

## Corrigé de l'exercice 1

1. Soit  $n$  un entier naturel non nul

1<sup>er</sup> cas : Si  $n$  est pair :

$$\text{alors } n = 2k \quad (k \in \mathbb{N})$$

$$\text{donc } n+1 = 2k+1 \quad (k \in \mathbb{N})$$

et par suite

$$\begin{aligned} n(n+1) &= 2k(2k+1) \\ &= 2(2k^2 + k) \\ &= 2k' \quad (k' = 2k^2 + k \in \mathbb{N}) \end{aligned}$$

2<sup>ème</sup> cas : Si  $n$  est impair :

$$\text{alors } n = 2k+1 \quad (k \in \mathbb{N})$$

$$\text{donc } n+1 = 2k+1+1 = 2k+2 = 2(k+1) \quad (k \in \mathbb{N})$$

et par suite

$$\begin{aligned} n(n+1) &= (2k+1).2(k+1) \\ &= 2 \times ((2k+1).(k+1)) \\ &= 2 \times (2k^2 + 3k + 1) \\ &= 2.k'' \quad (k'' = 2k^2 + 3k + 1 \in \mathbb{N}) \end{aligned}$$

D'où le résultat.

2.

✓  $a = 2n^2 + 13$

Puisque  $2n^2$  est pair et 5 est impair alors  $a$  est impair

✓  $b = n^3 - n = n(n^2 - 1) = n(n+1)(n-1)$

(On sait que d'après le résultat de la question 1 que le produit de deux nombres consécutifs est pair)

$n(n+1)$  est pair donc  $n(n+1)(n-1)$  est pair

càd  $b = n^3 - n$  est pair

✓  $c = (2n+1)^7$

On sait que  $(2n+1)$  est impair, càd  $(2n+1)^7$  est impair

Donc le nombre  $c$  est impair.

✓

$$\begin{aligned}d &= n^2 + 3n + 1 \\&= n^2 + n + 2n + 1 \\&= n(n+1) + 2n + 1\end{aligned}$$

Puisque  $n(n+1)$  est pair et  $2n+1$  est impair

Donc  $n(n+1) + 2n + 1$  est impair

D'où  $d$  est impair.

## Corrigé de l'exercice 2

- ✓ On a 2 est pair donc  $2^9$  est pair  
Et on a 6 est pair donc  $6^9$  est pair  
Et par suite  $2^9 + 6^9$  est pair.
- ✓ On a 17 est impair donc  $17^3$  est impair  
Et on a 5 est impair donc  $5^3$  est impair  
Et par suite  $17^3 - 5^3$  est pair.
- ✓ On a 351 est impair donc  
Et on a 208 est pair  
Et par suite  $351 \times 208$  est pair.
- ✓ On a 37013 est impair  
Et on a 1375 est impair  
Et par suite  $37013 \times 1375$  est impair

## Corrigé de l'exercice 3

Soit  $n \in \mathbb{N}$

- ✓ On a  $12n+8 = 2 \times (6n+4) = 2 \times k$  ( $k = 6n+4 \in \mathbb{N}$ ) donc  $12n+8$  est pair.
- ✓ On a  $2n+5 = 2n+4+1 = 2(n+2)+1 = 2k+1$  ( $k = n+2 \in \mathbb{N}$ ) donc  $2n+5$  est impair.
- ✓ On a  $4n+6 = 2 \times (2n+3) = 2 \times k$  ( $k = 2n+3 \in \mathbb{N}$ ) donc  $4n+6$  est pair.
- ✓ On a  $8n-7 = 8n-8+1 = 2(4n-4)+1 = 2k+1$  ( $k = 4n-4 \in \mathbb{N}$ , avec  $n \geq 1$ ) donc  $8n-7$  est impair.
- ✓ On a  $6n+3 = 3 \times (2n+1)$  donc  $6n+3$  est impair (produit de deux nombres impairs).

- ✓ On a  $2n^2 + 8n + 11 = 2n^2 + 8n + 10 + 1 = 2(n^2 + 4n + 5) + 1 = 2k + 1$  ( $k = n^2 + 4n + 5 \in \mathbb{N}$ )  
donc  $2n^2 + 8n + 11$  est impair.
- ✓ On a  $n^2 + n + 2006 = n(n+1) + 2006$ 
  - ▶  $n(n+1)$  est pair ( produit de deux nombres consécutifs )
  - ▶ 2006 est pair.  
Donc  $n^2 + n + 2006$  est pair ( somme de deux nombres pairs )
- ✓ On a  $n^3 - n + 2 = n(n^2 - 1) + 2 = \underbrace{n(n+1)}_{\text{pair}} \times \underbrace{(n-1)}_{\text{pair}} + 2$  donc  $n^3 - n + 2$  est pair.

