

I. Ordre et opérations dans l'ensemble des nombres réels \mathbb{R} :

A. Ordre dans \mathbb{R} :

a. Activité :

a et b de l'ensemble \mathbb{R} .

1. Trouver une comparaison entre a et b pour les cas suivants :

- $(b-a) \in \mathbb{R}^+$ puis $(a-b) \in \mathbb{R}^+$.
- $(b-a) \in \mathbb{R}^{+*}$ puis $(b-a) \in \mathbb{R}^{+*}$.

2. Donner les définitions .

b. Définitions :

a et b de l'ensemble \mathbb{R} .

- ❖ a est inférieur ou égale à b équivaut à $(b-a) \in \mathbb{R}^+$ on note $a \leq b$.
- ❖ a est strictement inférieur à b équivaut à $(b-a) \in \mathbb{R}^{+*}$ on note $a < b$.
- ❖ a est supérieur ou égale à b équivaut à $(a-b) \in \mathbb{R}^+$ on note $a \geq b$.
- ❖ a est strictement supérieur à b équivaut à $(b-a) \in \mathbb{R}^{+*}$ on note $a > b$.

c. Exemple :

- On a : $\frac{2}{7} > \frac{1}{7}$ et $\sqrt{2} < 2$ et $-100 < 1$.
- Comparer les deux nombres : $a = 5 - \sqrt{3}$ et $b = 2\sqrt{3}$.

B. Propriétés de l'ordre et les opérations :

a. Activité :

1. Rappeler quelques propriétés ?

2. Démontrer une propriété .

b. propriétés :

a et b et c et d de \mathbb{R} .

- si $(a \leq b \text{ et } b \leq c)$ alors $a \leq c$. (l'ordre est transitive) .
- si $(a \leq b \text{ et } c \in \mathbb{R})$ alors $a+c \leq b+c$ et $a-c \leq b-c$.
- si $(a \leq b \text{ et } c \leq d)$ alors $a+c \leq b+d$ (l'ordre est compatible avec l'addition) .
- si $(c > 0 \text{ et } a \leq b)$ alors $a \times c \leq b \times c$ et $\frac{a}{c} \leq \frac{b}{c}$.
- si $(c < 0 \text{ et } a \leq b)$ alors $a \times c \geq b \times c$ et $\frac{a}{c} \geq \frac{b}{c}$.
- si **a et b** non nuls et de même signe on a : $a \leq b$ équivaut à $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$.
- Si **a et b** sont positifs on a $a \leq b$ équivaut à $a^2 \leq b^2$.
- Si **a et b** sont positifs on a $a \leq b$ équivaut à $a^n \leq b^n$ (avec $n \in \mathbb{N}$)
- Si **a et b** sont positifs on a $a \leq b$ équivaut à $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$.



c. Exercice : x est réel tel que : $1 \leq x \leq 7$ donner un encadrement du nombre $B = 2x + \frac{3}{x}$.

d. Remarques :

- L'écriture : $a \leq x$ et $x \leq b$ sera notée $a \leq x \leq b$. On lit x est compris entre a et b .
- L'écriture : $a < x$ et $x < b$ sera notée $a < x < b$. On lit x est strictement compris entre a et b .

II. Les intervalles –encadrement :

A. Intervalle :

a. Activité :

Compléter le tableau suivant :

Les intervalles bornés		
inégalités	Représentation sur une droite graduée	intervalles
$2 \leq x \leq 4$		$[2, 4] = \{x \in \mathbb{R} / 2 \leq x \leq 4\}$
$2 < x < 4$		
$2 < x \leq 4$		
$2 \leq x < 4$		
Les intervalles non bornés		
inégalités	Représentation sur une droite graduée	intervalles
$x > 1$		$]1, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} / x > 1\}$
$x \geq 1$		
$x < 3$		
$x \leq 2$		

b. Application :

On considère les intervalles suivants : $[1, 4]$; $] -2, 0[$ et $] -3, 2[$.

