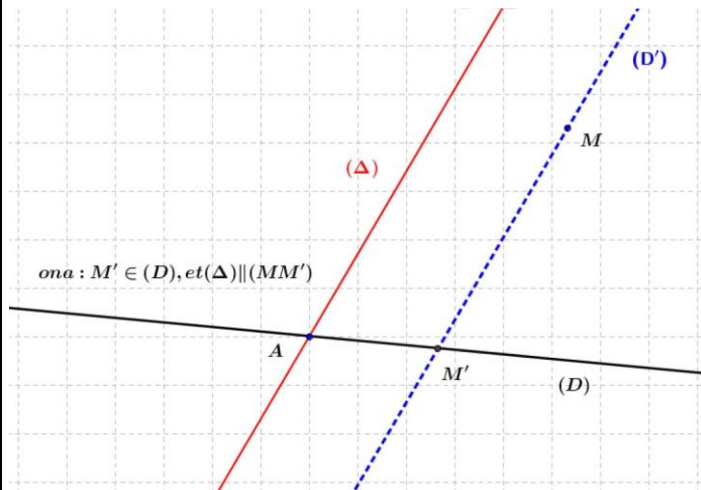


La projection dans le plan

I) La projection sur une droite parallèlement à une autre droite



1) Définition

Soient (D) et (Δ) deux droites sécantes en un point A , et soit M un point du plan. La droite qui passe par M et parallèle à (Δ) coupe (D) en un point M' . Le point M' s'appelle la projection du point M sur (D) parallèlement à (Δ) ou le projeté M sur (D) parallèlement à (Δ) ou l'image du point M par la projection $P_{(D;\Delta)}$ sur (D) parallèlement à (Δ) et on écrit : $P_{(D;\Delta)}(M) = M'$ ou $P(M) = M'$.

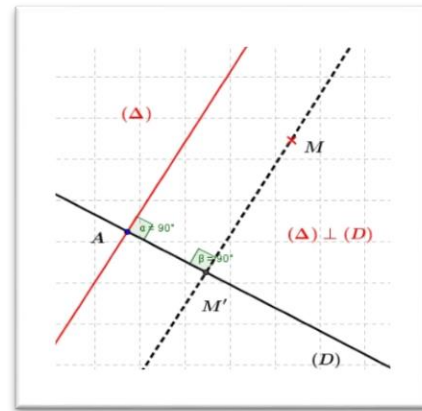
la droite (Δ) s'appelle la direction de la projection

$P(M) = M'$: M' l'image du point M par la projection P

si $B \in (D)$ alors $P(B) = B$ on dit alors que le point B est invariant par la projection P

2. Propriétés

- Chaque point de (D) est confondu avec sa projection
- Est tout point confondu avec sa projection est un point de (D)
- On dit que la droite (D) est invariante par la projection sur (D) parallèlement à (Δ)



Cas particulier

Si les droites (D) et (Δ) sont perpendiculaires (on dit aussi orthogonales) on dit que M' est la projection orthogonale de M sur (D)

Exercice1 : Soit ABC est un triangle et M le milieu de $[AB]$

- 1) Soit P_1 la projection sur (BC) parallèlement à (AC) . Déterminer : $P_1(A)$, $P_1(C)$, $P_1(B)$, $P_1(M)$.
- 2) Soit P_2 la projection sur (AC) parallèlement à (BC) . Déterminer : $P_2(A)$, $P_2(C)$, $P_2(B)$, $P_2(M)$.

Réponse : 1) soit P_1 la projection sur (BC) parallèlement à (AC)

On a $A \in (AC)$ et $(AC) \cap (BC) = \{C\}$ donc $P_1(A) = C$

On a $B \in (BC)$ donc B est invariante par la projection P_1 donc $P_1(B) = B$

On a $C \in (BC)$ donc C est invariante par la projection P_1 donc $P_1(C) = C$

Soit $M' = P_1(M)$ on a M le milieu de $[AB]$

La parallèle à (AC) passant par M passe forcément par le milieu de $[BC]$ donc M' est le milieu de $[BC]$

- 1) soit: P_2 la projection sur (AC) parallèlement à (BC)

