

Calcul vectoriel dans le plan

- I) Vecteurs du plan
- II) L'égalité de deux vecteurs
- III) Somme de deux vecteurs
- IV) La multiplication d'un vecteur par un réel
- V) La colinéarité de deux vecteurs
- VI) Milieu d'un segment

I) Vecteurs du plan

Le concept de vecteur remonte à des temps très anciens et fut introduit par les physiciens.

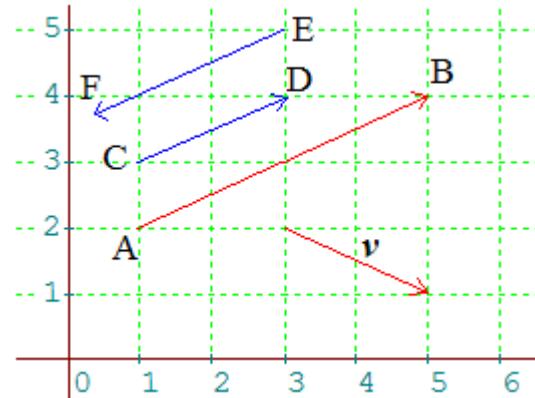
1) Notion élémentaire de vecteur :

Soient A et B deux points du plan (P)

Un vecteur \overrightarrow{AB} est défini par trois données :

- une *direction* : celle d'une droite (AB)
- un *sens* de parcours (dans la direction de la droite);
- une *norme* (ou *longueur*) et on note :
 $\|\overrightarrow{AB}\| = AB$

EXEMPLES



- Les vecteurs \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{EF} ont même direction
- \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{EF} sont de *sens contraire*.
- Les vecteurs \overrightarrow{AB} , \vec{v} n'ont pas la même direction ☺

2) Notation, opposé d'un vecteur, vecteur nul :

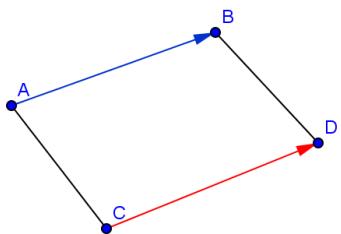
Le vecteur \overrightarrow{AB} a la même direction que Le vecteur \overrightarrow{BA} mais est de sens contraire.
On écrira d'ailleurs, comme pour des nombres relatifs : $= -$: c'est *l'opposé* de .
et on écrit : $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$

On peut concevoir un vecteur dont l'origine est confondue avec son extrémité : on parle alors du *vecteur nul*. On note $\vec{0}$ le vecteur nul

Ainsi : pour tout point A du plan $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$

II) L'égalité de deux vecteurs

Deux vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{CD} sont égaux s'ils ont même direction, même sens et même norme



Remarque :

- Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF} = \dots$, on note ce vecteur \vec{u} . \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{CD} et \overrightarrow{EF} sont des représentants du même vecteur \vec{u} .
- $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$ si et seulement si $A = B$.

Propriété1 : Soient A ; B; C ; D des points du plan (P) telque $A \neq B$ et $C \neq D$

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ ssi ABDC est un parallélogramme

Attention : il s'agit du paralléogramme ABDC et non ABCD

Propriété2 : Soient A ; B ; C ; D des points du plan (P)

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ ssi $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$

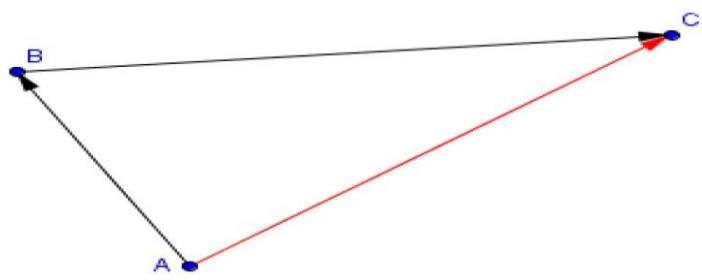
Propriété3 : Etant donné un point A et un vecteur \vec{u}

il existe un point M unique tel que $\overrightarrow{AM} = \vec{u}$.

