

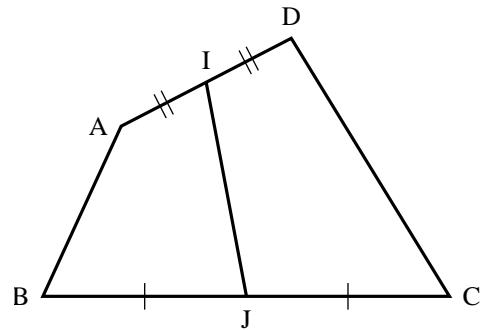
EXERCICES

Série d'exercice sur les vecteurs; colinéarité angle orienté et Trigonométrie

Rappels sur les vecteurs**EXERCICE 1**

ABCD est un quadrilatère quelconque, I le milieu de [AD] et J celui de [BC].

- 1) Écrire \overrightarrow{IJ} comme la somme de \overrightarrow{AB} et de deux autres vecteurs que l'on précisera.
- 2) Décomposer le même \overrightarrow{IJ} en utilisant \overrightarrow{DC} .
- 3) En déduire que $2\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$.

**EXERCICE 2**

ABCD est un parallélogramme de centre O, I est le milieu de [AB] et J le point tel que $\overrightarrow{DJ} = \overrightarrow{OC}$.

- 1) Exprimer \overrightarrow{OI} en fonction de \overrightarrow{BC} .
- 2) Justifier les égalités : $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OJ}$.
- 3) Quel théorème vous permet de conclure que O, I et J sont alignés ?

EXERCICE 3

ABC est un triangle, E est tel que $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$, I est tel que $\overrightarrow{CI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$ et F est tel que $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$. Démontrer que I, E et F sont alignés.

EXERCICE 4

ABCD est un parallélogramme, M, N, Q sont tels que :

$$\overrightarrow{DM} = \frac{4}{5}\overrightarrow{DA}, \quad \overrightarrow{AN} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{CQ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CD}$$

La parallèle à (MQ) menée par N coupe (BC) en P. Il s'agit de trouver le coefficient k de colinéarité tel que $\overrightarrow{BP} = k\overrightarrow{AD}$. Considérons le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$.

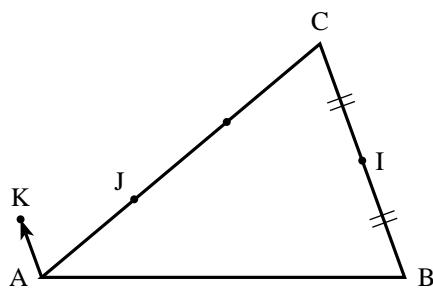
- 1) Calculer les coordonnées des points M, N et Q.
- 2) Justifier que P a pour coordonnées $(1; k)$.
- 3) En déduire que les vecteurs \overrightarrow{MQ} et \overrightarrow{NP} sont colinéaires et calculer k .

EXERCICE 5

Sur la figure ci-contre, I est le milieu de $[BC]$, J et K sont les points tels que :

$$\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$$

On considère le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$. Calculer les coordonnées de I, J et K puis prouver que I, J et K sont alignés.



Coordonnées et repère orthonormé

EXERCICE 6

Dans chacun des cas suivants, dire si les points A, B et C sont alignés.

a) $A(-1 ; 1)$, $B\left(\frac{1}{2} ; 2\right)$, $C\left(-\frac{3}{4} ; \frac{7}{6}\right)$

b) $A(-5; 2)$, $B(3 ; -1)$, $C(8 ; -3)$

EXERCICE 7

On donne les points $A(-2 ; 3)$, $B(4 ; 5)$, $C(27 ; 9)$. Démontrer que les droites (AB) et (OC) sont parallèles.

EXERCICE 8

On donne les points $A(-1 ; 2)$, $B(1 ; 4)$, $C(2 ; -3)$ et la droite d d'équation $x = 5$.

a) Faire une figure dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j})

b) M est un point de la droite d tel que les droites (AB) et (CM) sont parallèles. Déterminer l'ordonnée du point M.

EXERCICE 9

On donne les points $A(-3 ; 1)$, $B(2 ; 6)$, $C(2 ; -4)$ et $D(7 ; 6)$. Les points I et J sont les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[DC]$.

Les points M et N sont définis par : $5\overrightarrow{DM} = \overrightarrow{DB}$ et $5\overrightarrow{CN} = \overrightarrow{CA}$

a) Calculer les coordonnées de I, J, M et N.

b) Le point K étant le milieu du segment $[MN]$, démontrer que les points I, J et K sont alignés.

