Série I

Exercice 1 :

Soit m et n deux entiers naturels non nuls.

Étudier la paritée des nombres suivants :

$A = 4m + 1$; $B = 2n + 3$; $C = 2m + 6n + 2014$

$D = (2m + 1)^2 + 2^{n+1}$; $E = n^2 + m^2 + n + m$; $G = (2n + 1)^{2014} + (2m + 1)^{2015}$

Exercice 2 :

Soit a un nombre entier naturel non nul.

1)- Montrer que $a^{2014} + a^{2015}$ est un nombre pair .

2)- Montrer que $a + a^3$ est un nombre pair .

Exercice 3 :

Soit a et b deux nombres entiers naturels tel que $a > 2b$

1)- Montrer que les nombres $a - 2b$ et $a + 2b$ ont la même paritée

2)- Résoude dans $IN \times IN$ l'équation $a^2 - 4b^2 = 36$

Exercice 4 :

Soit n un entier naturel

Montrer que si n^2 est pair, alors n est pair

Exercice 5 :

Soient m et n deux entiers naturels tels que : $m > n$

1)- Montrer que $m + n$ et $m - n$ ont la même paritée

2)- Résoudre dans $IN \times IN$ l'équation : $m^2 - n^2 = 196$

Exercice 6 :

Soit a un nombre entier naturel impair. Montrer que $K = a^2 - 1$ est un multiple de 8

Exercice 7 :

1)- Déterminer les diviseurs de 28 .

2)- Montrer que la somme des inverses de ces diviseurs est un entier naturel

Exercice 8 :

1)- Soit n un entier naturel non nul .

Montrer que le nombre $n^2 + n$ est pair

2)- Montrer que le nombre $n^2 + 5n + 3$ est impair

3)- Montrer que le nombre $n^4 - n^2$ est multiple de 4

Exercice 9 :

1)- Vérifier si les nombres 49 , 239 , 407 , 387 , 1559 , 8367 sont prmiers .

2)- Décomposer en facteurs premiers les nombres 675 , 16650 , 5292 , 6250

Exercice 10 :

Soit $A = 35280$ et $B = 218295$

1)- Décomposer en facteurs premiers le deux nombres A et B

2)- Déduire le $PGCD(A, B)$ et le $PPCM(A, B)$

3)- Vérifier que : $PGCD(A,B) \times PPCM(A,B) = A \times B$

Exercice 11 :

1)- Déterminer le plus grand des nombres premiers inférieurs à 100

2)- Le nombre 123456789 est-il premier ?justtfier votre réponse ?

3)- Soit p et q deux nombres premiers supérieurs à 2 .Montrer que le nombre $p+q$ n'est pas premier

Exercice 12 :

p est un entier naturel supérieur à 1

1)- Factoriser l'expression : $4p^4+1$

2)- Déduire que $4p^4+1$ n'est pas premier

3)- Montrer que 400000001 n'est pas premier

Exercice 13 :

Soit x et y deux nombres dans IN tels que : $x=4n+3$ et $y=6n+2$ $(n \in IN)$

1)- Étudier la parité de : x ; y et $2x$

2)- Montrer que $x+y$ est un multiple de 5

3)- Calculer x et y tel que $n=7$ puis déduire les diviseurs et les multiples de x et de y

4)- Déduire que x est un nombre premier

Exercice 14 :

1)- Décomposer en facteurs premiers les nombres : 3528 ; 32400 ; 9702

2)- Conclure : $(9702 \vee 3528)$; $(9702 \wedge 3528)$; $(3528 \wedge 32400)$

3)- Déterminer $(360 \wedge 123)$ avec la méthode de l'algorithme d'Euclide

Exercice 15 :

1)- Montrer que le nombre 26820 est divisible par : 2 ; 3 ; 4 ; 5 et 9

2)- Déterminer la valeur de n tel que le nombre $n15n$ soit un multiple de 2 ; 4 ; 3 et 9 tel que $(0 \leq n \leq 9)$

3)- Montrer que le nombre $36 \times 5 \times 7 + 27$ est multiple de 9

4)- Montrer que le nombre $2 \times 9 \times 7 + 3$ est impaire

Exercice 16 :

Soit $a = 2646$ et $b = 2100$

1)- Décomposer en facteurs premiers les nombres a et b

2)- Simplifier $\frac{a}{b}$

3)- Simplifier $\sqrt{a}$ et $\sqrt{b}$

4)- Décomposer en facteurs premiers le nombre $c = a^3b^2$

Exercice 17 :

Soit $a = 1400$ et $b = 1540$

1)- Décomposer en facteurs premiers les nombres a et b

2)- Déduire le plus grand diviseur commun de a et b

3)- Déduire le plus petit multiple commun da a et b

Exercice 18 :

1)- Montrer que le nombre $A = 5^{n+2} - 5^n$ est un multiple de 3 pour tout $(n \in IN)$

●●●●● **Exercice 19** :

a est b deux entiers naturels premiers entre eux

1)- Montrer que :