1. Donner la représentation des intervalles précédents.



2. Donner la longueur de chaque intervalle des intervalles précédents .
3. Préciser le centre de chaque intervalle des intervalles précédents .
4. Que représente chaque nombre des nombres suivants : 1,5 et 1 et 2,5 respectivement pour les intervalles suivants $[1,4]$; $]-2,0[$; $]-3,2[$.

c. Vocabulaire :

a et **b** de \mathbb{R} tel que : **a** < **b** .

Pour les intervalles suivants $[a,b]$ et $]a,b[$ et $[a,b[$ et $]a,b]$ on a :

- ❖ **a** et **b** sont appelés les extrémités de l'intervalles .
- ❖ Le nombre positif **b** - **a** est appelé la distance entre **a** et **b** .(sachant que $a < b$)
- ❖ Le nombre positif **b** - **a** est appelé la longueur (ou capacité) des intervalles précédents .
- ❖ Le nombre $x_0 = \frac{a+b}{2}$ représente le centre des intervalles précédents .
- ❖ Le nombre positif $r = \frac{b-a}{2}$ représente le rayon des intervalles précédents.
- ❖ Les deux symboles $-\infty$ et $+\infty$ ne sont pas des nombres .
- ❖ $\mathbb{R}_+^* = \mathbb{R}^{+*} =]0,+\infty[$; $\mathbb{R}^+ = [0,+\infty[$ et $\mathbb{R}_-^* = \mathbb{R}^{-*} =]-\infty,0[$; $\mathbb{R}^- =]-\infty,0]$ et $]a,a[= \emptyset$.
- ❖ \emptyset est un intervalle on l'appelle ensemble vide .

B. Encadrement :

a. Définition :

x est un nombre réel .

- Réaliser un encadrement du nombre **x** c'est trouver deux nombres réels **a** et **b** tel que **a** < **b** on a : $a \leq x \leq b$ ou bien $a < x \leq b$ ou bien $a \leq x < b$ ou bien $a < x < b$.
- Le nombre réel positif **b** - **a** s'appelle l'amplitude de cet encadrement .

b. Exercice :

1. Donner un encadrement de $\sqrt{2}$ d'amplitude 0,01.

2. Soit $x \in \left] \frac{1}{3}, 1 \right[$.

- Déterminer un encadrement du nombre $x+4$ et préciser son amplitude .
- En déduit un encadrement du nombre $\frac{x}{x+4}$ et préciser son amplitude .
- Vérifier que $\frac{x}{x+4} = 1 - \frac{4}{x+4}$
- Déterminer un encadrement du nombre $\frac{x}{x+4}$ d'amplitude $\frac{112}{65}$.

III. Intersections et réunions d'intervalles :

A. Intersections d'intervalles :

a. Définition :

A et **B** sont deux ensembles .

Tous les éléments communs de **A** et de **B** constituent l'ensembles noté $A \cap B$ appelé intersection de **A** et **B**. Donc : $A \cup B = \{x / x \in A \text{ et } x \in B\}$.

b. Remarque : $x \in A \cap B$ équivaut à $(x \in A \text{ et } x \in B)$.

c. Exemple : soient : $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et $B = \{-1, 2, 4, 6, 44, 50\}$.

d. Exemples pour les intervalles :

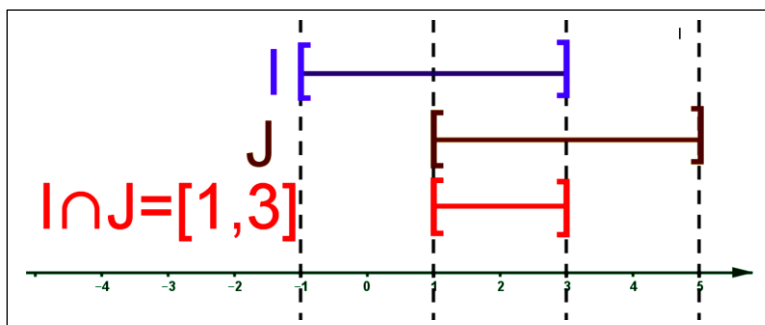
Remarque :

On va décaler les intervalles par rapport à l'axe gradué pour des raison de clarté du dessin en réalité la représentation graphique des intervalles reste toujours des parties de l'axe gradué .