III) Somme de deux vecteurs

1) Propriété : Relation de Chasles : (admise)

Soit A, B, C trois points du plan. On a la relation suivante : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$



Remarque :

Cette relation de Chasles s'utilise de trois manières différentes :

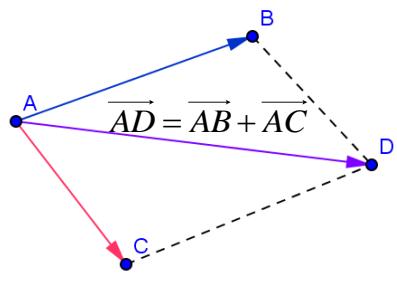
- Tout d'abord, c'est cette relation qui définit la somme de deux vecteurs.
- Cette relation permet de réduire des sommes vectorielles (« factorisation »).
- Cette relation permet dans les démonstrations d'intercaler des points dans des écritures vectorielles (« développement »).

2) Règle du parallélogramme :

Soient les vecteurs \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs du plan et A un point du plan

il existe un point B unique tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et il existe un point C unique tel que $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$

la somme des vecteurs \vec{u} et \vec{v} est le vecteur $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ tel que ABDC est un parallélogramme



Application1 :

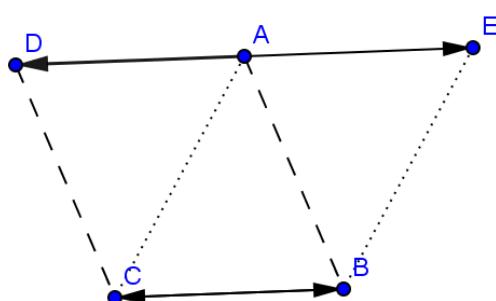
Soit A, B, C trois points du plan non alignés

On considère D et E du plan tel que : $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AD} = \vec{0}$

Faire un schéma

Quelle est la nature du quadrilatère EACB justifier votre réponse

Réponse : 1) on a : $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AD} = \vec{0}$ donc $\overrightarrow{AE} = -\overrightarrow{AD}$



2) on a : $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AE}$

donc $\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{EA}$

donc le quadrilatère EACB est un parallélogramme

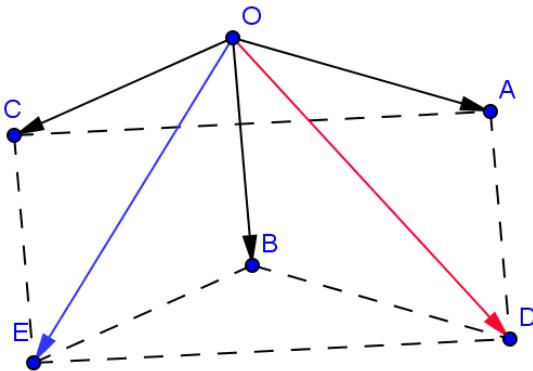
Application 2 :

Soit \vec{u} et \vec{v} et \vec{w} des vecteurs du plan et A, B, C, D, O, E des points du plan tel que : $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{OC}$ et $\overrightarrow{OD} = \vec{u} + \vec{v}$ et $\overrightarrow{OE} = \vec{v} + \vec{w}$

1) Faire une figure

2) Montrer que ACEB est un parallélogramme et justifier votre réponse

Réponse : 1)



$$2) \text{ on a : } \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} \text{ donc } ① \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OB}$$

$$\text{Et on a : } \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} \text{ donc } ② \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{OB}$$

$$\text{D'après } ① \text{ et } ② \text{ on a : } \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CE}$$

Donc : ACEB est un parallélogramme

Remarque :

Soit \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs du plan

La différence de \vec{u} et \vec{v} est égale à la somme de \vec{u} et $(-\vec{v})$

on écrit : $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$

Application 2 :

Soit ABCD est un parallélogramme on pose : $\overrightarrow{AB} = \vec{i}$ et $\overrightarrow{AC} = \vec{j}$

