

EXERCICES

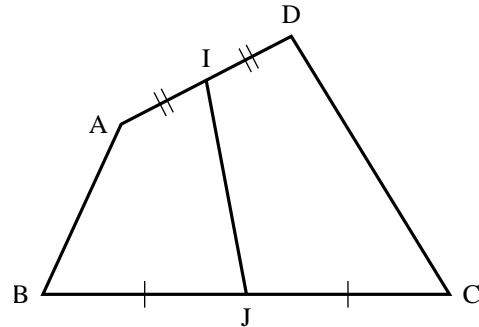
## Série d'exercice sur les vecteurs; colinéarité angle orienté et Trigonométrie

### Rappels sur les vecteurs

#### EXERCICE 1

ABCD est un quadrilatère quelconque, I le milieu de [AD] et J celui de [BC].

- 1) Écrire  $\vec{IJ}$  comme la somme de  $\vec{AB}$  et de deux autres vecteurs que l'on précisera.
- 2) Décomposer le même  $\vec{IJ}$  en utilisant  $\vec{DC}$ .
- 3) En déduire que  $2\vec{IJ} = \vec{AB} + \vec{DC}$ .



#### EXERCICE 2

ABCD est un parallélogramme de centre O, I est le milieu de [AB] et J le point tel que  $\vec{DJ} = \vec{OC}$ .

- 1) Exprimer  $\vec{OI}$  en fonction de  $\vec{BC}$ .
- 2) Justifier les égalité :  $\vec{BC} = \vec{OD} + \vec{OC} = \vec{OJ}$ .
- 3) Quel théorème vous permet de conclure que O, I et J sont alignés ?

#### EXERCICE 3

ABC est un triangle, E est tel que  $\vec{AE} = \frac{1}{3}\vec{BC}$ , I est tel que  $\vec{CI} = \frac{2}{3}\vec{CB}$  et F est tel que  $\vec{AF} = \frac{1}{3}\vec{AC}$ . Démontrer que I, E et F sont alignés.

#### EXERCICE 4

ABCD est un parallélogramme, M, N, Q sont tels que :

$$\vec{DM} = \frac{4}{5}\vec{DA}, \quad \vec{AN} = \frac{3}{4}\vec{AB}, \quad \vec{CQ} = \frac{2}{3}\vec{CD}$$

La parallèle à (MQ) menée par N coupe (BC) en P. Il s'agit de trouver le coefficient  $k$  de colinéarité tel que  $\vec{BP} = k\vec{AD}$ . Considérons le repère  $(A, \vec{AB}, \vec{AD})$ .

- 1) Calculer les coordonnées des points M, N et Q.
- 2) Justifier que P a pour coordonnées  $(1; k)$ .
- 3) En déduire que les vecteurs  $\vec{MQ}$  et  $\vec{NP}$  sont colinéaires et calculer  $k$ .



c)  $A(4; 2)$  et  $B(4; -3)$

d)  $A(2; -2)$  et  $B(4; -2)$

### EXERCICE 11

On donne une équation cartésienne de la droite  $d$  :  $2x - 3y + 5 = 0$

1) a) Donner un vecteur directeur de la droite  $d$ .

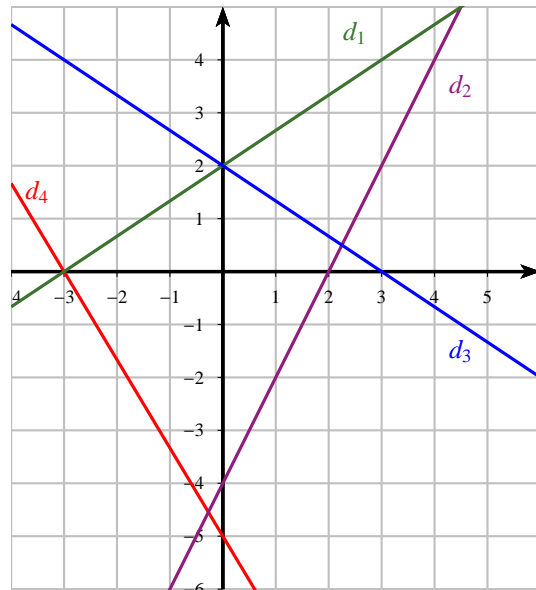
b) Quel est le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine de son équation réduite ?