➤ **Exemple 1 :**

$I = [-1, 3]$ (couleur violet) et $J = [1, 5]$ (couleur maron)

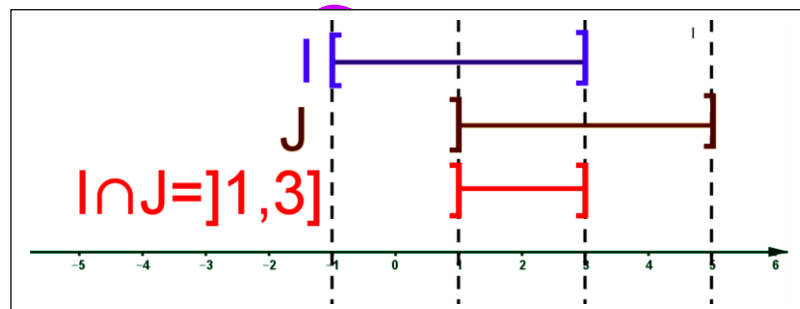
on a : $I \cap J = [-1, 3] \cap [1, 5] = [1, 3]$ intersection couleur rouge .



➤ **Exemple 2 :**

$I = [-1, 3]$ (couleur violet) et $J =]1, 5]$ (couleur maron)

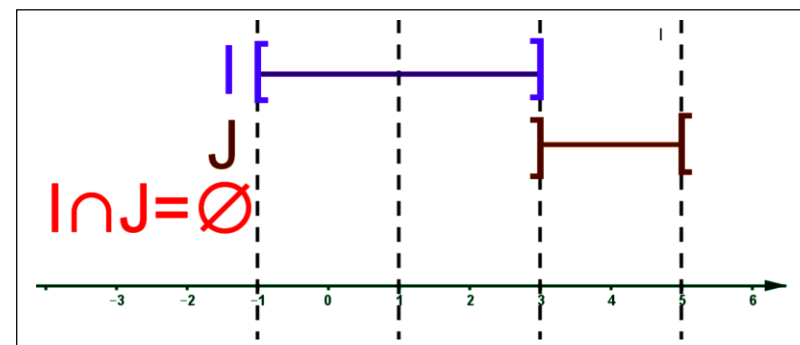
on a : $I \cap J = [-1, 3] \cap]1, 5] =]1, 3]$ intersection couleur rouge .



➤ **Exemple 3 :**

$I = [-1, 3]$ (couleur violet) et $J =]3, 5]$ (couleur maron)

on a : $I \cap J = [-1, 3] \cap]3, 5] = \emptyset$ intersection couleur rouge (pas de couleur)



B. Réunions d'intervalles :

a. Définition :

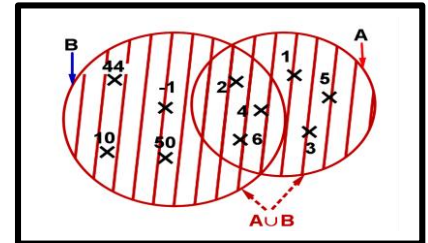
A et B sont deux ensembles .

