

Tronc CS

PROF : ATMANI NAJIB

## Calcul vectoriel dans le plan

- I) Vecteurs du plan
- II) L'égalité de deux vecteurs
- III) Somme de deux vecteurs
- IV) La multiplication d'un vecteur par un réel
- V) La colinéarité de deux vecteurs
- VI) Milieu d'un segment

### I) Vecteurs du plan

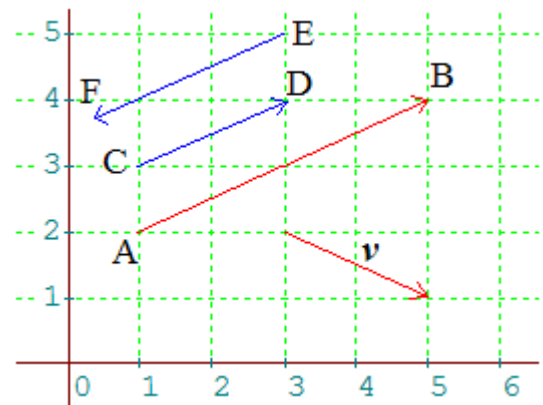
Le concept de vecteur remonte à des temps très anciens et fut introduit par les physiciens.

#### 1) Notion élémentaire de vecteur :

Soient A et B deux points du plan (P)

Un vecteur  $\overrightarrow{AB}$  est défini par trois données :

- une **direction** : celle d'une droite (AB)
- un **sens** de parcours (dans la direction de la droite);
- une **norme** (ou **longueur**) et on note :  
 $\|\overrightarrow{AB}\| = AB$



#### EXEMPLES

- Les vecteurs  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{EF}$  ont même direction
- $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{EF}$  sont de **sens contraire**.
- Les vecteurs  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\vec{v}$  n'ont pas la même direction ☹

#### 2) Notation, opposé d'un vecteur, vecteur nul :

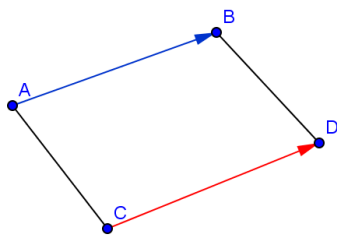
Le vecteur  $\overrightarrow{BA}$  a la même direction que Le vecteur  $\overrightarrow{AB}$  mais est de sens contraire. On écrira d'ailleurs, comme pour des nombres relatifs :  $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$  : c'est **l'opposé** de  $\overrightarrow{AB}$ . et on écrit :  $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$

On peut concevoir un vecteur dont l'origine est confondue avec son extrémité : on parle alors du **vecteur nul**. On note  $\vec{0}$  le vecteur nul

Ainsi : pour tout point A du plan  $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$

## II) L'égalité de deux vecteurs

Deux vecteurs  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{CD}$  sont égaux s'ils ont même direction, même sens et même norme



Remarque :

- Si  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF} = \dots$ , on note ce vecteur  $\vec{u}$ .  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{CD}$  et  $\overrightarrow{EF}$  sont des représentants du même vecteur  $\vec{u}$ .
- $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$  si et seulement si  $A = B$ .

**Propriété1 :** Soient A ; B ; C ; D des points du plan (P) telque  $A \neq B$  et  $C \neq D$

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$  SSI ABDC est un parallélogramme

Attention : il s'agit du parallélogramme ABDC et non ABCD

**Propriété2 :** Soient A ; B ; C ; D des points du plan (P)

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$  SSI  $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$

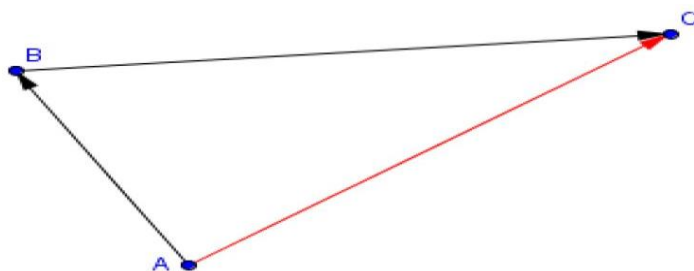
**Propriété3 :** Etant donné un point A et un vecteur  $\vec{u}$

il existe un point M unique tel que  $\overrightarrow{AM} = \vec{u}$ .