Équation cartésienne d'une droite

EXERCICE 10

On donne les coordonnées des points A et B, déterminer une équation cartésienne de la droite (AB) dans les cas suivants :

a) $A(1 ; 5)$ et $B(-3 ; 2)$

b) $A(3 ; 0)$ et $B(0 ; 2)$

c) A(4 ; 2) et B(4 ; -3)

d) A(2 ; -2) et B(4 ; -2)

EXERCICE 11

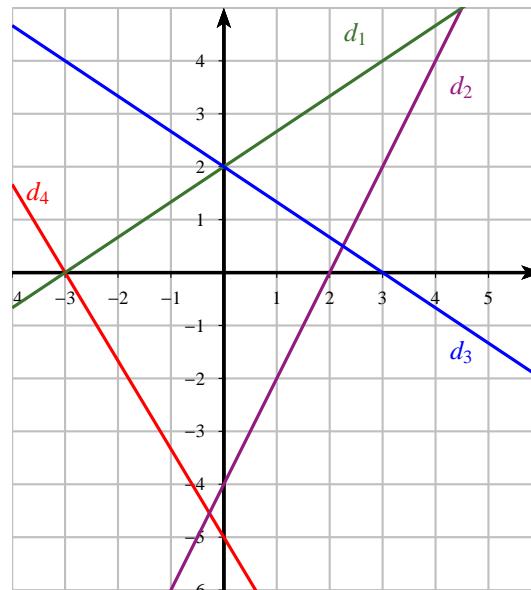
On donne une équation cartésienne de la droite d : $2x - 3y + 5 = 0$

- 1) a) Donner un vecteur directeur de la droite d .
- b) Quel est le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine de son équation réduite ?
- 2) Le point A d'ordonnée $\frac{3}{2}$ est un point de d . Quelle est son abscisse ?

EXERCICE 12

Les droites d_1 , d_2 , d_3 et d_4 sont représentées ci-contre.

Déterminer une équation cartésienne pour chacune de ces droites.



EXERCICE 13

On donne les équations cartésiennes des droites d et d' suivantes :

d : $7x - 3y + 2 = 0$ et d' : $5x - 2y - 8 = 0$

- a) Démontrer que les droites d et d' sont sécantes.
- b) Quelles sont les coordonnées de leur point d'intersection ?

EXERCICE 14

Les droites d_1 et d_2 ont respectivement comme équation cartésienne

d_1 : $3x - 2y - 8 = 0$ et d_2 : $5x + 4y - 6 = 0$.

La droite Δ a pour équation : $2mx - (m + 1)y - 8 = 0$

Comment choisir le paramètre m pour que ces trois droites soient concourantes ?

EXERCICE 15

Trouver une équation de la droite Δ passant par le point A(-1; 4) et parallèle à la droite d d'équation $3x - 2y + 1 = 0$

EXERCICE 16

Pour quelle valeur du paramètre m la droite d d'équation $mx - 3y + 2 = 0$ est-elle parallèle à la droite Δ d'équation $3x - 2y + 4 = 0$

Le radian et le cercle trigonométrique

EXERCICE 17

Convertir en radians les mesures données en degrés :

$$10^\circ ; \quad 59^\circ ; \quad 180^\circ ; \quad 18^\circ ; \quad 72^\circ ; \quad 112,5^\circ$$

EXERCICE 18

Convertir en degré les mesures données en radians :

$$\frac{\pi}{3} ; \quad \frac{2\pi}{3} ; \quad \pi ; \quad \frac{5\pi}{4} ; \quad \frac{3\pi}{8} ; \quad \frac{5\pi}{12} ; \quad \frac{3\pi}{2}$$

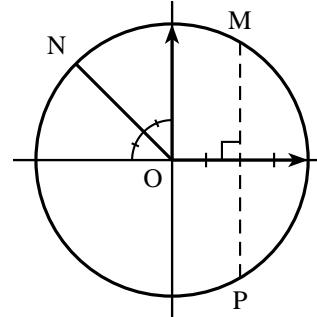
EXERCICE 19

Tracer un cercle trigonométrique puis placer les points images des angles en radians suivants :

$$\text{a) } \pi \quad \text{b) } \frac{\pi}{4} \quad \text{c) } \frac{3\pi}{2} \quad \text{d) } \frac{\pi}{6} \quad \text{e) } -\frac{\pi}{3} \quad \text{f) } -\frac{3\pi}{4} \quad \text{g) } \frac{5\pi}{6} \quad \text{h) } -\frac{3\pi}{2}$$

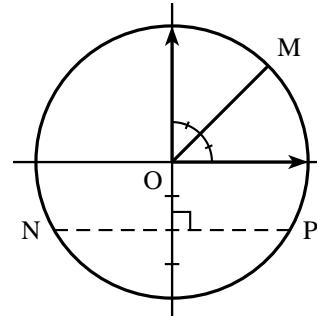
EXERCICE 20

Utiliser les renseignements portés sur la figure pour déterminer les angles sur $[0 ; 2\pi]$ repérant les points M, N et P.