Tous les éléments qui appartiennent soit à A ou soit à B constituent l'ensemble noté $A \cup B$, appelé union de A et B . Donc : $A \cup B = \{x / x \in A \text{ ou } x \in B\}$

b. Remarque : $x \in A \cup B$ équivaut à $(x \in A \text{ ou } x \in B)$.

c. Exemple : soient : $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

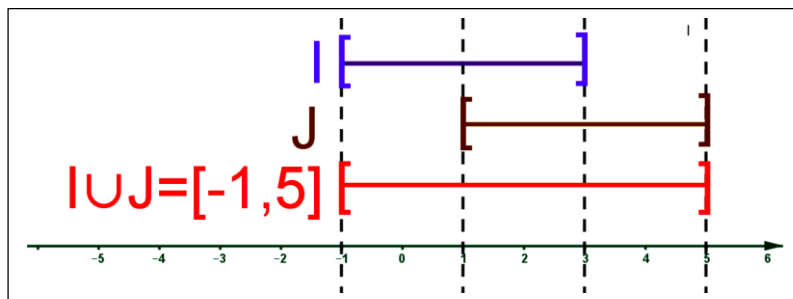
et $B = \{-1, 2, 4, 6, 44, 50\}$



➤ Exemple 1 :

$I = [-1, 3]$ (couleur violet) et $J = [1, 5]$ (couleur maron)

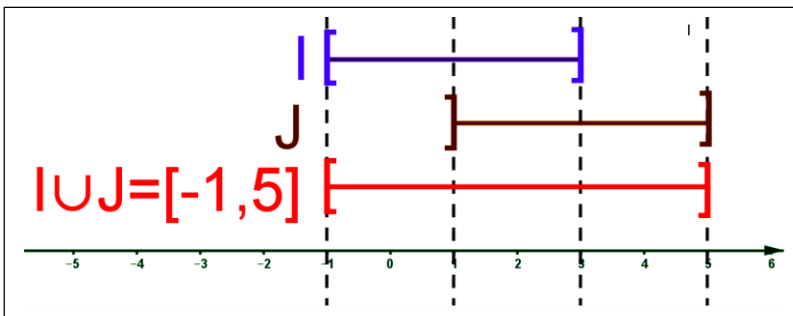
on a : $I \cup J = [-1, 3] \cup [1, 5] = [-1, 5]$ réunion couleur rouge .



➤ Exemple 2 :

$I = [-1, 3]$ (couleur violet) et $J =]1, 5]$ (couleur maron)

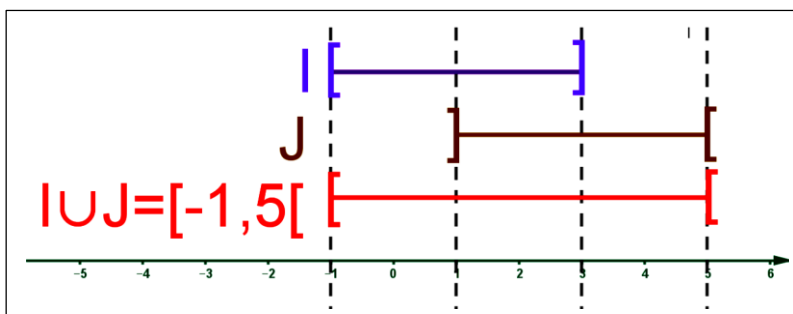
on a : $I \cup J = [-1, 3] \cup]1, 5] = [-1, 5]$ réunion couleur rouge .



➤ Exemple 3 :

$I = [-1, 3]$ (couleur violet) et $J =]3, 5]$ (couleur maron)

on a : $I \cup J = [-1, 3] \cup]3, 5] = [-1, 5]$ réunion couleur rouge .