## III) Somme de deux vecteurs

1) Propriété : Relation de Chasles : (admise)

Soit A, B, C trois points du plan. On a la relation suivante :  $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$



Remarque :

Cette relation de Chasles s'utilise de trois manières différentes :

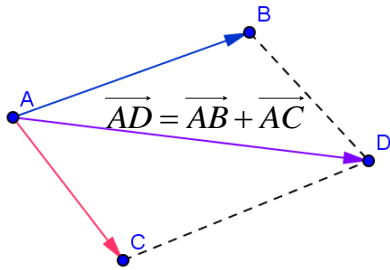
- Tout d'abord, c'est cette relation qui définit la somme de deux vecteurs.
- Cette relation permet de réduire des sommes vectorielles (« factorisation »).
- Cette relation permet dans les démonstrations d'intercaler des points dans des écritures vectorielles (« développement »).

2) Règle du parallélogramme :

Soient les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs du plan et A un point du plan

il existe un point B unique tel que  $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$  et il existe un point C unique tel que  $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$

la somme des vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  est le vecteur  $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$  tel que ABDC est un parallélogramme



Application1 :

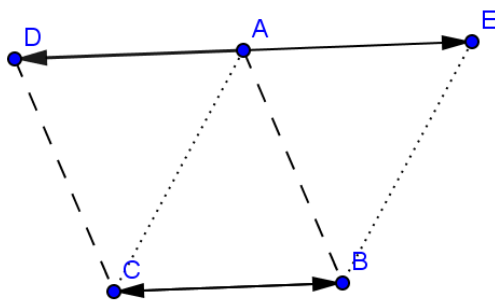
Soit A, B, C trois points du plan non alignés

On considère D et E du plan tel que :  $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$  et  $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AD} = \vec{0}$

Faire un schéma

Quelle est la nature du quadrilatère EACB justifier votre réponse

Réponse : 1) on a :  $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AD} = \vec{0}$  donc  $\overrightarrow{AE} = -\overrightarrow{AD}$



2) on a :  $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$  et  $\overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AE}$

donc  $\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{EA}$

donc le quadrilatère EACB est un parallélogramme

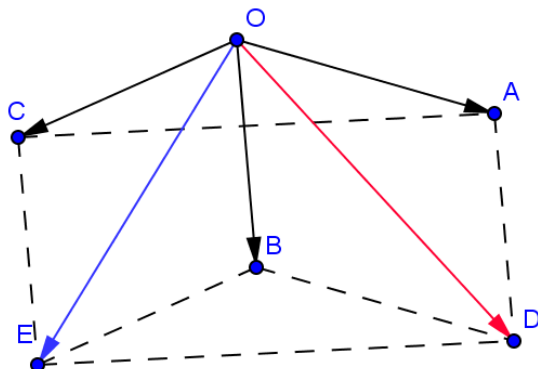
### Application2 :

Soit  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  des vecteurs du plan et A, B, C, D, O, E des points du plan tel que :  $\vec{u} = \vec{OA}$  et  $\vec{v} = \vec{OB}$  et  $\vec{w} = \vec{OC}$  et  $\vec{OD} = \vec{u} + \vec{v}$  et  $\vec{OE} = \vec{v} + \vec{w}$

1) Faire une figure

2) Montrer que ACEB est un parallélogramme et justifier votre réponse

Réponse : 1)



2) on a :  $\vec{AD} = \vec{AO} + \vec{OD} = \vec{AO} + \vec{OA} + \vec{OB} = \vec{OB}$  donc ①  $\vec{AD} = \vec{OB}$

Et on a :  $\vec{CE} = \vec{CO} + \vec{OE} = \vec{CO} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{CO} + \vec{OC} + \vec{OB} = \vec{OB}$  donc ②  $\vec{CE} = \vec{OB}$

D'après ① et ② on a :  $\vec{AD} = \vec{CE}$

Donc : ACEB est un parallélogramme

### Remarque :

Soit  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs du plan

La différence de  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  est égale à la somme de  $\vec{u}$  et  $(-\vec{v})$

on écrit :  $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$

### Application2 :

Soit ABCD est un parallélogramme on pose :  $\vec{AB} = \vec{i}$  et  $\vec{AC} = \vec{j}$

