Professeur : Rachid BELEMOU Lycée : Oued Eddahab	COURS **Arithmétiques dans $\mathbb{N}$**	Niveau : TCT - BIOF Année : 2017-2018

1- L'ensemble des nombres entiers naturels $\mathbb{N}$:

Activité : (1- serie)

> **Définition:** Tout les nombres entiers naturels composent un ensemble. On note : $\mathbb{N}$,
> et on écrit : $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \cdots\}$

Vocabulaire et symbole :

- Le nombre 0 est le nombre entier naturel nul.
- Les nombres entiers naturels non nuls composent un ensemble, nous le notons par le symbole : $\mathbb{N}^*$
- $\mathbb{N}^* = \{1, 2, \cdots\}$ est l'ensemble des entiers naturels non nuls .
- 7 est un nombre entier naturel, on écrit : $7 \in \mathbb{N}$
- (-8) n'est pas un nombre entier naturel, on écrit : $-8 \notin \mathbb{N}$

Exercice d'application : (2- serie)

2- Les nombres paires et impaires :

> **Définition:** - a est un nombre entier naturel paire, s'il existe un entier naturel k tel que : a = 2k
> - a est un nombre entier naturel impaire, s'il existe un entier naturel k tel que : a = 2k+1

Exercice d'application : (3 - serie)

Remarques : Un nombre entier naturel est soit paire soit impaire, et on a les résultats suivants :

$a \times b$	a-b	a+b	b	a	Nombres
			paire	paire	Paraité des nombres
			impaire	impaire	
			paire	impaire	
			impaire	paire	

> Pour tout k $\in \mathbb{N}$
> 2k est paire
> 2k+1 est impaire

Exercice d'application : (7- serie)

3- Diviseurs - Multiples d'un nombre :

Activité : Déterminer les dix premiers multiples du nombre 4 .

> **Définition :** a et b deux éléments de $\mathbb{N}$, on dit que a est un multiple de b, s'il existe un nombre entier naturel n tel que : a = b*n

Exemple : On a : 145 = 5*29 alors : 145 est un mumtiple du nombre 5

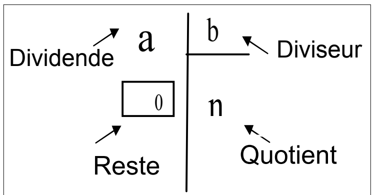
> Pour tout k $\in \mathbb{N}$
> 3k est un multiple de k

Exercice d'application : (8 - serie)

> **Définition:** a et b deux éléments de $\mathbb{N}$, on dit que b est un diviseur de b, s'il existe un nombre entier naturel n tel que : a = b*n

Exemple : On a : 145 = 5*29 alors : 5 et 29 sont des diviseurs de 145

Remarques : - Le nombre 0 est un multiple de tout les nombres entiers naturels .
- Le nombre 1 est un diviseur de tout les nombres entiers naturels .



Division Euclidienne

Exercices d'application : (9,10,14 - serie)

4- Critére de la divisibilité :

> **Propriété :** soit n un nombre entier naturel , n est divisible par :
> - 2 si et seulement si son nomdre d'unités est : 0, 2, 4, 6 ou 8.
> - 3 si et seulement si la somme de ces chiffres est divisible par 3 .
> - 4 si et seulement si le nombre formé par ces deux derniers chiffres est divisible par 4.
> - 5 si et seulement si son nomdre d'unités est : 0 ou 5.
> - 9 si et seulement si la somme de ces chiffres est divisible par 9 .

Exemple : Le nombre 4725 est divisible par 5 car son nombre d'unités est 5 .
- Le nombre 4725 est divisible par 3 et 9 car le nombre 18= (4+7+2+5) est un multiple de 3 et de 9 .
- Le nombre 1628 est divisible par 2 car son nombre d'unités est 2 .
- Le nombre 1628 est un multiple de 4 car le nombre 28 formé par ces deux derniers chiffres est un multiple de 4 .