2) Le point A d'ordonnée  $\frac{3}{2}$  est un point de  $d$ . Quelle est son abscisse ?

### EXERCICE 12

Les droites  $d_1, d_2, d_3$  et  $d_4$  sont représentées ci-contre.

Déterminer une équation cartésienne pour chacune de ces droites.



### EXERCICE 13

On donne les équations cartésiennes des droites  $d$  et  $d'$  suivantes :

$d : 7x - 3y + 2 = 0$  et  $d' : 5x - 2y - 8 = 0$

a) Démontrer que les droites  $d$  et  $d'$  sont sécantes.

b) Quelles sont les coordonnées de leur point d'intersection ?

### EXERCICE 14

Les droites  $d_1$  et  $d_2$  ont respectivement comme équation cartésienne

$d_1 : 3x - 2y - 8 = 0$  et  $d_2 : 5x + 4y - 6 = 0$ .

La droite  $\Delta$  a pour équation :  $2mx - (m + 1)y - 8 = 0$

Comment choisir le paramètre  $m$  pour que ces trois droites soient concourantes ?

### EXERCICE 15

Trouver une équation de la droite  $\Delta$  passant par le point  $A(-1; 4)$  et parallèle à la droite  $d$  d'équation  $3x - 2y + 1 = 0$

### EXERCICE 16

Pour quelle valeur du paramètre  $m$  la droite  $d$  d'équation  $mx - 3y + 2 = 0$  est-elle parallèle à la droite  $\Delta$  d'équation  $3x - 2y + 4 = 0$

## Le radian et le cercle trigonométrique

### EXERCICE 17

Convertir en radians les mesures données en degrés :

$$10^\circ ; 59^\circ ; 180^\circ ; 18^\circ ; 72^\circ ; 112,5^\circ$$

### EXERCICE 18

Convertir en degré les mesures données en radians :

$$\frac{\pi}{3} ; \frac{2\pi}{3} ; \pi ; \frac{5\pi}{4} ; \frac{3\pi}{8} ; \frac{5\pi}{12} ; \frac{3\pi}{2}$$

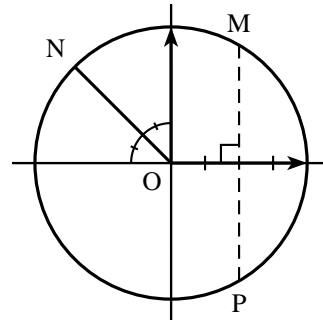
### EXERCICE 19

Tracer un cercle trigonométrique puis placer les points images des angles en radians suivants :

$$\text{a) } \pi \quad \text{b) } \frac{\pi}{4} \quad \text{c) } \frac{3\pi}{2} \quad \text{d) } \frac{\pi}{6} \quad \text{e) } -\frac{\pi}{3} \quad \text{f) } -\frac{3\pi}{4} \quad \text{g) } \frac{5\pi}{6} \quad \text{h) } -\frac{3\pi}{2}$$

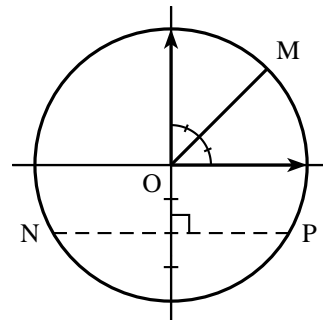
### EXERCICE 20

Utiliser les renseignements portés sur la figure pour déterminer les angles sur  $[0 ; 2\pi]$  repérant les points M, N et P.



### EXERCICE 21

Utiliser les renseignements portés sur la figure pour déterminer les angles sur  $[-\pi ; \pi]$  repérant les points M, N et P.



### EXERCICE 22

Sur le cercle trigonométrique colorier l'arc décrit par l'intervalle  $I$  dans les cas suivants :

$$I = \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}\right] ; \quad I = \left[\frac{4\pi}{3}; \frac{13\pi}{6}\right] ; \quad I = \left[-\frac{7\pi}{6}; \frac{5\pi}{4}\right]$$

### Mesure principale

#### EXERCICE 23

Dans chaque cas, trouver la mesure principale de l'angle orienté de mesure  $\alpha$  donnée :

- a)  $\alpha = \frac{7\pi}{2}$       b)  $\alpha = -\frac{4\pi}{3}$       c)  $\alpha = \frac{35\pi}{6}$       d)  $\alpha = -\frac{21\pi}{4}$   
 e)  $\alpha = \frac{202\pi}{3}$       f)  $\alpha = 330^\circ$

### Propriétés des angles orienté

#### EXERCICE 24

On donne la mesure de l'angle orienté suivant :  $(\vec{u}, \vec{v}) = -\frac{\pi}{6}$ .