écrire les vecteurs  $\vec{AD}$  et  $\vec{BD}$  en fonction de  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$

Réponse : ABCD est un parallélogramme donc :  $\vec{AB} + \vec{AD} = \vec{AC}$  alors  $\vec{AD} = \vec{AC} - \vec{AB} = \vec{j} - \vec{i}$

Donc :  $\vec{AD} = \vec{j} - \vec{i}$

on a :  $\vec{BD} = \vec{BA} + \vec{AD} = -\vec{AB} + \vec{AD} = -\vec{i} + \vec{j} - \vec{i}$  Donc :  $\vec{BD} = \vec{j} - 2\vec{i}$

## IV) La multiplication d'un vecteur par un réel

### 1. Définition

Etant donné un vecteur  $\vec{u}$  et un nombre k, on appelle produit du vecteur  $\vec{u}$  par le nombre k le vecteur  $k \cdot \vec{u}$  ayant les caractéristiques suivantes:

-Si  $\vec{u} \neq \vec{0}$ , si k=0 alors  $k \cdot \vec{u} = 0 \cdot \vec{u} = \vec{0}$

si k>0 alors  $k \cdot \vec{u}$  et  $\vec{u}$  ont même direction, même sens et  $\|k \cdot \vec{u}\| = k \times \|\vec{u}\|$

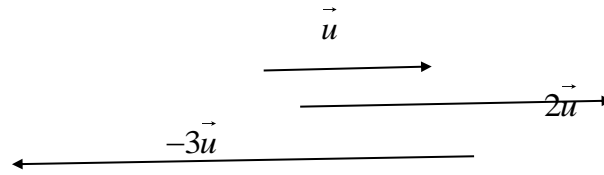
si k<0 alors  $k \cdot \vec{u}$  et  $\vec{u}$  ont même direction, sens contraire et  $\|k \cdot \vec{u}\| = -k \times \|\vec{u}\|$

-Si  $\vec{u} = \vec{0}$  alors  $k \cdot \vec{u} = k \cdot \vec{0} = \vec{0}$

-Cas particuliers:  $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$  ,  $(-1) \cdot \vec{u} = -\vec{u}$

-Si  $k \cdot \vec{u} = \vec{0}$  alors  $k=0$  ou  $\vec{u} = \vec{0}$

Exemples :



Application1 :

Soit A, B, C trois points du plan non alignés

On considère M , N , P et Q du plan tel que :  $\vec{AM} = 2\vec{BC}$  et  $\vec{AN} = -2\vec{AC}$  et

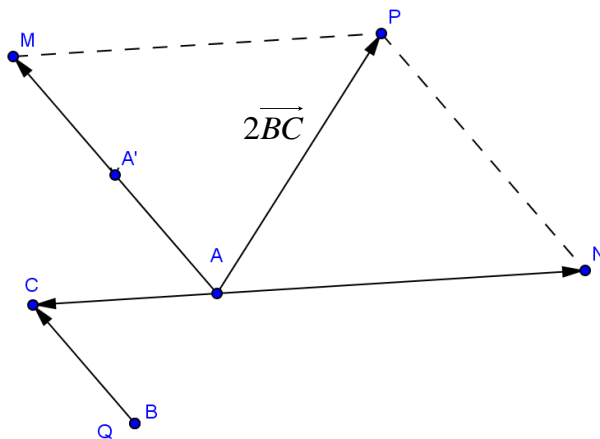
$$\vec{AM} + \vec{AN} = \vec{AP}$$

$$\text{et } \vec{AQ} = \frac{-1}{2} \vec{AP}$$

1) Faire une figure

2) En déduire que :  $2\vec{AB} = -\vec{AP}$  et  $B = Q$

Réponse : 1)



$$2) \text{ on a : } \vec{AP} = \vec{AM} + \vec{AN} = 2\vec{BC} - 2\vec{AC} = 2(\vec{BC} + \vec{CA}) = 2\vec{BA}$$

$$\text{Donc } 2\vec{AB} = -\vec{AP}$$

$$\text{Et on a : } \vec{AQ} = \frac{-1}{2} \vec{AP} \Leftrightarrow -\vec{AP} = 2\vec{AQ}$$

