervalles de $\mathbb{R}$

Soit A et B deux points de la droite d'abscisses respectives a et b ( $a < b$ ) et soit M un point de la droite d'abscisse x

On obtient donc Les neuf types d'intervalles sont dans le tableau ci-dessous :

Remarques :

- On dit qu'un intervalle est **fermé** si ses extrémités lui appartiennent. Par exemple :  $[6 ; 12]$  ou  $[-2 ; +\infty[$  sont des intervalles fermés.
- On dit qu'un intervalle est **ouvert** si ses extrémités ne lui appartiennent pas. Par exemple :  $] -4 ; 7 [$  ou  $] -\infty ; 3 [$  sont des intervalles ouverts.
- L'ensemble  $\mathbb{R}$  est aussi un intervalle, il peut se noter  $] -\infty ; +\infty [$
- L'ensemble ne contenant aucun réel est aussi un intervalle, c'est l'**intervalle vide, il se note  $\emptyset$**
- Le symbole  $\infty$  se lit **infini**.

M	Nombres x	Représentation graphique	Notation intervalle
$M \in [AB]$	$a \leq x \leq b$		$[a; b]$
		<b>Intervalle fermé borné</b>	
$M \in ]AB[$	$a < x < b$		$]a; b[$
		<b>Intervalle ouvert borné</b>	
$M \in [AB[$	$a \leq x < b$		$[a; b[$
		<b>Intervalle semi-ouvert à droite, borné</b>	
$M \in ]AB]$	$a < x \leq b$		$]a; b]$
		<b>Intervalle semi-ouvert à gauche, borné</b>	
$M \in [AB)$	$x \geq a$		$[a; +\infty[$
		<b>Intervalle fermé infini</b>	
$M \in ]AB)$	$x > a$		$]a; +\infty[$
		<b>Intervalle ouvert infini</b>	
$M \in [BA)$	$x \leq b$		$] -\infty; b ]$
		<b>Intervalle fermé infini</b>	
$M \in ]BA)$	$x < b$		$] -\infty; b [$
		<b>Intervalle ouvert infini</b>	
$M \in (d)$	$x \in \mathbb{R}$		$] -\infty; +\infty[$

## II) Intersections et réunions d'intervalles

### 1) Intersections

#### Définition :

Soit  $E$  et  $F$  deux ensembles quelconques. On appelle intersection de  $E$  et  $F$ , et on note  $E \cap F$ , l'ensemble des éléments qui sont communs à  $E$  et  $F$ .

En d'autres termes,  $x$  est un élément de  $E \cap F$  si et seulement si  $x$  est un élément de  $E$  et  $x$  est un élément de  $F$ .

**Remarques :**  $E \cap F = F \cap E$ .

$E \cap \emptyset = \emptyset$ .

$E \cap \mathbb{R} = E$ .

Si  $I$  et  $J$  sont des intervalles fermés bornés, alors leur intersection est également un intervalle fermé borné.

Si  $I$  et  $J$  sont des intervalles ouverts bornés, alors leur intersection est également un intervalle ouvert borné.

## 2) Réunions

### Définition :

Soit  $E$  et  $F$  deux ensembles quelconques. On appelle réunion de  $E$  et  $F$ , et on note  $E \cup F$ , l'ensemble des éléments qui sont soit dans  $E$ , soit dans  $F$ .

En d'autres termes,  $x$  est un élément de  $E \cup F$  si et seulement si  $x$  est un élément de  $E$  ou  $x$  est un élément de  $F$ .

**Remarques :**  $E \cup F = F \cup E$ .

$E \cup \emptyset = E$ .

$E \cup \mathbb{R} = \mathbb{R}$ .

Si  $I$  et  $J$  sont des intervalles fermés bornés, alors leur réunion n'est pas systématiquement un intervalle. Par contre, la réunion de deux intervalles fermés bornés est fermée et bornée.

### Exercice d'application : (5,9 - série)

## III. Ordre et comparaison

Comparer deux nombres réels  $a$  et  $b$ , c'est chercher à savoir quel est le plus grand (ou s'ils sont égaux).

Dire que  $a < b$  équivaut à dire que  $a - b < 0$ .

Ainsi, comparer  $a$  et  $b$  revient à étudier le signe de  $a - b$ .

**exemples :** Soient  $a$  et  $b$  deux nombres réels, comparer  $a^2 + b^2$  et  $(a + b)^2$ .

### a) Ordre et addition

**Propriété :** Si  $a < b$ , alors  $a + c < b + c$  et  $a - c < b - c$

Autrement dit, ajouter (ou soustraire) un même nombre à chaque membre d'une inégalité ne change pas le sens de l'inégalité.