EXERCICE 21

Utiliser les renseignements portés sur la figure pour déterminer les angles sur $[-\pi ; \pi]$ repérant les points M, N et P.



EXERCICE 22

Sur le cercle trigonométrique colorier l'arc décrit par l'intervalle I dans les cas suivants :

$$I = \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{4} \right] ; \quad I = \left[\frac{4\pi}{3}; \frac{13\pi}{6} \right] ; \quad I = \left[-\frac{7\pi}{6}; \frac{5\pi}{4} \right]$$

Mesure principale

EXERCICE 23

Dans chaque cas, trouver la mesure principale de l'angle orienté de mesure α donnée :

a) $\alpha = \frac{7\pi}{2}$

b) $\alpha = -\frac{4\pi}{3}$

c) $\alpha = \frac{35\pi}{6}$

d) $\alpha = -\frac{21\pi}{4}$

e) $\alpha = \frac{202\pi}{3}$

f) $\alpha = 330^\circ$

Propriétés des angles orienté

EXERCICE 24

On donne la mesure de l'angle orienté suivant : $(\vec{u}, \vec{v}) = -\frac{\pi}{6}$.

Donner la mesure de chacun des angles orientés indiqués.

a) $(\vec{v}, 2\vec{u})$

b) $(\vec{v}, -3\vec{u})$

c) $(-3\vec{u}, 2\vec{v})$

d) $(-\vec{v}, -\vec{u})$

EXERCICE 25

ABC est un triangle rectangle direct en A tel que : $(\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{CB}) = \frac{\pi}{5}$

Calculer la mesure principale de $(\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{CB})$

EXERCICE 26

AIL est un triangle équilatéral tel que $(\overrightarrow{AI}; \overrightarrow{AL}) = \frac{\pi}{3}$.

Les triangles BAL et CIL sont rectangles isocèles avec $(\overrightarrow{LB}; \overrightarrow{LA}) = (\overrightarrow{IL}; \overrightarrow{IC}) = \frac{\pi}{2}$.

Le but de l'exercice est de calculer $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$ et d'en tirer une conséquence.

a) Faire une figure.

b) Quel théorème vous permet d'écrire : $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AL}) + (\overrightarrow{AL}; \overrightarrow{AI}) + (\overrightarrow{AI}; \overrightarrow{AC})$

Quel est la mesure de l'angle géométrique \widehat{IAC} ?

En déduire une mesure de : $(\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AC})$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

c) Que pouvez vous dire des point A, B et C ?

Lignes trigonométriques

EXERCICE 27

Trouver les valeurs exactes du cosinus, sinus puis de la tangente des réels donnés. Vous pourrez commencer par placer les points sur le cercle trigonométrique.

a) $\frac{\pi}{6}$

b) $\frac{5\pi}{6}$

c) $\frac{7\pi}{6}$

d) $\frac{11\pi}{6}$

e) $\frac{13\pi}{6}$

EXERCICE 28

Trouver les valeurs exactes du cosinus, sinus puis de la tangente des réels donnés. Vous pourrez commencer par placer les points sur le cercle trigonométrique.

- a) $\frac{\pi}{4}$ b) $\frac{9\pi}{4}$ c) $\frac{5\pi}{4}$ d) $\frac{81\pi}{4}$ e) $-\frac{108\pi}{4}$

EXERCICE 29

Trouver les valeurs exactes du cosinus, sinus puis de la tangente des réels donnés. Vous pourrez commencer par placer les points sur le cercle trigonométrique.

- a) $\frac{4\pi}{3}$ b) $\frac{\pi}{3}$ c) $\frac{71\pi}{3}$ d) $\frac{97\pi}{3}$ e) $-\frac{54\pi}{3}$

Relations trigonométriques

EXERCICE 30

À l'aide de la formule $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ et de $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$,

- a) Déterminer $\cos x$ sachant que : $\sin x = \frac{2}{3}$ et $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$
b) Déterminer $\sin x$ sachant que : $\cos x = -\frac{1}{5}$ et $x \in [-\pi; 0]$
c) Déterminer $\cos x$ et $\tan x$ sachant que : $\sin x = \frac{\sqrt{5}}{3}$ et $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$

EXERCICE 31

Dans chacun des cas suivants, calculer $\cos x$ ou $\sin x$ puis $\tan x$.