$$\text{Donc } 2\vec{AB} = 2\vec{AQ} \Leftrightarrow \vec{AB} = \vec{AQ}$$

$$\text{Donc } B = Q$$

2. Propriétés

Quels que soient les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  et les nombres a et b dans  $\mathbb{R}$

$$a(\vec{u} + \vec{v}) = a\vec{u} + a\vec{v}$$

$$(a+b)\vec{u} = a\vec{u} + b\vec{u}$$

$$a(b\vec{u}) = (a \times b)\vec{u} \text{ et } 1\vec{u} = \vec{u}$$

### Conséquences

$$a(\vec{u} - \vec{v}) = a\vec{u} - a\vec{v}$$

$$(a - b)\vec{u} = a\vec{u} - b\vec{u}$$

**Application 1:** soient les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$

Simplifier l'écriture des vecteurs suivants :

$$\vec{W}_1 = 2(\vec{u} + \vec{v}) - 4\left(\frac{1}{2}\vec{u} - \vec{v}\right) \quad \text{et} \quad \vec{W}_2 = \frac{1}{3}(3\vec{u} - 9\vec{v}) + \frac{1}{2}(2\vec{u} + 6\vec{v}) - 2\vec{u}$$

Réponse:

$$\vec{W}_1 = 2(\vec{u} + \vec{v}) - 4\left(\frac{1}{2}\vec{u} - \vec{v}\right)$$

$$= 2\vec{u} + 2\vec{v} - 4 \times \frac{1}{2}\vec{u} + 4\vec{v}$$

$$= 2\vec{u} + 2\vec{v} - 2\vec{u} + 4\vec{v} = 6\vec{v} + \vec{0} = 6\vec{v}$$

$$\vec{W}_2 = \frac{1}{3}(3\vec{u} - 9\vec{v}) + \frac{1}{2}(2\vec{u} + 6\vec{v}) - 2\vec{u}$$

$$= \vec{u} - 3\vec{v} + \vec{u} + 3\vec{v} - 2\vec{u}$$

$$= 2\vec{u} + \vec{0} - 2\vec{u} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$$

**Application 2:** soient les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  et  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$  tel que :

$$\vec{u} = 2\vec{i} + 3(\vec{i} + 2\vec{j}) - 4(2\vec{i} + \vec{j}) \quad \text{et} \quad \vec{v} = 2\vec{i} + \vec{j}$$

1) Simplifier l'écriture de  $\vec{u}$

2) écrire l'écriture des vecteurs  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$  en fonction de  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$

Réponse:

$$1) \text{ On a : } \vec{u} = 2\vec{i} + 3(\vec{i} + 2\vec{j}) - 4(2\vec{i} + \vec{j}) = 2\vec{i} + 3\vec{i} + 6\vec{j} - 8\vec{i} - 4\vec{j} = -3\vec{i} + 2\vec{j}$$

$$2) \text{ On a : } \textcircled{1} \vec{u} = -3\vec{i} + 2\vec{j} \quad \text{et} \quad \textcircled{2} \vec{v} = 2\vec{i} + \vec{j}$$

$$\text{Donc } 2\vec{v} = 4\vec{i} + 2\vec{j}$$

$$\text{Alors : } 2\vec{v} - \vec{u} = 4\vec{i} + 2\vec{j} - (-3\vec{i} + 2\vec{j}) = 4\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{i} - 2\vec{j}$$

$$\text{Donc } 2\vec{v} - \vec{u} = 7\vec{i} \quad \text{d'où } \vec{i} = \frac{2}{7}\vec{v} - \frac{1}{7}\vec{u}$$

$$\text{D'après : } \textcircled{2} \text{ On a : } \vec{v} = 2\vec{i} + \vec{j} \quad \text{Donc } \vec{j} = \vec{v} - 2\vec{i}$$