Exercice d'application : (15 - serie)

5- Les nombres premiers et la factorisation :

1- Propriétés :

Propriété 1 : Un nombre entier naturel p non nul et différent de 1 est dit premier, si ces seuls diviseurs sont 1 et lui-même.

Exemple : Les nombres premiers inférieurs à 30 sont : 29 ,23 ,19 ,17 ,13 ,11 ,7 ,5 ,3 ,2

Propriété 2 : On admet que tout nombre entier naturel non nul et différent de 1, s'écrit sous la forme d'un produit des facteurs premiers.

Exemple : On a : $640 = 64 \times 10 = 8^2 \times 2 \times 5$, alors $640 = \left(2^3\right)^2 \times 2 \times 5$, d'où : $640 = 2^7 \times 5$ alors les facteurs de ce produit sont les nombre premiers 2 et 5

L'écriture $640 = 2^7 \times 5$ est applée la décompostion en facteurs premiers du nombre 640

2- Technique de la décompostion en facteurs premiers :

Exemple : Décomposer le nombre 1344 :

1344	2
672	2
336	2
168	2
84	2
42	2
21	3
7	7
1	

Exercices d'application : (18,19,20,21,22 - serie)

6- PGCD - PGCM :

Définition 1 : a et b deux éléments de $\mathbb{N}$ non nuls.
PGCD de a et b est le plus grand diviseur commun des nombres a et b. On note : $PGCD\,(a;b)$

Exemple : Les diviseurs du nombre 12 sont : 1, 2, 3, 4, 6, 12. et pour le nombre 15 sont : 1, 3, 5, 15. alors *PGCD* (12;15) = 3

Définition 2 : a et b deux éléments de $\mathbb{N}$.
Si le plus grand diviseur commun des nombres a et b est 1. Alors on dit que a et b sont premiers entre eux

Exemple : Les diviseurs du nombre 8 sont : 1, 2, 4, 8. et pour le nombre 15 sont : 1, 3, 5, 15. alors *PGCD*(8;15) = 1, d'où 8 et 15 sont premiers entre eux.

Définition 3 : a et b deux éléments de $\mathbb{N}$.
PPCM de a et b est le plus petit multiple commun des nombres a et b. On note : *PPCM* (a;b)

Exemple : Les multiples du nombre 12 sont : 0, 12, 24, 36, 48, 60, 72,. .... .
Les multiples du nombre 8 sont : 0, 8, 16, 24, 32, 40, 48,.... . alors *PPCM* (12;8) = 24.

Propriété 1 : Le plus grand diviseur commun de deux nombres est un produit des facteurs communs munis du plus petit des exposants trouvés dans la décomposition de a et b .

Propriété 2 : Le plus petit multiple commun de deux nombres est un produit des facteurs communs munis du plus grand des exposants trouvés dans la décomposition de a et b .

7- ALGORITHME D'EUCLIDE ET PGCD :

Propriété : ALGORITHME D'EUCLIDE
Algorithme d'Euclide est une suite d'opérations (division euclidienne), qui permet de retrouver le P*GCD* de deux « grands » nombres en se ramenant à des nombres plus petits. Le P*GCD* est toujours le dernier reste non nul trouvé.

Exemple : On peut présenter ces résultats sous forme d'un tableau pour calculer par exemple le PGCD (1053,325) = 13

Étapes	a	b	r		a − bq = r
1	1 053	325	78	←	1 053 − 325 × 3 = 78 (1$^{\text{ÈRE}}$ ÉTAPE)
2	325	78	**13**	←	325 − 78 × 4 = 13 (2$^{\text{ÈME}}$ ÉTAPE)
3	78	13	0	←	78 − 13 × 6 = 0 (3$^{\text{ÈME}}$ ÉTAPE)

Exercices d'application : (25 - serie)