**Propriété :** Si  $a < b$  et  $c < d$ , alors  $a + c < b + d$ .

En effet, si  $a < b$ , alors  $a + c < b + c$ .

De plus, si  $c < d$ , alors  $b + c < b + d$ . On en déduit  $a + c < b + d$ .

### b) Ordre et multiplication

**Propriété :** Si  $a < b$  et  $c > 0$ , alors  $ac < bc$  et  $a/c < b/c$

Si  $a < b$  et  $c < 0$ , alors  $ac > bc$  et  $a/c > b/c$

Autrement dit, multiplier (ou diviser) chaque membre d'une inégalité,

- par un même nombre strictement positif, ne change pas le sens de l'inégalité. - par un même nombre strictement négatif, change le sens de l'inégalité.

**Propriété :** Si  $a, b, c$  et  $d$  sont des réels positifs tels que  $a < b$  et  $c < d$ , alors  $ac < bd$ .

En effet, si  $a < b$ , alors  $ac < bc$  car  $c > 0$ .

De plus, si  $c < d$ , alors  $bc < bd$  car  $d > 0$ . On en déduit :  $ac < bd$ .

### Exercice d'application : (1,2 - série)

#### c) Encadrement

Soient  $a$ ,  $b$  et  $x$  trois nombres réels. On dit que  $a$  et  $b$  encadrent  $x$  lorsque  $a \leq x \leq b$ .

**Exercice :**  $x$  est un réel tel que  $-1 < x < 2$ . On pose  $B = -2x - 3$ .

Trouver un encadrement de  $B$ .

### III. Inégalités sur les carrés, les racines carrées, les inverses

#### a) Passage au carré, à la racine carrée

**Propriété :**  $a$  et  $b$  étant deux nombres positifs distincts,  $a < b$  équivaut à  $a^2 < b^2$ .

**démonstration :** On sait que  $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ . Comme  $a$  et  $b$  sont positifs,  $a + b$  est aussi positif et on en déduit que  $a - b$  et  $a^2$  et  $b^2$  sont de même signe. D'où

- si  $a < b$ , alors  $a - b < 0$  donc  $a^2 - b^2 < 0$  et  $a^2 < b^2$ .
- si  $a^2 < b^2$ , alors  $a^2 - b^2 < 0$  donc  $a - b < 0$  et  $a < b$ .

Autrement dit, deux nombres positifs sont rangés dans le même ordre que leurs carrés.

**Conséquence :** deux nombres positifs et leurs racines carrées sont rangés dans le même ordre.

Donc :  $\sqrt{a} < \sqrt{b}$  équivaut à  $a < b$ .

#### Exercice d'application : (15 - série)

#### b) Passage à l'inverse

**Propriété :**  $a$  et  $b$  étant deux nombres strictement positifs,  $a < b$  équivaut à  $1/b < 1/a$

**Démonstration :**

Autrement dit, deux nombres strictement positifs sont rangés dans l'ordre contraire de leur inverse.

**Exercice :**  $x$  est un réel tel que  $2 < x < 5$ . Donner un encadrement de  $A = x + 1/x$

### IV. Comparaison de $a$ , $a^2$ et $a^3$ lorsque $a > 0$

**Propriété :**  $a$  est un réel strictement positif.

1. Si  $a > 1$ , alors  $a^3 > a^2 > a$  ;      2. si  $a < 1$ , alors  $a^3 < a^2 < a$ .

**Démonstration :** De l'hypothèse  $a > 1$ , on déduit d'une part que  $a^2 > a$  (on multiplie les deux membres par  $a > 0$ ) et d'autre part que  $a^3 > a^2$  (on multiplie par  $a^2 > 0$ ). Donc  $a^3 > a^2 > a$ .

De la même façon, lorsque  $0 < a < 1$ , on démontre que  $a^3 < a^2 < a$ .

**Remarque :** pour  $a = 0$  et  $a = 1$ ,  $a = a^2 = a^3$

**Exercice :**  $x$  est un réel tel que  $3 < x < 4$ . On pose  $A = 4 - x$ .

Comparer les nombres  $A$ ,  $A^2$  et  $A^3$ .

### IV. Valeur absolue

#### a) Distance entre deux réels

**Définition :** La distance entre deux réels  $x$  et  $y$  est la différence entre le plus grand et le plus petit. Cette distance est notée  $|x - y|$  ou encore  $|y - x|$ .

$|x - y|$  se lit « valeur absolue de  $x$  moins  $y$  ».

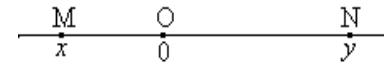
**Exemples :** •  $|3 - 5|$  est la distance entre les réels 3 et 5. Cette distance est égale à  $5 - 3 = 2$ .

•  $|-2 - 3|$  est la distance entre les réels -2 et 3. Cette distance est égale à  $3 - (-2) = 5$ .