Donner la mesure de chacun des angles orientés indiqués.

- a)  $(\vec{v}, 2\vec{u})$       b)  $(\vec{v}, -3\vec{u})$       c)  $(-3\vec{u}, 2\vec{v})$       d)  $(-\vec{v}, -\vec{u})$

#### EXERCICE 25

ABC est un triangle rectangle direct en A tel que :  $(\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{CB}) = \frac{\pi}{5}$

Calculer la mesure principale de  $(\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{CB})$

#### EXERCICE 26

AIL est un triangle équilatéral tel que  $(\overrightarrow{AI}; \overrightarrow{AL}) = \frac{\pi}{3}$ .

Les triangles BAL et CIL sont rectangles isocèles avec  $(\overrightarrow{LB}; \overrightarrow{LA}) = (\overrightarrow{IL}; \overrightarrow{IC}) = \frac{\pi}{2}$ .

Le but de l'exercice est de calculer  $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$  et d'en tirer une conséquence.

- a) Faire une figure.  
 b) Quel théorème vous permet d'écrire :  $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AL}) + (\overrightarrow{AL}; \overrightarrow{AI}) + (\overrightarrow{AI}; \overrightarrow{AC})$   
 Quel est la mesure de l'angle géométrique  $\widehat{IAC}$  ?  
 En déduire une mesure de :  $(\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AC})$  et  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ .  
 c) Que pouvez vous dire des point A, B et C ?

### Lignes trigonométriques

#### EXERCICE 27

Trouver les valeurs exactes du cosinus, sinus puis de la tangente des réels donnés. Vous pourrez commencer par placer les points sur le cercle trigonométrique.

- a)  $\frac{\pi}{6}$       b)  $\frac{5\pi}{6}$       c)  $\frac{7\pi}{6}$       d)  $\frac{11\pi}{6}$       e)  $\frac{13\pi}{6}$

### EXERCICE 28

Trouver les valeurs exactes du cosinus, sinus puis de la tangente des réels donnés. Vous pourrez commencer par placer les points sur le cercle trigonométrique.

- a)  $\frac{\pi}{4}$       b)  $\frac{9\pi}{4}$       c)  $\frac{5\pi}{4}$       d)  $\frac{81\pi}{4}$       e)  $-\frac{108\pi}{4}$

### EXERCICE 29

Trouver les valeurs exactes du cosinus, sinus puis de la tangente des réels donnés. Vous pourrez commencer par placer les points sur le cercle trigonométrique.

- a)  $\frac{4\pi}{3}$       b)  $\frac{\pi}{3}$       c)  $\frac{71\pi}{3}$       d)  $\frac{97\pi}{3}$       e)  $-\frac{54\pi}{3}$

### Relations trigonométriques

### EXERCICE 30

À l'aide de la formule  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$  et de  $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ ,

- a) Déterminer  $\cos x$  sachant que :  $\sin x = \frac{2}{3}$  et  $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$   
 b) Déterminer  $\sin x$  sachant que :  $\cos x = -\frac{1}{5}$  et  $x \in [-\pi; 0]$   
 c) Déterminer  $\cos x$  et  $\tan x$  sachant que :  $\sin x = \frac{\sqrt{5}}{3}$  et  $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$

### EXERCICE 31

Dans chacun des cas suivants, calculer  $\cos x$  ou  $\sin x$  puis  $\tan x$ .

- a)  $\sin x = -\frac{1}{4}$  et  $x \in \left]-\frac{\pi}{2}; 0\right[$ .      b)  $\cos x = \frac{3}{5}$  et  $x \in \left]\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right[$ .  
 c)  $\cos x = -\frac{1}{3}$  et  $x \in \left]\frac{\pi}{2}; \pi\right[$ .