écrire les vecteurs \overrightarrow{AD} et \overrightarrow{BD} en fonction de \vec{i} et \vec{j}

Réponse : ABCD est un parallélogramme donc : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ alors $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \vec{j} - \vec{i}$

Donc : $\overrightarrow{AD} = \vec{j} - \vec{i}$

on a : $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = -\vec{i} + \vec{j} - \vec{i}$ Donc : $\overrightarrow{BD} = \vec{j} - 2\vec{i}$

IV) La multiplication d'un vecteur par un réel

1. Définition

Etant donné un vecteur \vec{u} et un nombre k, on appelle produit du vecteur \vec{u} par le nombre k le vecteur $k \cdot \vec{u}$ ayant les caractéristiques suivantes:

- Si $\vec{u} \neq \vec{0}$, si $k=0$ alors $k \cdot \vec{u} = 0 \cdot \vec{u} = \vec{0}$

si $k > 0$ alors $k \cdot \vec{u}$ et \vec{u} ont même direction, même sens et $\|k \cdot \vec{u}\| = k \times \|\vec{u}\|$

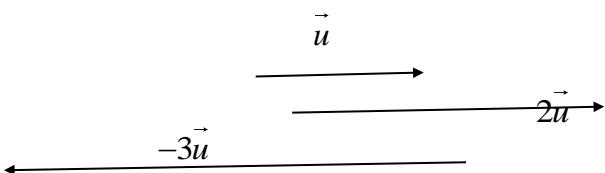
si $k < 0$ alors $k \cdot \vec{u}$ et \vec{u} ont même direction, sens contraire et $\|k \cdot \vec{u}\| = -k \times \|\vec{u}\|$

- Si $\vec{u} = \vec{0}$ alors $k \cdot \vec{u} = k \cdot \vec{0} = \vec{0}$

-Cas particuliers: $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$, $(-1) \cdot \vec{u} = -\vec{u}$

-Si $k \cdot \vec{u} = \vec{0}$ alors $k=0$ ou $\vec{u} = \vec{0}$

Exemples :



Application1 :

Soit A, B, C trois points du plan non alignés

On considère M, N, P et Q du plan tel que : $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AN} = -2\overrightarrow{AC}$ et

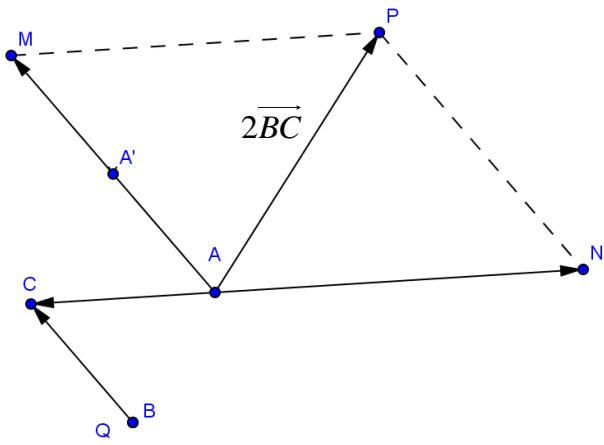
$$\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AP}$$

$$\text{et } \overrightarrow{AQ} = \frac{-1}{2} \overrightarrow{AP}$$

1) Faire une figure

2) En déduire que : $2\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{AP}$ et $B = Q$

Réponse : 1)



$$2) \text{ on a : } \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} = 2\overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{AC} = 2(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}) = 2\overrightarrow{BA}$$

$$\text{Donc } 2\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{AP}$$

$$\text{Et on a : } \overrightarrow{AQ} = \frac{-1}{2} \overrightarrow{AP} \Leftrightarrow -\overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{AQ}$$

$$\text{Donc } 2\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AQ} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AQ}$$

$$\text{Donc } B = Q$$

2. Propriétés

Quels que soient les vecteurs \vec{u} et \vec{v} et les nombres a et b dans \mathbb{R}

