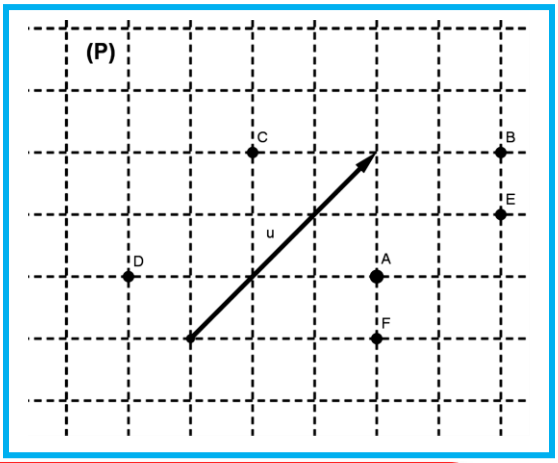
I. Vecteurs du plan (rappel)

a. Activité :



Dans le plan (P) on considère le vecteur $\overrightarrow{AB}$.

1. Qu'appelle-t-on :

- La droite (AB) pour le vecteur $\overrightarrow{AB}$?
- En partant de A VERS B pour le vecteur $\overrightarrow{AB}$?
- La distance AB pour le vecteur $\overrightarrow{AB}$?

2. Que peut-on dire pour les vecteurs $\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{AB}$?
3. Que peut-on dire pour les vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{EF}$?

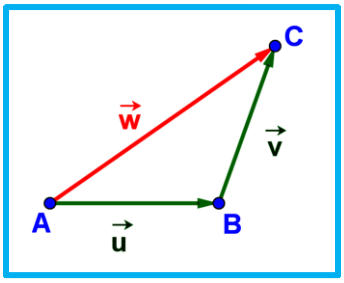
b. Éléments d'un vecteur - égalité de deux vecteurs :

A et B deux points distincts du plan (P). On note le vecteur $\overrightarrow{AB}$ par $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

- La direction de $\overrightarrow{AB}$ c'est la droite (AB) .
- Le sens de $\overrightarrow{AB}$ celui de la demi droite $[AB)$.
- La longueur ou norme de $\overrightarrow{AB}$, noté $\|\overrightarrow{AB}\| = AB$; c'est la distance de A à B .
- Cas particulier : $A = B$; Le vecteur nul $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$ n'apas de direction , pas de sens et a pour longueur 0 .
- Vecteur unitaire : c'est un vecteur de longueur 1 . soit $\overrightarrow{AB}$ un vecteur non nul a seulement deux vecteurs unitaires $\vec{u} = \frac{1}{AB}\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = -\frac{1}{AB}\overrightarrow{AB}$.
- Deux vecteurs non nuls sont égaux si et seulement si : ils ont même direction et même sens et même longueur .
- $(ABCD)$ est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

II. Operations dans l'ensemble des vecteurs du plan (P) :

01. L'adition (somme de deux vecteurs de (P))



a. Activité :

Prenons l'activité précédente : déterminer les sommes des vecteurs suivantes : $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{CB}$; $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{EF}$.

b. Définition :

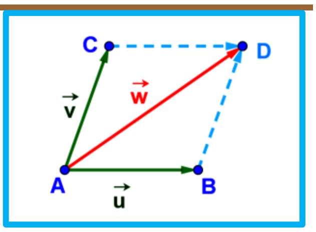
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan (P) .

La somme des vecteurs $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$ est le vecteur $\vec{w} = \overrightarrow{AC}$ .On écrit : $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$.

c. Remarques :

- $\forall A,B,C \in (P) : \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ est appelé relation de Chasles .
- Le vecteur $\overrightarrow{BA}$ est appelé l'opposé du vecteur $\overrightarrow{AB}$; on dit que les $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BA}$ sont opposés .
- l'opposé du vecteur $\vec{u}$ est le vecteur qui a la même direction de $\vec{u}$ et la même norme (longueur) de $\vec{u}$ et de sens contraire de $\vec{u}$ on le note par $-\vec{u}$.

d. Règle du parallélogramme :



Soient $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ deux vecteurs du plan (P) .