## Corrigé de l'exercice 4

1. Les diviseurs de 18 sont :  $\{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$ .

Les diviseurs de 38 sont :  $\{1, 2, 19, 38\}$ .

Les diviseurs de 75 sont :  $\{1, 3, 5, 15, 25, 75\}$ .

Les diviseurs de 60 sont :  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 18, 30, 60\}$ .

2. Les cinq multiples de 3 sont :  $\{3, 6, 9, 12, 15\}$ .

Les cinq multiples de 5 sont :  $\{5, 10, 15, 20, 25\}$ .

Les cinq multiples de 7 sont :  $\{7, 14, 21, 28, 35\}$ .

Les cinq multiples de 11 sont :  $\{11, 22, 33, 44, 55\}$ .

Les cinq multiples de 15 sont :  $\{15, 30, 45, 60, 75\}$ .

## Corrigé de l'exercice 5

<i>les nombres \ divisible</i>	par 2	Par 3	Par 4	Par 5	Par 9
7524	×	×	×		×
2805		×		×	
9360	×	×	×	×	×
5005005		×		×	
91328	×		×		
1010001		×			

## Corrigé de l'exercice 6

1. Montrons que :  $1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

On pose  $A = 1+2+\dots+n$

On peut écrire  $A$  sous la forme :  $A = n + (n-1) + \dots + 2 + 1$

Donc  $A + A = (1+n) + (2+n-1) + \dots + (n+1)$

Donc  $2A = \underbrace{(n+1) + (n+1) + \dots + (n+1)}_{n \text{ fois}} = n(n+1)$

Et par suite  $A = \frac{n(n+1)}{2}$

2. Montrons que  $n$  divise le nombre  $S = \frac{n(n+1)}{2}$

On a  $S = \frac{n(n+1)}{2} = na + (1+2+\dots+n) - \frac{n(n+1)}{2}$  c -à -d  $S - \frac{n(n+1)}{2} = n \times a$

Donc  $n$  divise le nombre  $S - \frac{n(n+1)}{2}$ .

3. Montrons que si  $n$  est impair alors  $S$  est divisible par  $n$

Si  $n$  est impair alors  $(n+1)$  est pair c -à -d  $(n+1) = 2k$  ( $k \in \mathbb{N}$ )

Donc  $\frac{n(n+1)}{2} = k \times n$  et comme  $S - \frac{n(n+1)}{2} = n \times a$  alors  $S = n(a-k)$

Et par suite  $S$  est divisible par  $n$ .

## Corrigé de l'exercice 7

- Les nombres entiers naturels qui répondent à la question sont ceux dont la somme de leurs chiffres est divisible par 3 et dont les chiffres des dizaines sont 0 ou 5.
- Les nombres divisibles par 5 sont :

205 210 215 220 225 230 235 240 245 250  
255 260 265 270 275 280 285 290 295

- Les nombres divisibles par 3 parmi la liste précédente sont :

210 225 240  
255 270 285

## Corrigé de l'exercice 8

1. On a  $A = n^4 - 1 = (n^2)^2 - (1)^2 = (n^2 - 1)(n^2 + 1) = (n - 1)(n + 1)(n^2 + 1)$   
Donc  $n - 1$ ,  $n + 1$  et  $n^2 + 1$  sont des diviseurs du nombre  $A$
2. On a  $A = (n - 1)(n + 1)(n^2 + 1)$   
Donc : 1,  $A$ ,  $(n - 1)(n^2 + 1)$ ,  $(n + 1)(n^2 + 1)$  sont des diviseurs du nombre  $A$ .

## Corrigé de l'exercice 9

1. Montrons que  $A \in \mathbb{N}$

On a :

$$\begin{aligned} A &= (x + 2y)^2 - x^2 \\ &= (x + 2y + x)(x + 2y - x) \\ &= 2y(2x + 2y) \\ &= 4y(x + y) \end{aligned}$$

On a  $x \in \mathbb{N}$  et  $y \in \mathbb{N}$  donc  $4y(x + y) \in \mathbb{N}$

Et par suite  $A \in \mathbb{N}$

2. Montrons que  $A$  est pair

On a  $A = 4y(x + y)$  c -à -d  $A = 2 \times [2y(x + y)]$

Donc  $A$  est pair

3. Montrons que  $A$  est divisible par 4

On a  $A = 4 \times [y(x + y)]$

Donc  $A$  est divisible par 4.