$$a(\vec{u} + \vec{v}) = a\vec{u} + a\vec{v}$$

$$(a+b)\vec{u} = a\vec{u} + b\vec{u}$$

$$a(b\vec{u}) = (a \times b)\vec{u} \text{ et } 1\vec{u} = \vec{u}$$

Consequences

$$a(\vec{u} - \vec{v}) = a\vec{u} - a\vec{v}$$

$$(a-b)\vec{u} = a\vec{u} - b\vec{u}$$

Application 1: soient les vecteurs \vec{u} et \vec{v}

Simplifier l'écriture des vecteurs suivants :

$$\vec{W}_1 = 2(\vec{u} + \vec{v}) - 4\left(\frac{1}{2}\vec{u} - \vec{v}\right) \quad \text{et} \quad \vec{W}_2 = \frac{1}{3}(3\vec{u} - 9\vec{v}) + \frac{1}{2}(2\vec{u} + 6\vec{v}) - 2\vec{u}$$

Réponse:

$$\vec{W}_1 = 2(\vec{u} + \vec{v}) - 4\left(\frac{1}{2}\vec{u} - \vec{v}\right)$$

$$= 2\vec{u} + 2\vec{v} - 4 \times \frac{1}{2}\vec{u} + 4\vec{v}$$

$$= 2\vec{u} + 2\vec{v} - 2\vec{u} + 4\vec{v} = 6\vec{u} + \vec{0} = 6\vec{u}$$

$$\vec{W}_2 = \frac{1}{3}(3\vec{u} - 9\vec{v}) + \frac{1}{2}(2\vec{u} + 6\vec{v}) - 2\vec{u}$$

$$= \vec{u} - 3\vec{v} + \vec{u} + 3\vec{v} - 2\vec{u}$$

$$= 2\vec{u} + \vec{0} - 2\vec{u} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$$

Application 2: soient les vecteurs \vec{u} et \vec{v} et \vec{i} et \vec{j} tel que :

$$\vec{u} = 2\vec{i} + 3(\vec{i} + 2\vec{j}) - 4(2\vec{i} + \vec{j}) \quad \text{et} \quad \vec{v} = 2\vec{i} + \vec{j}$$

1) Simplifier l'écriture de \vec{u}

2) écrire l'écriture les vecteurs \vec{i} et \vec{j} en fonction de \vec{u} et \vec{v}

Réponse:

$$1) \text{On a : } \vec{u} = 2\vec{i} + 3(\vec{i} + 2\vec{j}) - 4(2\vec{i} + \vec{j}) = 2\vec{i} + 3\vec{i} + 6\vec{j} - 8\vec{i} - 4\vec{j} = -3\vec{i} + 2\vec{j}$$

$$2) \text{On a : } ① \vec{u} = -3\vec{i} + 2\vec{j} \quad \text{et} \quad ② \vec{v} = 2\vec{i} + \vec{j}$$

$$\text{Donc } 2\vec{v} = 4\vec{i} + 2\vec{j}$$

$$\text{Alors : } 2\vec{v} - \vec{u} = 4\vec{i} + 2\vec{j} - (-3\vec{i} + 2\vec{j}) = 4\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{i} - 2\vec{j}$$

$$\text{Donc } 2\vec{v} - \vec{u} = 7\vec{i} \quad \text{d'où } \vec{i} = \frac{2}{7}\vec{v} - \frac{1}{7}\vec{u}$$

$$\text{D'après : } ② \text{ On a : } \vec{v} = 2\vec{i} + \vec{j} \quad \text{Donc } \vec{j} = \vec{v} - 2\vec{i}$$

$$\text{Donc } \vec{j} = \vec{v} - 2\left(\frac{2}{7}\vec{v} - \frac{1}{7}\vec{u}\right) = \vec{v} - \frac{4}{7}\vec{v} + \frac{2}{7}\vec{u} = \frac{2}{7}\vec{u} + \frac{3}{7}\vec{v}$$