On a $A \in (AC)$ donc $P_2(A) = A$

On a $C \in (AC)$ donc C est invariante par la projection

P_2 donc $P_2(C) = C$

On a $B \in (BC)$ et $(AC) \cap (BC) = \{C\}$ donc

$P_2(B) = C$

On a M le milieu de [AB] donc la parallèle à (BC) passant par M coupe [AC] en son milieu

soit : M'' ce milieu donc $P_2(M) = M''$

3. La projection d'un segment et de son milieu sur une droite parallèlement à une autre droite

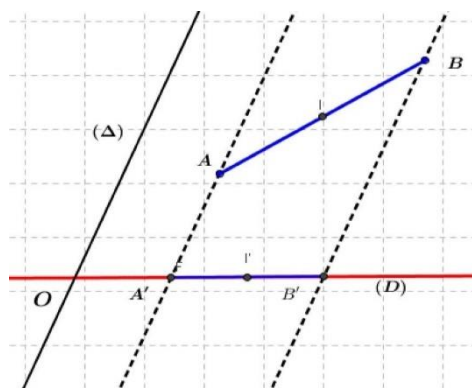
Soi A et B deux points du plan et A' et B' sont respectivement leur projection P sur (D) parallèlement à (Δ)

Propriété 1 : L'image du segment [AB] par la projection P est le segment [A'B'] et on écrit :

$$P([AB]) = [A'B']$$

Propriété 2 : Si I est le milieu de [AB] alors

$P(I) = I'$ est le milieu du segment [A'B']



On dit que la projection conserve les milieux

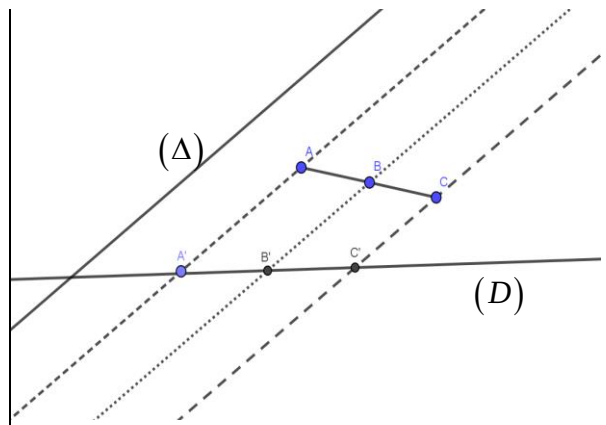
Remarque :

on a : $P([AB]) = [A'B']$ donc pour tout point M du segment [AB] : $P(M) = M' \in [A'B']$

II) Théorème de Thales et son théorème réciproque

1) Théorème de Thales :

Soient (D) et (Δ) deux droites sécantes en un point, et soient A ; B ; C trois points alignés du plan tel que (AB) et (Δ) ne sont pas parallèles



soient A' ; B' ; C' respectivement les projetés des points A ; B ; C sur (D) parallèlement à (Δ)

$$\text{Alors : } \frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'}$$

2) Théorème de Thales avec les vecteurs :

Soient A' ; B' ; C' respectivement les projetés des points A ; B ; C sur droite (D) parallèlement à (Δ)

Si $\vec{AB} = k \vec{AC}$ avec $k \in \mathbb{R}$ Alors : $\vec{A'B'} = k \vec{A'C'}$

On dit que la projection conserve le coefficient d'alignement de trois points

Exercice 2 : Soient ABC est un triangle et M un point définie par : $\vec{AM} = \frac{2}{3} \vec{AB}$

1) Construire le point M' le projeté de M sur la droite (AC) parallèlement à (BC)

2) Montrer que $\vec{AM'} = \frac{2}{3} \vec{AC}$ et en déduire que

$$\vec{MM'} = \frac{2}{3} \vec{BC}$$

Réponse : 1) soit : P la projection sur (AC) parallèlement à (BC)

On a $A \in (AC)$ donc A est invariante par la projection P donc $P(A) = A$

On a $C \in (BC)$ donc C est invariante par la projection P donc $P(C) = C$

On a aussi : $P(B) = C$

Et puisque $\vec{AM} = \frac{2}{3} \vec{AB}$ et la projection conserve le coefficient d'alignement de trois points

Alors : $\overrightarrow{AM'} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AC}$

On a

$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AM'} = -\frac{2}{3} \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3} \overrightarrow{AC} = \frac{2}{3} (-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \frac{2}{3} \overrightarrow{BC}$$