- a) $\sin x = -\frac{1}{4}$ et $x \in \left]-\frac{\pi}{2}; 0\right[$. b) $\cos x = \frac{3}{5}$ et $x \in \left]\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right[$.
c) $\cos x = -\frac{1}{3}$ et $x \in \left]\frac{\pi}{2}; \pi\right[$.

EXERCICE 32

Démontrer que pour tout réel x on a :

- a) $(\cos x + \sin x)^2 + (\cos x - \sin x)^2 = 2$
b) $(\cos x + \sin x)^2 - (\cos x - \sin x)^2 = 4 \cos x \sin x$

EXERCICE 33

Exprimer à l'aide de $\sin x$ et $\cos x$, les expressions suivantes :

- a) $\sin(-x) + \cos(-x)$
b) $\sin(-x) - \sin(\pi + x)$
c) $\cos(\pi - x) + \cos(3\pi + x)$
d) $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - 3 \cos\left(-\frac{\pi}{2} - x\right) - 4 \sin(\pi - x)$

Équations trigonométriques

EXERCICE 34

À l'aide d'un cercle trigonométrique, résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes :

a) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\sin x = 0$

c) $2 \sin x + \sqrt{3} = 0$

EXERCICE 35

Résoudre dans \mathbb{R} puis visualiser les solutions dans le cercle trigonométrique des équations suivantes :

a) $2 \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 1 = 0$

b) $1 - \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = 0$

c) $\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$

d) $\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$

EXERCICE 36

Résoudre dans \mathbb{R} puis visualiser les solutions dans le cercle trigonométrique des équations suivantes :

a) $\cos 2x = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

b) $\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(3x + \frac{\pi}{3}\right)$

c) $\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

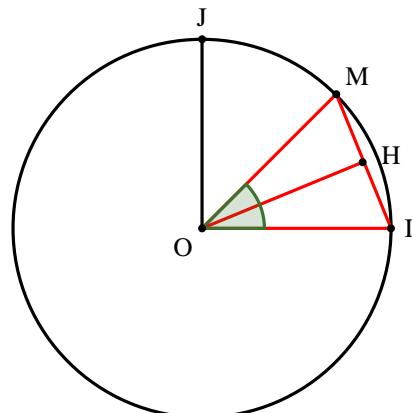
d) $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

EXERCICE 37

Calcul de sinus et cosinus $\frac{\pi}{8}$

\mathcal{C} est le cercle trigonométrique associé à un repère orthonormé direct (O, I, J) du plan. M est le point de \mathcal{C} tel que $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}) = \frac{\pi}{4} [2\pi]$.

- 1) Quelles sont les coordonnées du point M dans le repère (O, I, J) ?
- 2) Calculer la distance IM .
- 3) a) Démontrer que : $IM = 2 \times \sin \frac{\pi}{8}$.
b) En déduire la valeur exacte de $\sin \frac{\pi}{8}$.
- 4) Calculer la valeur exacte de $\cos \frac{\pi}{8}$.
- 5) Déduire des questions précédentes, les lignes trigonométriques de : $\frac{7\pi}{8}, \frac{9\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}$ et $\frac{3\pi}{8}$.



EXERCICE 38**Calcul de sinus et cosinus $\frac{\pi}{12}$**

\mathcal{C} est le cercle trigonométrique associé à un repère orthonormé direct (O, I, J) du plan. M est le point de \mathcal{C} tel que $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}) = \frac{\pi}{6} [2\pi]$.

- 1) Quelles sont les coordonnées du point M dans le repère (O, I, J) ?
- 2) Calculer la distance IM .
- 3) a) Démontrer que : $IM = 2 \times \sin \frac{\pi}{12}$.
b) En déduire la valeur exacte de $\sin \frac{\pi}{12}$.
c) Montrer que l'on peut mettre $\sin \frac{\pi}{12}$ sous la forme $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$
- 4) a) Calculer la valeur exacte de $\cos \frac{\pi}{12}$.
b) Montrer que l'on peut mettre $\cos \frac{\pi}{12}$ sous la forme $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$
- 5) Déduire des questions précédentes, les lignes trigonométriques de :
 $\frac{11\pi}{12}, \frac{13\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}$ et $\frac{7\pi}{8}$.