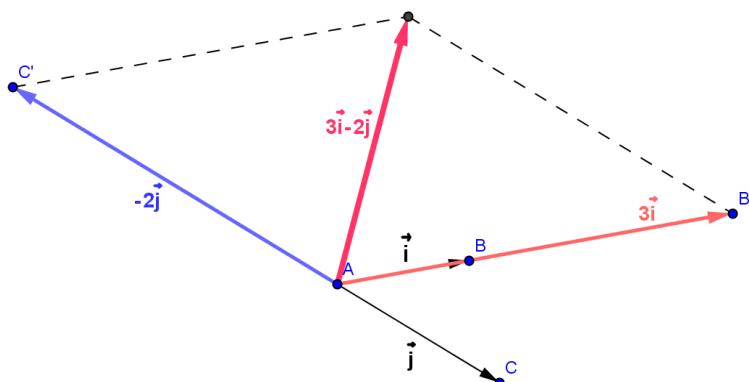
$$\text{d'où } \vec{j} = \frac{2}{7}\vec{u} + \frac{3}{7}\vec{v}$$

Application 3 :

Soit ABC est un triangle on pose : $\vec{AB} = \vec{i}$ et $\vec{AC} = \vec{j}$

construire le vecteur $3\vec{i} - 2\vec{j}$

Réponse :



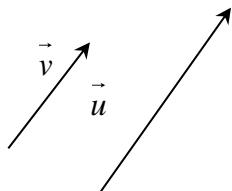
V) La colinéarité de deux vecteurs

1. Définition :

Deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires si et seulement s'il existe une constante $k \in \mathbb{R}$ telle que $\vec{u} = k\vec{v}$.

Remarque :

- Le vecteur nul $\vec{0}$ est colinéaire à tous les vecteurs du plan.
- Deux vecteurs non nuls sont colinéaires ssi ils ont la même direction.



2. Propriété (admise)

- 1) Trois points A, B et C du plan sont alignés si et seulement s'il existe $k \in \mathbb{R}$ telle que $\vec{AB} = k\vec{AC}$.
- 2) Soit (AB) une droite. Alors $M \in (D)$ ssi \vec{AM} et \vec{AB} sont colinéaires.
- 3) Deux droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si \vec{AB} et \vec{CD} sont colinéaires.

Parallélisme :

Pour montrer que deux droites (AB) et (CD) sont parallèles il suffit de prouver qu'il existe un nombre réel k non nul tel que $\vec{CD} = k\vec{AB}$

Application 1: soit ABC est un triangle. Les points E et F sont tels que :

$$\vec{AF} = \frac{4}{3}\vec{AC} \text{ et } \vec{CE} = \frac{1}{4}\vec{AB}$$

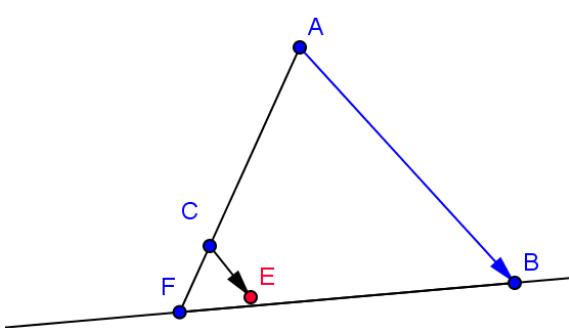
1) Faire une figure

2) montrer que : Les points E, F et B sont alignés

Réponse : 1)

$$2) \text{ On a : } \vec{CE} = \frac{1}{4}\vec{AB} \text{ donc } \vec{AB} = 4\vec{CE}$$

$$\text{donc } \vec{BA} = 4\vec{EC}$$



$$\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AF} = 4\overrightarrow{EC} + \frac{4}{3}\overrightarrow{AC} = 4\left(\overrightarrow{EC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right)$$

Or on a : $\overrightarrow{CF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ car : $\overrightarrow{AF} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AC}$ donc $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CF} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{CF} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

Alors : $\overrightarrow{BF} = 4\left(\overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CF}\right)$ donc $\overrightarrow{BF} = 4\overrightarrow{EF}$