### EXERCICE 32

Démontrer que pour tout réel  $x$  on a :

- a)  $(\cos x + \sin x)^2 + (\cos x - \sin x)^2 = 2$   
 b)  $(\cos x + \sin x)^2 - (\cos x - \sin x)^2 = 4 \cos x \sin x$

### EXERCICE 33

Exprimer à l'aide de  $\sin x$  et  $\cos x$ , les expressions suivantes :

- a)  $\sin(-x) + \cos(-x)$   
 b)  $\sin(-x) - \sin(\pi + x)$   
 c)  $\cos(\pi - x) + \cos(3\pi + x)$   
 d)  $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - 3 \cos\left(-\frac{\pi}{2} - x\right) - 4 \sin(\pi - x)$

## Équations trigonométriques

### EXERCICE 34

À l'aide d'un cercle trigonométrique, résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations suivantes :

a)  $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

b)  $\sin x = 0$

c)  $2 \sin x + \sqrt{3} = 0$

### EXERCICE 35

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  puis visualiser les solutions dans le cercle trigonométrique des équations suivantes :

a)  $2 \sin \left( x + \frac{\pi}{4} \right) - 1 = 0$

b)  $1 - \sqrt{2} \cos \left( \frac{\pi}{3} - x \right) = 0$

c)  $\sin \left( 2x - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{2}$

d)  $\cos \left( 2x - \frac{\pi}{3} \right) = \frac{1}{2}$

### EXERCICE 36

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  puis visualiser les solutions dans le cercle trigonométrique des équations suivantes :

a)  $\cos 2x = \cos \left( x + \frac{\pi}{4} \right)$

b)  $\sin \left( x - \frac{\pi}{6} \right) = \sin \left( 3x + \frac{\pi}{3} \right)$

c)  $\sin \left( 2x - \frac{\pi}{6} \right) = \cos \left( x + \frac{\pi}{4} \right)$

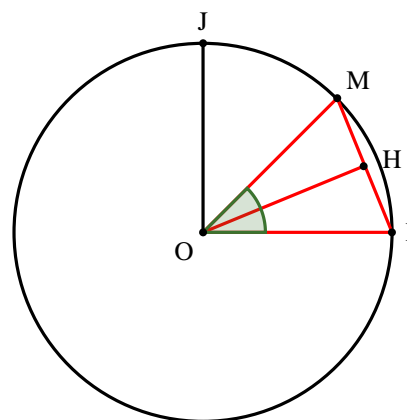
d)  $\cos x = \sin \left( x + \frac{\pi}{4} \right)$

### EXERCICE 37

Calcul de sinus et cosinus  $\frac{\pi}{8}$

$\mathcal{C}$  est le cercle trigonométrique associé à un repère orthonormé direct  $(O, I, J)$  du plan.  
M est le point de  $\mathcal{C}$  tel que  $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}) = \frac{\pi}{4} [2\pi]$ .

- 1) Quelles sont les coordonnées du point M dans le repère  $(O, I, J)$  ?
- 2) Calculer la distance IM.
- 3) a) Démontrer que :  $IM = 2 \times \sin \frac{\pi}{8}$ .  
b) En déduire la valeur exacte de  $\sin \frac{\pi}{8}$ .
- 4) Calculer la valeur exacte de  $\cos \frac{\pi}{8}$ .
- 5) Déduire des questions précédentes, les lignes trigonométriques de :  $\frac{7\pi}{8}$ ,  $\frac{9\pi}{8}$ ,  $\frac{5\pi}{8}$  et  $\frac{3\pi}{8}$ .



**EXERCICE 38**

**Calcul de sinus et cosinus  $\frac{\pi}{12}$**

$\mathcal{C}$  est le cercle trigonométrique associé à un repère orthonormé direct (O , I , J) du plan.

M est le point de  $\mathcal{C}$  tel que  $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}) = \frac{\pi}{6} [2\pi]$ .

1) Quelles sont les coordonnées du point M dans le repère (O , I , J) ?

2) Calculer la distance IM.

3) a) Démontrer que :  $IM = 2 \times \sin \frac{\pi}{12}$ .

b) En déduire la valeur exacte de  $\sin \frac{\pi}{12}$ .

c) Montrer que l'on peut mettre  $\sin \frac{\pi}{12}$  sous la forme  $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

4) a) Calculer la valeur exacte de  $\cos \frac{\pi}{12}$ .

b) Montrer que l'on peut mettre  $\cos \frac{\pi}{12}$  sous la forme  $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$

5) Déduire des questions précédentes, les lignes trigonométriques de :

$$\frac{11\pi}{12}, \frac{13\pi}{12}, \frac{5\pi}{12} \text{ et } \frac{7\pi}{8}.$$