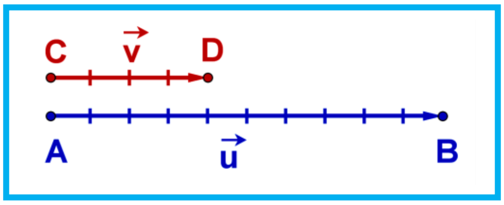
On a $\vec{w}=\vec{u}+\vec{v}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$ avec le point D vérifie la condition suivant $ABDC$ est un parallélogramme

e. Applications :

- Soit ABCD un rectangle de centre I. construire $\vec{u}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CI}+\overrightarrow{BC}$
- ABC est un triangle .
  1. Construire le point D tel que : $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$.
  2. Que peut-on dire du quadrilatère ADBC ?
  3. Construire le point D tel que : $\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{CA}$.

02. La multiplication d'un vecteur $\vec{u}$ par un nombre réel α :

a. Activité :



1. Trouver la relation qui existe entre les vecteurs : $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{CD}$.
2. Construire un vecteur $\vec{v}\,'$ tel que $\vec{v}\,'=-2\vec{v}$.

b. Définition :

Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul et k un nombre non nul .

Le produit d'un vecteur $\vec{u}$ par un réel k (ou un scalaire) est le vecteur $\vec{v}$ qui vérifie :

- $\vec{v}$ a la direction parallèle à la direction du vecteur $\vec{u}$.
- $\vec{v}$ a pour sens :
  - ❖ Ce lui de $\vec{u}$ si $k>0$.
  - ❖ Contraire de $\vec{u}$ si $k<0$.
- $\vec{v}$ de norme (longueur) égale à la norme (longueur) de $\vec{u}$ multiplier par $|k|$ ou encore $\|\vec{v}\|=|k|\|\vec{u}\|$

- **Cas particulier :**
  - ❖ pour tout vecteur $\vec{u}$ on a : $0.\vec{u}=\vec{0}$.
  - ❖ pour tout réel k on a : $k.\vec{0}=\vec{0}$.

c. Propriétés :

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$; pour tous réel k et k' on a :

1. $(k+k').\vec{u}=k\vec{u}+k'\vec{u}$.
2. $k(\vec{u}+\vec{v})=k\vec{u}+k\vec{v}$.
3. $k.(k'\vec{u})=k'(k\vec{u})=(kk')\vec{u}$.
4. $1.\vec{u}=\vec{u}$.
5. $k.\vec{u}=\vec{0}$ équivaut $(k=\vec{0}$ et $\vec{u}=\vec{0})$.

d. Application :

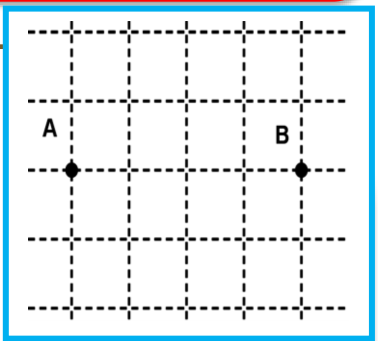
- Simplifier : $3\overrightarrow{AB}+7\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{BA}$ puis $-2\left(\frac{3}{5}\right)\overrightarrow{CD}+7\overrightarrow{DA}-\frac{29}{5}\overrightarrow{DA}$.
- ABC est un triangle .
  1. Construire les points E , F , G et H tels que :
     $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AF}=-2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AG}=2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AH}=-3\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$.
  2. On suppose que : $AB=8$ cm et le point M vérifie la relation $\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}=\vec{0}$ $(\mathbb{I})$
     - démontrer que $4\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}=\vec{0}$.
     - En déduire $\overrightarrow{MA}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ puis construire le point M .