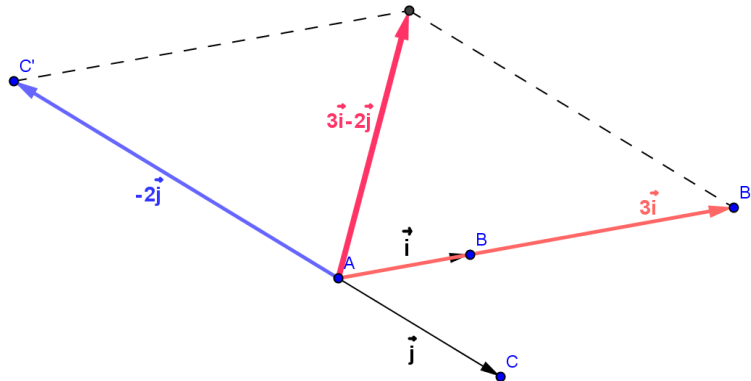
$$\text{Donc } \vec{j} = \vec{v} - 2\left(\frac{2}{7}\vec{v} - \frac{1}{7}\vec{u}\right) = \vec{v} - \frac{4}{7}\vec{v} + \frac{2}{7}\vec{u} = \frac{3}{7}\vec{v} + \frac{2}{7}\vec{u}$$

$$\text{d'où } \vec{j} = \frac{2}{7}\vec{u} + \frac{3}{7}\vec{v}$$

### Application3 :

Soit ABC est un triangle on pose :  $\overrightarrow{AB} = \vec{i}$  et  $\overrightarrow{AC} = \vec{j}$   
construire le vecteur  $3\vec{i} - 2\vec{j}$

Réponse :



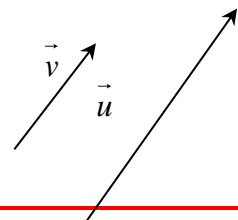
## V) La colinéarité de deux vecteurs

### 1. Définition :

Deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont colinéaires si et seulement s'il existe une constante  $k \in \mathbb{R}$  telle que  $\vec{u} = k\vec{v}$ .

### Remarque :

- Le vecteur nul  $\vec{0}$  est colinéaire à tous les vecteurs du plan.
- Deux vecteurs non nuls sont colinéaires ssi ils ont la même direction.



### 2. Propriété (admise)

- 1) Trois points A, B et C du plan sont alignés si et seulement s'il existe  $k \in \mathbb{R}$  telle que  $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$ .
- 2) Soit (AB) une droite. Alors  $M \in (D)$  ssi  $\overrightarrow{AM}$  et  $\overrightarrow{AB}$  sont colinéaires.
- 3) Deux droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{CD}$  sont colinéaires.

### Parallélisme :

Pour montrer que deux droites (AB) et (CD) sont parallèles il suffit de prouver qu'il existe un nombre réel k non nul tel que  $\overrightarrow{CD} = k\overrightarrow{AB}$

**Application 1:** soit ABC est un triangle. Les points E et F sont tels que :

$$\overrightarrow{AF} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AC} \text{ et } \overrightarrow{CE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$$

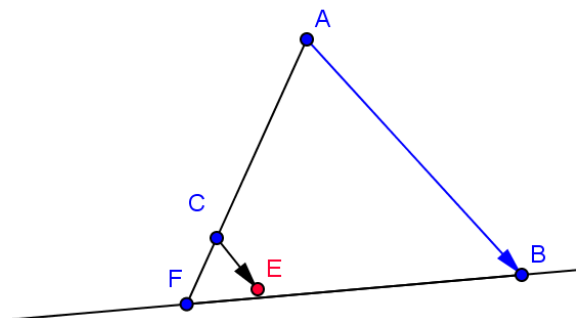
1) Faire une figure

2) montrer que : Les points E, F et B sont alignés

Réponse : 1)

$$2) \text{ On a : } \overrightarrow{CE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} \text{ donc } \overrightarrow{AB} = 4\overrightarrow{CE}$$

$$\text{donc } \overrightarrow{BA} = 4\overrightarrow{EC}$$



$$\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AF} = 4\overrightarrow{EC} + \frac{4}{3}\overrightarrow{AC} = 4\left(\overrightarrow{EC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right)$$

Or on a :  $\overrightarrow{CF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$  car :  $\overrightarrow{AF} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AC}$  donc  $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CF} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AC}$  c a d  $\overrightarrow{CF} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

Alors :  $\overrightarrow{BF} = 4(\overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CF})$  donc  $\overrightarrow{BF} = 4\overrightarrow{EF}$