IV. Valeur absolue d'un nombre réel et propriétés :

A. Valeur absolue d'un nombre réel :

a. Activité :

Soit une droite graduée d'origine O et d'unité de mesure $OI = 1$



1. Construire les points A et B et C d'abscisses 3 et -2 et 2.

2. Donner les distances suivantes : OA et OB et OC .

b. Vocabulaire :

- Le nombre positif $OA = 3$ est appelé la valeur absolue du nombre 3 on note $OA = 3 = |3|$.
- Le nombre positif $OB = 2$ est appelé la valeur absolue du nombre -2 on note $OB = 2 = |-2|$.
- Le nombre positif $OC = 2$ est appelé la valeur absolue du nombre 2 on note $OC = 2 = |2|$.

c. Définition :

x est un nombre réel . (D) est une droite graduée d'origine O et d'unité de mesure $OI = 1$

le point M est un point de (D) dont l'abscisse est x .

la valeur absolue du nombre x est la distance OM on note $OM = |x|$.

d. Remarques :

- $x \in [0, +\infty[$ (càd $x \geq 0$) on a : $|x| = x$.
- $x \in]-\infty, 0]$ (càd $x \leq 0$) on a : $|x| = -x$.
- $|0| = 0$ et $|-x| = |x|$ et $|x| \geq 0$

e. Exemples : $|1 - \sqrt{2}| = \sqrt{2} - 1$; $|- \sqrt{3}| = \sqrt{3}$; $|- \frac{3}{7}| = \frac{3}{7}$; $|\sqrt{5}| = \sqrt{5}$.

B. Propriétés de la valeur absolue :

a. Propriétés :

- Pour tout x de \mathbb{R} on a : $\sqrt{a^2} = |a|$.
- Pour tous a et b de \mathbb{R} on a : $|a \times b| = |a| \times |b|$ et $|a^n| = |a|^n$ $n \in \mathbb{N}$; $|a^{-n}| = |a|^{-n}$ ($a \neq 0$).
- Pour tous a et b de \mathbb{R} on a : $|a + b| \leq |a| + |b|$.
- Pour tout b de \mathbb{R}^* on a : $|\frac{1}{b}| = \frac{1}{|b|}$.
- Pour tout b de \mathbb{R}^* on a : $|\frac{a}{b}| = \frac{|a|}{|b|}$.
- Pour tout a et b de \mathbb{R} on a : $|a| = |b|$ équivaut à ($a = -b$ ou $a = b$).



b. Exemple :

Simplifier l'expression suivante $\sqrt{(2x-3)^2}$ sachant que $x \geq 2$.

C. Distance et la valeur absolue :

a. Définition :

Soit une droite graduée d'origine O . Notons A d'abscisse a et B d'abscisse b .

Le nombre positif $|b-a|$ est appelé la distance entre les points entre A et B .

on a : $AB = |b-a|$.

b. Exercice :

On considère la droite graduée suivante :

1. Trouver les nombres réels x qui vérifie :

- $|x| \leq 2$ puis $|x| \geq 2$.

- Donner la propriété .

2. Soient a et b de \mathbb{R} tel que : $a < b$.

- Déterminer x_0 le centre du segment $[a, b]$ puis déterminer r le rayon du segment $[a, b]$.

- Ecrire $[a, b]$ en fonction de x_0 et r .

- Montrer que : $|x - x_0| \leq r$ équivaut à $x_0 - r \leq x \leq x_0 + r$.



c. Propriétés :

Soit x de \mathbb{R} et r un nombre réel positif

❖ $|x| \leq r$ équivaut à $-r \leq x \leq r$.

❖ $|x| < r$ équivaut à $-r < x < r$.

❖ $|x| \geq r$ équivaut à $x \in]-\infty, r] \cup [r, +\infty[$.

❖ $|x| > r$ équivaut à $x \in]-\infty, r[\cup]r, +\infty[$.

❖ $|x - x_0| \leq r$ équivaut à $x_0 - r \leq x \leq x_0 + r$.

❖ On a : $[a, b] = [x_0 - r, x_0 + r]$ avec $x_0 = \frac{a+b}{2}$ centre de l'intervalle et $r = \frac{b-a}{2}$ son rayon

d. Exercice : Soit x de \mathbb{R} tel que : $|x-3| \leq 2$ déterminer l'intervalle $[a, b]$ tel que $x \in [a, b]$.