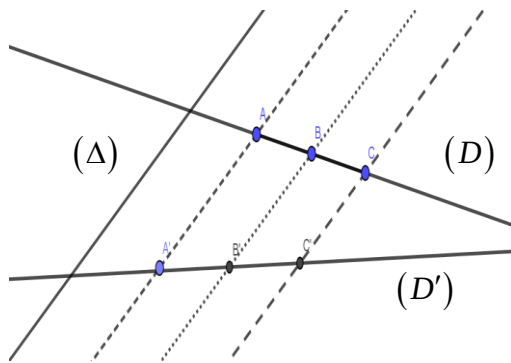
3) le théorème réciproque de Thales

Soient (D) et (D') deux droites non parallèles à une troisième (Δ) , et soient $A ; B$ deux points de la droite (D) tel que A' et B' respectivement les projetés des points $A ; B$ sur (D') parallèlement à (Δ)

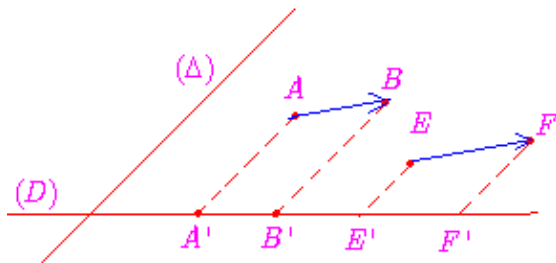
Si C un point de la droite (D) et C' un point de la droite (D') tel que $\frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'}$

Et les points $A ; B$ et C sont dans le même ordre sur la droite (D) que les points $A' ; B'$ et C' sur la droite (D')

Alors : le point C' est la projection de C sur la droite (D') parallèlement à (Δ) et on a $(AA') \parallel (BB') \parallel (CC')$



Propriété : soit $P = P_{(D'; \Delta)}$



Si : $\overrightarrow{AB} = k \overrightarrow{EF}$ et $P(B) = B' ; P(A) = A' ; P(E) = E' \text{ et } P(F) = F'$

Alors : $\overrightarrow{A'B'} = k \overrightarrow{E'F'}$

On dit que la projection conserve le coefficient de colinéarité de deux vecteurs

Soient (Δ) et (Δ') deux droites sécantes et $A ; B ; C ; D$ des points distinctes et $k \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AB} = k \overrightarrow{CD}$ ET si $A' ; B' ; C'$ et D' respectivement les projetés des points $A ; B ; C$ et D sur la droite (Δ') parallèlement à (Δ)

Alors : $\overrightarrow{A'B'} = k \overrightarrow{C'D'}$

On dit que la projection conserve le coefficient de colinéarité de deux vecteurs

Exercice3 : (réciproque de Thales):

Soient ABC est un triangle et I et I' deux points tel que : $\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AC}$

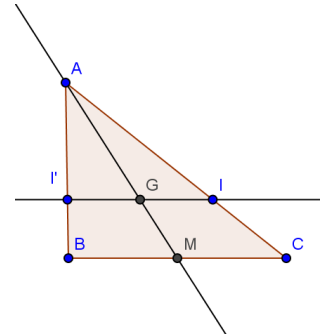
et $\overrightarrow{AI'} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AB}$

1) Montrer que I' est par la projection de I sur la droite (AB) parallèlement à (BC)

2) soit M est le milieu de

$[BC]$; la droite (AM) coupe la droite (II') en G

Montrer que $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AM}$



Réponse : 1) On a $\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AC}$ donc $\|\overrightarrow{AI}\| = \left\| \frac{2}{3} \overrightarrow{AC} \right\|$

donc $AI = \frac{2}{3} AC$ donc $\frac{AI}{AC} = \frac{2}{3}$ ①

Et on a : $\overrightarrow{AI'} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AB}$ donc $\|\overrightarrow{AI'}\| = \left\| \frac{2}{3} \overrightarrow{AB} \right\|$ donc

$AI' = \frac{2}{3} AB$ donc $\frac{AI'}{AB} = \frac{2}{3}$ ②

D'après ① et ② on a $\frac{AI}{AC} = \frac{AI'}{AB}$ et d'après

la réciproque de Thales : $(II') \parallel (BC)$

Et puisque (AB) coupe (II') en I' donc I' est la projection de I sur la droite (AB) parallèlement à (BC)

2) On a I' est la projection de I sur la droite (AB) parallèlement à (BC) et M est le milieu

de $[BC]$ Mq : $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AM}$???