## Interprétation graphique de $|x-y|$

Sur une droite graduée d'origine O, notons M le point d'abscisse  $x$  et N le point d'abscisse  $y$ .

$|x-y|$  est la distance entre les points M et N, c'est à dire MN.



$$|x-y| \leq$$

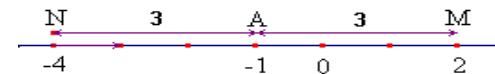
**Application :** Soient A, B et M trois points distincts d'une droite graduée. On note  $a$ ,  $b$  et  $x$  les abscisses respectives des points A, B et M.

L'égalité  $|x-a| = |x-b|$  se traduit par  $MA = MB$ , avec A, B et M alignés : cela signifie que M est le milieu du segment [AB].

**Exercice :** Trouver tous les nombres  $x$  tels que  $|x+1| = 3$ .

A et M sont les points d'abscisses respectives  $-1$  et  $x$  sur une droite graduée :

$$AM = |x - (-1)| = |x + 1|$$



Trouver tous les nombres  $x$  tels que  $|x+1| = 3$  revient donc à trouver les abscisses des points M de la droite graduée tels que  $AM = 3$ . Les nombres cherchés sont donc : 2 et  $-4$ .

## b) Valeur absolue d'un réel

Lorsque  $y = 0$ ,  $|x-y| = |x|$ . Le nombre réel  $|x|$  est alors la distance entre  $x$  et 0.

Donc : 
$$|x| = \begin{cases} x & \text{lorsque } x \geq 0 \\ -x & \text{lorsque } x < 0 \end{cases}$$

**Exemples :**  $|5| = 5$  car 5 est un nombre positif.  $|-3| = 3$  car  $-3$  est un nombre négatif.

Si  $x$  est un nombre réel,  $|x^2| = x^2$  car  $x^2 \geq 0$ .

## Propriétés :

1. Dire que  $|x| = 0$  équivaut à dire que  $x = 0$ .
2.  $|-x| = |x|$ .
3. Dire que  $|x| = |y|$  équivaut à dire que  $x = y$  ou  $x = -y$ .

## Exercice d'application :(8 (1) - série)

### c) L'inégalité $|x-a| \leq r$ ( $a$ et $r$ fixés, $r > 0$ )

**Propriété :**  $a$  est un réel,  $r$  est un réel strictement positif.

Dire que  $|x-a| \leq r$  équivaut à dire que  $x$  appartient à l'intervalle  $[a-r; a+r]$ .

**Démonstration :**  $|x - a| \leq r$  signifie que la distance de  $x$  à  $a$  est inférieure ou égale à  $r$ , c'est à dire que  $x$  appartient à l'ensemble représenté en rouge sur la figure ci-contre.

Donc  $|x - a| \leq r$  équivaut à dire que  $x$  appartient à  $[a - r; a + r]$  donc équivaut à dire que  $a - r \leq x \leq a + r$ .

## Exercice d'application : (8 (2) - série)

## VII. Encadrement d'un nombre.

### 1-Définition:

Soit  $x$  un nombre donné. Réaliser un encadrement de  $x$ , c'est trouver deux nombres  $a$  et  $b$  tels que  $a \leq x \leq b$ . Le nombre  $b - a$  est l'amplitude de cet encadrement.

### Exemples:

Donner un encadrement de  $\sqrt{3}$  d'amplitude 1, de  $\pi$  d'amplitude 0,1.

### 2-Encadrement d'une somme, d'un produit.

**Règle 1:** Si  $a \leq b$  et  $c \leq d$  alors  $a + c \leq b + d$

**Règle 2:** Si  $0 \leq a \leq b$  et  $0 \leq c \leq d$  alors  $0 \leq ac \leq bd$ .

## VI. Valeur approchée d'un nombre.

### Définition 1:

Soit  $a$  et  $x$  deux nombres et  $\varepsilon$  un nombre strictement positif. On dit que  $a$  est une valeur approchée (ou approximation) du nombre  $x$  à  $\varepsilon$  près (ou à la précision  $\varepsilon$ ) lorsque  $|x - a| \leq \varepsilon$

### Définition 2:

Soit  $a$  et  $x$  deux nombres et  $\varepsilon$  un nombre strictement positif. On dit que  $a$  est une valeur approchée (ou approximation) du nombre  $x$  à  $\varepsilon$  près (ou à la précision  $\varepsilon$ ), par défaut, lorsque  $a - \varepsilon \leq x \leq a + \varepsilon$ .  $a$  est une valeur approchée de  $x$  à  $\varepsilon$  près, par excès, lorsque  $a + \varepsilon \leq x \leq a - \varepsilon$ .

## Exercice d'application : (11,12,16,17- série)