V. Approximation – Approximation décimale :

A. Approximation:

a. Définitions :

Soit x de \mathbb{R} et r un nombre réel strictement positif .

❖ On dit que a est une valeur approchée (ou approximation) de x à r près (ou à la précision r) lorsque x vérifie $|x - a| \leq r$.

❖ On dit que a est une valeur approchée par excès (ou approximation par excès) de x à r près (ou à la précision r) lorsque x vérifie $a \leq x \leq a + r$.

❖ On dit que a est une valeur approchée par défaut (ou approximation par défaut) de x à r près (ou à la précision r) lorsque x vérifie $a - r \leq x \leq a$.



b. Exercice :

1. Donner l'intervalle I de centre 2 et de 0,5 .

2. Soit x de I . 1. Déterminer l'intervalle J tel que $\frac{1}{x} \in J$.

2. déterminer une approximation du nombre $\frac{1}{x}$ à $\frac{2}{25}$ près (ou à la précision $\frac{2}{25}$).

c. Cas particulier :

Le nombre x vérifie : $a \leq x \leq a + r = b$ on a :

✓ Le nombre a est une valeur approchée par défaut de x à la précision $b - a$.

✓ Le nombre b est une valeur approchée par excès de x à la précision $b - a$.

✓ Le nombre $\frac{a+b}{2}$ est une valeur approchée par défaut de x à la précision $\frac{b-a}{2}$.

d. Exemple :

On a : $1,4142 \leq \sqrt{2} \leq 1,4143$.

✓ Le nombre 1,4142 est une valeur approchée par défaut de $\sqrt{2}$ à la précision 10^{-4} .
(car $b - a = 1,4143 - 1,4142 = 0,0001 = 10^{-4}$).

✓ Le nombre 1,4143 est une valeur approchée par excès de $\sqrt{2}$ à la précision 10^{-4} .
(car $b - a = 1,4143 - 1,4142 = 0,0001 = 10^{-4}$).

✓ Le nombre 1,41425 est une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à la précision 5×10^{-5} .
(car $\frac{b-a}{2} = \frac{1,4143 - 1,4142}{2} = \frac{0,0001}{2} = 0,00005 = 5 \times 10^{-5} = \frac{0,0001}{2}$)

B. Approximation décimale :

➤ La partie entière d'un nombre réel :

a. Activité :

Donner la partie entière des nombres suivants : 3 et 41,5 et -7 et -2,5 .

La partie entière de 21 est 21 on note $E(21) = 21$.

La partie entière de 2,14 est 2 on note $E(2,14) = 2$.

b. Définition :

Pour tout nombre réel x il existe un nombre entier relatif unique p tel que : $p \leq x < p + 1$.

Le nombre p s'appelle la partie entière de x , on note : $E(x) = p$.

➤ Approximation décimale :

a. Activité :

Prenons l'exemple précédent : on a $1,4142 \leq \sqrt{2} \leq 1,4143$ donc

$$14142 \times 10^{-4} \leq \sqrt{2} \leq (14142 + 1) \times 10^{-4}$$

On dit que :

▪ Le nombre 1,4142 s'appelle approximation décimale par défaut de $\sqrt{2}$ à la précision 10^{-4}



- Le nombre 1,4143 s'appelle approximation décimale par excès de $\sqrt{2}$ à la précision 10^{-4}

b. Définitions :

Soit x de \mathbb{R} et r un nombre réel et n est un nombre naturel tel que la partie entière du nombre $10^n \times x$ est p (c.à.d. $E(10^n \times x) = p$) ou bien $p \leq 10^n \times x < p + 1$ d'où :

- Le nombre décimal $p \times 10^{-n}$ est appelé approximation décimale par défaut du nombre x à la précision 10^{-n} (ou de l'ordre n).
- Le nombre décimal $(p + 1) \times 10^{-n}$ est appelé approximation décimale par excès du nombre x à la précision 10^{-n} (ou de l'ordre n).