Donc \overrightarrow{BF} et \overrightarrow{EF} sont colinéaires

D'où Les points E , F et B sont alignés

Application 2: soit ABC est un triangle. Les points E et F sont tels que : $\overrightarrow{AE} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AF} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AC}$

1) Faire une figure

2) écrire les vecteurs \overrightarrow{EC} et \overrightarrow{BF} en fonction de \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC}

3) montrer que deux droites (EC) et (BF) sont parallèles

Réponse : 1)

2) on a : $\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AC}$ donc
 $\overrightarrow{EC} = -\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AC}$

Donc $\overrightarrow{EC} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

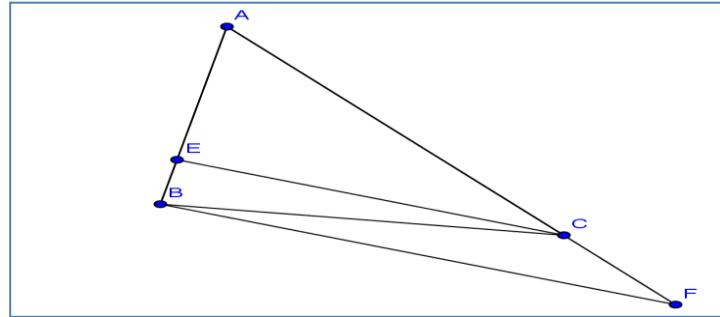
D'où $\overrightarrow{EC} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

et on a : $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AF}$ donc $\overrightarrow{BF} = -\overrightarrow{AB} + \frac{4}{3}\overrightarrow{AC}$

3) on a : $\overrightarrow{EC} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ donc $\overrightarrow{EC} = \frac{3}{4}\left(-\overrightarrow{AB} + \frac{4}{3}\overrightarrow{AC}\right)$

Donc $\overrightarrow{EC} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BF}$

D'où les droites (EC) et (BF) sont parallèles



VI) Milieu d'un segment

Propriété 1 : Soient A, B et I trois points du plan.

Les quatre assertions suivantes sont équivalentes :

1) I est le milieu du segment [AB].

2) $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$

3) $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

4) $\vec{IA} + \vec{IB} = \vec{0}$

Propriété 2 : Caractérisation du milieu :

Soient A, B et I trois points du plan.

I est le milieu du segment [AB] ssi pour tout point M on a : $\vec{MA} + \vec{MB} = 2\vec{MI}$.

Démonstration : supposant que I est le milieu du segment [AB] donc :

$$\vec{MA} + \vec{MB} = \vec{MI} + \vec{MA} + \vec{MI} + \vec{MB}$$

$$= 2\vec{MI} + \vec{MA} + \vec{MB} = 2\vec{MI} + \vec{0} = 2\vec{MI}$$

supposant que pour tout point M on a : $\vec{MA} + \vec{MB} = 2\vec{MI}$

on prend : $M=I$ donc $\vec{IA} + \vec{IB} = 2\vec{II} = \vec{0}$

D'où I est le milieu du segment [AB]

Application 1: soit ABC est un triangle. Les points E et F sont tels que :

$$\vec{AF} = \vec{AB} + \vec{AC} \text{ et } \vec{BE} = \vec{BA} + \vec{BC}$$

1) Faire une figure

2) montrer que : C est le milieu du segment [EF]

Réponse : 1)

2) On a : $\vec{BE} = \vec{BA} + \vec{BC}$

$$\text{donc } \vec{BC} + \vec{CE} = \vec{BA} + \vec{BC} \text{ donc } ① \quad \vec{CE} = \vec{BA}$$

$$\text{Et on a : } \vec{AF} = \vec{AB} + \vec{AC}$$

$$\text{Donc } \vec{AC} + \vec{CF} = \vec{AB} + \vec{AC} \text{ donc } ② \quad \vec{CF} = \vec{AB}$$

$$\vec{CE} + \vec{CF} = \vec{BA} + \vec{AB} = \vec{AA} = \vec{0}$$

D'où I est le milieu du segment [EF]