03. Vecteurs colinéaires :

a. Définition :

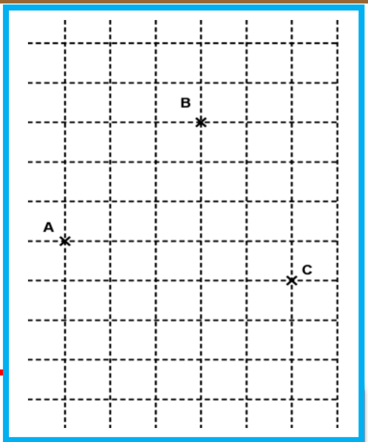
- Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires s'il existe α de $\mathbb{R}$ tel que : $\vec{u}=\alpha\vec{v}$ ou $\vec{v}=\alpha\vec{u}$.
- Trois points A et B et C du plan (P) sont alignés si et seulement si : $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{CD}$ sont alignés (ou encore il existe α de $\mathbb{R}$ tel que : $\overrightarrow{AB}=\alpha\overrightarrow{AC}$ ou $\overrightarrow{BC}=\alpha\overrightarrow{BA}\cdots$ect
- Deux droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont alignés .

b. Application :



- Soient A et B deux points du plan (P) et M est un point du plan (P) qui vérifie la relation :
  $(1):-4\overrightarrow{MA}+5\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{AB}=\vec{0}$.
  1. Montrer que le point M appartient à la droite (AB) .
  2. Construire le point M .
- ABC est un triangle . D et E sont deux points qui vérifie : $\overrightarrow{EB}=\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{ED}=2\overrightarrow{BC}$.
  1. Démontrer que C est le milieu de $[AD]$.
- Soit ABCD un quadrilatère sachant que $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{CD}$.
  1. Donner la nature du quadrilatère ABCD .
  2. On considère le point E tel que $\overrightarrow{AE}=2\overrightarrow{AC}$ démontrer que : $\overrightarrow{BE}=2\overrightarrow{BD}$.
- ABC est un triangle . Les points A' et B' et C' sont respectivement les milieux des segments $[BC]$ et $[AC]$ et $[AB]$.
  1. Montrer que : $\overrightarrow{BB'}=-\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{CC'}=-\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.
  2. Soient E et F deux points tel que : $\overrightarrow{BE}=2\overrightarrow{BB'}$ et $\overrightarrow{CF}=2\overrightarrow{CC'}$.
     a) Construire une figure .
     b) Donner la nature des quadrilatères ACBF et ACBE .
     c) Montrer que les points A et E et F sont alignés .

III. Milieu d'un segment - Propriétés des milieux d'un triangle :



01. Milieu d'un segment :

a. Activité :

Soit un segment $[AB]$.

1. Construire le point I de (P) tel que : $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$.
2. Que représente le point I ? donner la définition pur I .

b. Définition :

$[AB]$ est un segment du plan (P) .

Le point I est le milieu de $[AB]$ si et seulement si : $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$.

c. Propriétés :

- Le point I est le milieu de $[AB]$ si et seulement si : $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{IB}$
- Le point I est le milieu de $[AB]$ si et seulement si : $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AI}$ ou $\overrightarrow{BA}=2\overrightarrow{BI}$.
- Le point I est le milieu de $[AB]$ si et seulement si : $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ ou $\overrightarrow{BI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$.

02. Propriétés des milieux d'un triangle :

a. Activité :

Soit ABC un triangle dans le plan (P) .(voir la figure) .

On considère le point I le milieu du segment $[BC]$.

1. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ en fonction de $\overrightarrow{AI}$ . .
2. Soient J et K les milieux de $[AB]$ et $[AC]$ déterminer une relation entre $\overrightarrow{JK}$ et $\overrightarrow{BC}$.

b. Propriétés :

- ABC est un triangle . I et J sont les milieux des segment $[AB]$ et $[AC]$, on a : $\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.
- ABC est un triangle, K est le milieu du segment $[BC]$, on a : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AK}$.