Donc  $\overrightarrow{BF}$  et  $\overrightarrow{EF}$  sont colinéaires

D'où Les points E , F et B sont alignés

**Application 2:** soit ABC est un triangle. Les points E et F sont tels que :  $\overrightarrow{AE} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AF} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AC}$

1) Faire une figure

2) écrire les vecteurs  $\overrightarrow{EC}$  et  $\overrightarrow{BF}$  en fonction de  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$

3) montrer que deux droites (EC) et (BF) sont parallèles

Réponse : 1)

2) on a :  $\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AC}$  donc  $\overrightarrow{EC} = -\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AC}$

Donc  $\overrightarrow{EC} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

D'où  $\overrightarrow{EC} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

et on a :  $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AF}$  donc  $\overrightarrow{BF} = -\overrightarrow{AB} + \frac{4}{3}\overrightarrow{AC}$

3) on a :  $\overrightarrow{EC} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$  donc  $\overrightarrow{EC} = \frac{3}{4}\left(-\overrightarrow{AB} + \frac{4}{3}\overrightarrow{AC}\right)$

Donc  $\overrightarrow{EC} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BF}$

D'où les droites (EC) et (BF) sont parallèles

## VI) Milieu d'un segment

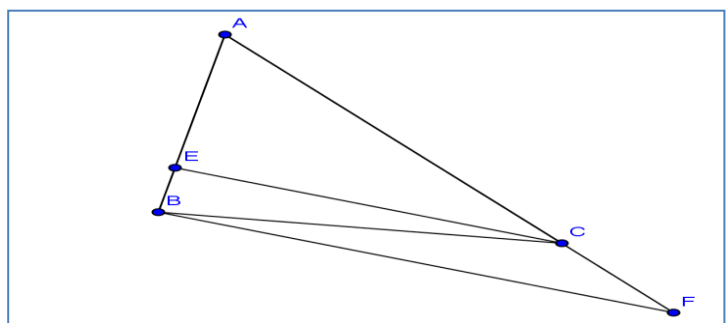
**Propriété 1 :** Soient A, B et I trois points du plan.

Les quatre assertions suivantes sont équivalentes :

1) I est le milieu du segment [AB].

2)  $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$

3)  $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$





4)  $\vec{IA} + \vec{IB} = \vec{0}$

Propriété 2 : Caractérisation du milieu :

Soient A, B et I trois points du plan.

I est le milieu du segment [AB] ssi pour tout point M on a :  $\vec{MA} + \vec{MB} = 2\vec{MI}$ .

Démonstration : supposant que I est le milieu du segment [AB] donc :

$$\begin{aligned}\vec{MA} + \vec{MB} &= \vec{MI} + \vec{MA} + \vec{MI} + \vec{MB} \\ &= 2\vec{MI} + \vec{MA} + \vec{MB} = 2\vec{MI} + \vec{0} = 2\vec{MI}\end{aligned}$$

supposant que pour tout point M on a :  $\vec{MA} + \vec{MB} = 2\vec{MI}$

on prend :  $M=I$  donc  $\vec{IA} + \vec{IB} = 2\vec{II} = \vec{0}$

D'où I est le milieu du segment [AB]

Application 1: soit ABC est un triangle. Les points E et F sont tels que :

$$\vec{AF} = \vec{AB} + \vec{AC} \text{ et } \vec{BE} = \vec{BA} + \vec{BC}$$

1) Faire une figure

2) montrer que : C est le milieu du segment [EF]

Réponse : 1)

2) On a :  $\vec{BE} = \vec{BA} + \vec{BC}$

$$\text{donc } \vec{BC} + \vec{CE} = \vec{BA} + \vec{BC} \text{ donc } \textcircled{1} \quad \vec{CE} = \vec{BA}$$

$$\text{Et on a : } \vec{AF} = \vec{AB} + \vec{AC}$$

$$\text{Donc } \vec{AC} + \vec{CF} = \vec{AB} + \vec{AC} \text{ donc } \textcircled{2} \quad \vec{CF} = \vec{AB}$$

$$\vec{CE} + \vec{CF} = \vec{BA} + \vec{AB} = \vec{AA} = \vec{0}$$

D'où C est le milieu du segment [EF]