On considère P la projection sur (AM)

Parallèlement à (BC)

On a $A \in (AM)$ donc A est invariante par la projection

P donc $P(A) = A$ ❶

la parallèle à (BC) passant par C est (BC) elle

coupe (AM) en M donc $P(C) = M$ ❷

la parallèle à (BC) passant par I est (II') elle

coupe (AM) en G donc $P(I) = G$ ❸

Et on a en plus $\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ ❹ donc D'après ❶ et ❷

et ❸ et ❹ on a $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$ car la projection

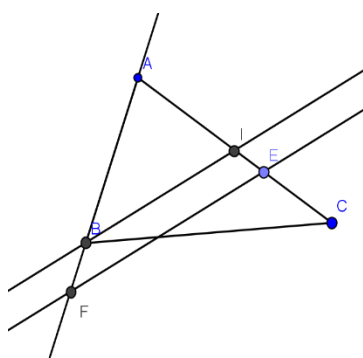
conserve le coefficient d'alignement de trois points

Exercice4 : Soient ABC est un triangle et I le milieu de [AC]. E un point de (AC) tel que :

$$\overrightarrow{IE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{IC} \text{ et } P_{((AB);(IB))}(E) = F$$

Faire une figure et montrer que : $\overrightarrow{BF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

Solution :



On a : $\overrightarrow{IE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{IC}$ et I le milieu de [AC]

Donc : $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IC}$ donc : $\overrightarrow{IE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AI}$

Et on a : $P_{((AB);(IB))}(E) = F$ et $P_{((AB);(IB))}(I) = B$

et $P_{((AB);(IB))}(A) = A$

Et puisque la projection conserve le coefficient d'alignement de trois points alors :

$$\overrightarrow{BF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$$

Exercice5 : Soient ABC est un triangle et I le milieu de [AC]

E un point tel que : $\overrightarrow{BC} = 4\overrightarrow{BE}$

La droite qui passe par E et parallèle à (IB)

coupe (AC) en J

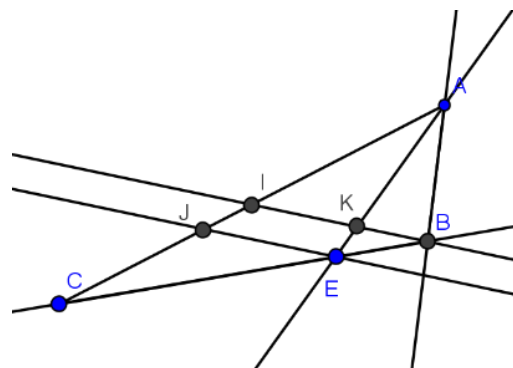
1)montrer que $\overrightarrow{IC} = 4\overrightarrow{IJ}$ et en déduire que :

$$\overrightarrow{AJ} = 5\overrightarrow{IJ}$$

2)si $(IB) \cap (AE) = \{K\}$ montrer que :

$$\overrightarrow{AE} = 5\overrightarrow{KE}$$

Solution : 1)soit $P_{((AC);(IB))}$ la projection sur (AC) parallèlement à (IB)



On a : $\overrightarrow{BC} = 4\overrightarrow{BE}$ et $P_{((AC);(IB))}(B) = I$ et

$P_{((AC);(IB))}(E) = J$ et $P_{((AC);(IB))}(C) = C$ et puisque la projection conserve le coefficient d'alignement



de trois points alors : $\overrightarrow{IC} = 4\overrightarrow{IJ}$

La déduction :

On a $\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IJ}$ et I le milieu de [AC]

Donc : $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IC}$ et par suite :

$$\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{IJ} = 4\overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{IJ} = 5\overrightarrow{IJ}$$

2) soit $P_{((AE);(IB))}$ la projection sur (AE) parallèlement à (IB)

On a : $\overrightarrow{AJ} = 5\overrightarrow{IJ}$ et $P_{((AE);(IB))}(A) = A$ et

$P_{((AE);(IB))}(I) = K$ et $P_{((AE);(IB))}(J) = E$

et puisque la projection conserve le coefficient d'alignement de trois points alors : $\overrightarrow{AE} = 5\overrightarrow{KE}$

C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices

Que l'on devient un mathématicien