$(a+b) \wedge b = 1$

$(a+b) \wedge ab = 1$ (On accepte que $a^2 \wedge b^2 = 1$)

●●●●● **Exercice 20** :

Déterminer le grand multiple commun des nombres a et b dans chaqu'un des cas suivants

1) $a = 12$; $b = 8$

2) $a = 9$; $b = 4$

●●●●● **Exercice 21** :

En utilisant l'algorithme d'Euclide, déterminer le plus petit diviseur commun des nombres x et y dans chaque cas :

1) $x = 837$; $y = 1085$

3 $x = 1789$; $y = 1515$

●●●●● **Exercice 22** :

1)- Déterminer les multiples inférieurs à 200 du nombre 14

2)- Déterminer les diviseurs de 1470

3)-Déterminer les multiples communs des nombres a et b dans les cas suivants :

$a = 37$ et $b = 79$; $a = 65$ et $b = 42$

$a = 70$ et $b = 14$; $a = 46$ et $b = 76$

4)-3)-Déterminer les diviseurs communs des nombres a et b dans les cas suivants :

$a = 54$ et $b = 42$; $a = 336$ et $b = 80$

$a = 35$ et $b = 72$; $a = 83$ et $b = 67$

●●●●● **Exercice 23** :

1)- Déterminer le PPCM des nombres a et b dans les cas suivants :

$a = 27$ et $b = 42$; $a = 72$ et $b = 35$; $a = 19$ et $b = 37$

2)- Déterminer le PPCM des nombres a et b dans les cas suivants :

$a = 81$ et $b = 126$; $a = 19$ et $b = 37$; $a = 35$ et $b = 72$

●●●●● **Exercice 24** :

Déterminer dans chaque cas les chifres a, b et c :

1)- Le nombre $23a4$ est divisible par 3

2)- Le nombre $23a4$ est divisible par 3 mais non divisible par 9

3)- Le nombre $23b5c$ divisible par 3 et 5

●●●●● **Exercice 25** :

Soit n et m deux nombres entiers naturels tel que $PGCD(m; n) = 24$ et $n \leq m$

1)- Déterminer les facteurs premiers communs de n et m

2)- Soit $m \times n = 3456$. Calculer $PPCM(m; n)$ puis conclure n et m

●●●●● **Exercice 26** :

1)- Montrer que la somme de cinq nombres entiers naturels consécutifs est un nombre entier naturel divisible par 5

2)- Soit $a \in IN$. Montrer que :$a(a+1)(a+2)(a+3)+1$ est un carré parfait

●●●●● Exercice 27 :

Décomposer $(10^6-1)^3$ et déduire le reste de la division de 999999^3 sur 5

●●●●● Exercice 28 :

On considère le nombre $a = 2^3 \times 3^2 \times 7$

1)- Vérifier que a est divisible par 24

2)- Déterminer le plut petit nombre entier naturel k tel que ka est un carré parfait

3)- Déterminer le plut petit nombre entier naturel m tel que ma est un carré d'un nombre entier naturel.

●●●●● Exercice 29 :

1)- Décomposer et simplifier l'expression : $(n+1)^2 - n^2$

2)- Montrer que chaque nombre entier naturel impair est une soustraction de deus carrés de deux nombres consécutifs .

3)- Appliquer la démonsration sur les nombres $17\,;\,45\,;\,101$

●●●●● Exercice 30 :

Soit n un entier naturel impair

1)- Vérifier que n^2-1 est un multiple de 8 dans les cas : $n=1\,;\,n=3\,;\,n=5\,;\,n=7$

2)- Montrer que pour tout nombre entier naturel impair n^2-1 est multiple de 8

●●●●● Exercice 31 :

Soient $n\,;\,m$ et k des nombres entiers naturels

Montrer que si $3n+2m$ et $7n+5m$ sont des multiples de k alors n et m sont des multiples de k .

●●●●● Exercice 32 :

Soient n et k deux entiers naturels

1)- Vérifier que si $n=5k+1$ et $n=5k+4$ alors n^2-1 est divisible par 5

2)- Vérifier que si $n=5k+2$ et $n=5k+3$ alors n^2+1 est divisible par 5

3)- Montrer que pour tout $n \in IN$: $n(n^4-1)$ est divisible par 5

●●●●● Exercice 33 :

Soit n un entier naturel non nul .

1)- Montrer que le nombre $n(n^2-1)$ est divisible par 3 .

2)- Montrer que le nombre $n^2(n^2-1)$ est divisible par 4 .

●●●●● Exercice 34 :

Soit n un nombre entier naturel , on pose $F = 7^{n+3} \times 3^{n+1} - 49$

Montrer que F est divisible par 98

●●●●● Exercice 35 :

Soit n un nombre entier naturel supérieur ou égal à 2

1)- Ecrire le nombre n^4+1 sous forme de différence de deux carrés parfaits .

2)- Montrer que le nombre n^4+1 n'est pas premier.