Calcul vectoriel dans le plan

I) Vecteurs du plan

Soient A et B deux points du plan (P)

Un vecteur $\overrightarrow{AB}$ est défini par trois données :

- une *direction* : celle d'une droite (AB)
- Un *sens* de parcours (dans la direction de la droite);
- une *norme* (ou *longueur*) et on note : $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = AB$

II) L'égalité de deux vecteurs et Propriétés

1)Deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux s'ils ont même direction, même sens et même norme

2) $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$ si et seulement si $A = B$.

3) $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$ (*L'opposé* du vecteur)

4)pour tout point A du plan $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$ (le vecteur nul)

5)Soient A ; B; C ; D des points du plan (P)

tel que $A \neq B$ et $C \neq D$

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ Ssi ABDC est un parallélogramme

6) Soient A ; B ; C ; D des points du plan (P)

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ SSI $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$

7)Etant donné un point A et un vecteur $\overline{u}$

il existe un point M unique tel que $\overline{AM} = \overline{u}$.

III) Somme de deux vecteurs et Relation de Chasles

1)Soit A, B, C trois points du plan. On a la relation suivante : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ (Relation de Chasles)

Remarque : Cette relation de Chasles s'utilise de trois manières différentes :

- Tout d'abord, c'est cette relation qui définit la somme de deux vecteurs.
- Cette relation permet de réduire des sommes vectorielles
- Cette relation permet dans les démonstrations d'intercaler des points dans des écritures vectorielles « développement ».

2) *Règle du parallélogramme* :Soient les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan et A un point du plan

il existe un point B unique tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et il existe un point C unique tel que $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$

la somme des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le vecteur

$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ tel que ABDC est un parallélogramme

Remarque **:**Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan

La différence de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est égale à la somme de $\vec{u}$ et $(-\vec{v})$

on écrit : $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$

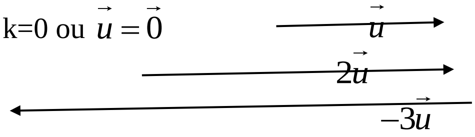
IV) La multiplication d'un vecteur par un réel

$\vec{u}$ un vecteur non nul et un nombre non nul k, on appelle produit du vecteur $\vec{u}$ par le nombre k est le vecteur $k \bullet \vec{u}$ ayant les caractéristiques suivantes:

$k \bullet \vec{u}$ et $\vec{u}$ ont même direction, même sens si $k \succ 0$ et de sens contraire si $k \prec 0$

2. remarques : $k \bullet \vec{0} = \vec{0}$ et $1 \bullet \vec{u} = \vec{u}$, $(-1) \bullet \vec{u} = -\vec{u}$

-Si $k \bullet \vec{u} = \vec{0}$ alors k=0 ou $\vec{u} = \vec{0}$



3. Propriétés :

Quels que soient les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et les nombres a et b dans $\mathbb{R}$:1) $a(\vec{u} + \vec{v}) = a\vec{u} + a\vec{v}$ 2) $(a+b)\vec{u} = a\vec{u} + b\vec{u}$

3) $a(b\vec{u}) = (a \times b)\vec{u}$ 4) $1\vec{u} = \vec{u}$ 5) $a(\vec{u} - \vec{v}) = a\vec{u} - a\vec{v}$

6) $(a-b)\vec{u} = a\vec{u} - b\vec{u}$

$\overrightarrow{W_2} = \vec{u} - 3\vec{v} + \vec{u} + 3\vec{v} - 2\vec{u} = 2\vec{u} + \vec{0} - 2\vec{u} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$

V)La colinéarité de deux vecteurs

1)Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement s'il existe une constante $k \in \mathbb{R}$ telle que $\vec{u} = k\vec{v}$.

<u>Remarque :</u> Deux vecteurs non nuls sont colinéaires ssi ils ont la même direction.

<u>2. Propriété :</u>

a) Trois points A, B et C du plan sont alignés si et seulement s'il existe $k \in \mathbb{R}$ telle que $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$.

b) Soit (AB) une droite. Alors $M \in (D)$ ssi $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.

c) Deux droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

VI) Milieu d'un segment

Soient A, B et I trois points du plan.

Les quatre assertions suivantes sont équivalentes :

1) I est le milieu du segment [AB].

2) $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$ 3) $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ 4) $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$

3)Propriété Caractérisation du milieu :

Soient A, B et I trois points du plan.

I est le milieu du segment [AB] ssi pour tout point M on a : $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$.

C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.

C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices Que l'on devient un mathématicien