## Corrigé de l'exercice 10

1. On pose  $a = 8k$  avec  $k \in \mathbb{N}$

Et on cherche  $k$  de tel façon  $0 \leq a \leq 76$

Donc  $0 \leq 8k \leq 76$

Donc  $0 \leq k \leq \frac{76}{8}$

Donc  $0 \leq k \leq \frac{19}{2}$

Donc  $k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

D'où les multiples de 8 inférieurs à 76 sont :  $\{0, 8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, 64, 72\}$

2. De la même façon on a les multiples de 7 inférieurs à 76 sont :  
 $\{0, 7, 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63, 70\}$

## Corrigé de l'exercice 11 :

1. On a :

$$544 = 2 \times 272$$

$$272 = 2 \times 136$$

$$136 = 2 \times 68$$

$$68 = 2 \times 34$$

$$34 = 2 \times 17$$

2. On a :

$$\begin{aligned} 544 &= 2 \times 272 \\ &= 2 \times (2 \times 136) \\ &= 2 \times 2 \times (2 \times 68) \\ &= 2 \times 2 \times 2 \times (2 \times 34) \\ &= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times (2 \times 17) \\ &= 2^5 \times 17 \end{aligned}$$

Donc :  $n = 5$

## Corrigé de l'exercice 12

a)  $23a4$  est divisible par 3 si et seulement si  $2+3+a+4$  est divisible par 3  
c -à -d  $9+a$  est divisible par 3  
et par suite  $a \in \{0, 3, 6, 9\}$

b)  $23a4$  est divisible par 3 et n'est pas divisible par 9 si et seulement si  $a \in \{3, 6\}$

c)  $23b5c$  est divisible par 3 et 5 si et seulement si  $2+3+b+5+c = 10+b+c$  est divisible par 3 et  $c \in \{0, 5\}$

- Si  $c = 0$  : alors  $10+b$  est divisible par 3 donc  $b \in \{2, 5, 8\}$
- Si  $c = 5$  : alors  $15+b$  est divisible par 3 donc  $b \in \{0, 3, 6, 9\}$

Donc  $(b, c) \in \{(2, 0); (5, 0); (8, 0); (0, 5); (3, 5), (6, 5); (9, 5)\}$

## Corrigé de l'exercice 13

On sait que :  $n \geq 3$  et  $n-3$  est multiple de 4

Donc il existe un entier naturel  $k$  tel que :  $n-3=4k$

Donc :  $n=3+4k$

Par suite :

$$\begin{aligned} n^2 + 6n + 5 &= (3+4k)^2 + 6(3+4k) + 5 \\ &= 9 + 24k + 16k^2 + 18 + 24k + 5 \\ &= 16k^2 + 48k + 32 \quad (k' = k^2 + 3k + 2 \in \mathbb{N}) \\ &= 16(k^2 + 3k + 2) \\ &= 16k' \end{aligned}$$

D'où le résultat.

## Corrigé de l'exercice 14

1. On a  $p$  est un nombre premier tel que  $p > 2$  donc  $p$  est impair

$p$  s'écrit sous la forme  $p = 2k + 1$  ( $k \in \mathbb{N}$ )

Donc

$$\begin{aligned} p^2 - 1 &= (2k + 1)^2 - 1 \\ &= 4k^2 + 4k + 1 - 1 \\ &= 4k^2 + 4k \\ &= 4 \times \underbrace{k(k+1)}_{\text{pair}} \\ &= 4 \times 2k' = 8 \times k' \end{aligned}$$

Donc  $p^2 - 1$  est multiple de 8

2. On a :

$$p^2 - 1 = 8k'$$

Et puisque  $p$  est impair donc il est clair que  $p^2 + 1$  est pair donc  $p^2 + 1 = 2k''$

$$\text{Et par suite } p^4 - 1 = (p^2 - 1)(p^2 + 1) = 8k' \times 2k'' = 16 \times (k'k'')$$

D'où 16 divise  $p^4 - 1$ .

## Corrigé de l'exercice 15

1.

1500	2	840	2
750	2	420	2
375	3	210	2
125	5	105	3
25	5	35	5
5	5	7	7
1		1	

$$x = 2^2 \times 3^1 \times 5^3$$

$$y = 2^3 \times 3^1 \times 5^1 \times 7^1$$

2. On a :  $x \wedge y = 2^2 \times 3^1 \times 5^1 = 60$  et  $x \vee y = 2^3 \times 3^1 \times 5^3 \times 7^1 = 21000$

3. On a :  $\sqrt{x} = \sqrt{2^2 \times 3 \times 5^3} = 2 \times 5 \times \sqrt{3 \times 5} = 10\sqrt{15}$  et  $\frac{x}{y} = \frac{2^2 \times 3^1 \times 5^3}{2^3 \times 3^1 \times 5^1 \times 7^1} = \frac{5^2}{2 \times 7} = \frac{25}{14}$

## Corrigé de l'exercice 16

Remarquons que :  $\frac{n+13}{n+3} = \frac{n+3+10}{n+3} = 1 + \frac{10}{n+3}$

Donc  $n+13$  est divisible par  $n+3$  veut dire que  $n+3$  divise 10

Puisque 1,2,5,10 sont les diviseurs de 10, alors :

$n+3=1$  ou  $n+3=2$  ou  $n+3=5$  ou  $n+3=10$

Donc  $n=-2$  ou  $n=-1$  ou  $n=2$  ou  $n=7$

Et puisque  $n \in \mathbb{N}$  alors  $n=2$  ou  $n=7$ .

## Corrigé de l'exercice 17

1. a) On a :  $(n+1)^2 - n^2 = n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n + 1$ .

Le nombre  $2n+1$  est impair

b) soit  $x$  un entier naturel impair, donc il existe un entier naturel  $n$  tel que :  $x = 2n+1$ , et d'après le résultat de la première question a), on a :  $x = 2n+1 = (n+1)^2 - n^2$  d'où le résultat.

2.

$$\blacktriangleright 19 = 2 \times 9 + 1 = (9+1)^2 - 9^2 = 10^2 - 9^2$$

►  $47 = 2 \times 23 + 1 = (23+1)^2 - 23^2 = 24^2 - 23^2$

►  $53 = 2 \times 26 + 1 = (26+1)^2 - 26^2 = 27^2 - 26^2$

## Corrigé de l'exercice 18

Soit  $n \in \mathbb{N}$

Posons  $d = (n+1) \wedge (n+2)$

On a  $d$  divise  $(n+2)$  et  $d$  divise  $(n+1)$

Donc  $d$  divise  $(n+2) - (n+1)$

Donc  $d$  divise 1

Et puisque  $d \in \mathbb{N}^*$  alors  $d = 1$

Rq :  $(n+1)$  et  $(n+2)$  sont deux nombres entiers consécutifs donc  $(n+1) \wedge (n+2) = 1$

## Corrigé de l'exercice 19

1. L'équation (1) équivaut à  $(x+y)(x-y) = 51$

Ça veut dire que  $(x-y)$  et  $(x+y)$  sont les diviseurs de 51

On a 1, 3, 17 et 51 sont les diviseurs de 51.

Donc on a possibilités suivantes :

$$\begin{cases} x-y=1 \\ x+y=51 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x-y=51 \\ x+y=1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x-y=3 \\ x+y=17 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x-y=17 \\ x+y=3 \end{cases}$$

D'où  $\begin{cases} x=26 \\ y=25 \end{cases}$  ou  $\begin{cases} x=26 \\ y=-25 \end{cases}$  (impossible) ou  $\begin{cases} x=10 \\ y=7 \end{cases}$  ou  $\begin{cases} x=10 \\ y=-7 \end{cases}$  (impossible)

Et par suite  $(x, y) \in \{(26, 25); (10, 7)\}$

2.

$$(S): \begin{cases} a^2 - b^2 = 7344 \\ a \wedge b = 12 \end{cases}$$

On a  $a \wedge b = 12$  donc  $a = 12x$  ( $x \in \mathbb{N}$ ) et  $b = 12y$  ( $y \in \mathbb{N}$ )

Donc  $a^2 - b^2 = 7344$  équivaut à  $(12x)^2 - (12y)^2 = 7344$

équivaut à  $144x^2 - 144y^2 = 7344$

équivaut à  $x^2 - y^2 = 51$

et d'après le résultat de la première question on a :  $(x, y) \in \{(26, 25); (10, 7)\}$

et par suite  $(a,b) \in \{(312,300);(120,84)\}$

## Corrigé de l'exercice 20 :

On a  $a = 5^{n+2} - 5^n = 5^n (5^2 - 1) = 5^n \times 24 = 2^3 \times 3^1 \times 5^n$

Et on a  $b = 7^{n+2} - 7^n = 7^n (7^2 - 1) = 7^n \times 48 = 2^4 \times 3^1 \times 7^n$

Donc  $a \wedge b = 2^3 \times 3 = 24$  et  $a \vee b = 2^4 \times 3 \times 5^n \times 7^n = 48 \times (35)^n$

## Corrigé de l'exercice 21 :

1.

- ▶ On calcule  $\sqrt{2017}$  :  $\sqrt{2017} \approx 44,91$
- ▶ On détermine tous les nombres premiers inférieurs à  $\sqrt{2017}$  :  
 $2 - 3 - 5 - 7 - 11 - 13 - 17 - 19 - 23 - 29 - 31 - 37 - 41 - 43$
- ▶ Le nombre 2017 n'est pas divisible par ces nombres  
D'où le nombre 2017 est premier.

2. On a  $27000001 = 27000000 + 1 = (300)^3 + 1^3 = (300 + 1)(300^2 - 300 + 1) = 301 \times 89701$

Donc le nombre 27000001 n'est pas premier.