Ch. 1 :L'arithmétique dans IN

N désigne L'ensemble des entiers naturels : $N = \{0,1,2,\dots,n\dots\dots\dots\}$

L'arithmétique *est l'étude des nombres entiers et des opérations sur ces nombres*

Proposition : *Pour tout* $a \in N$ *et* $b \in N$

$(a+b=0) \Rightarrow (a=b=0)$	$(ab=0) \Rightarrow (a=0 \quad ou \quad b=0)$	$(ab=1) \Rightarrow (a=b=1)$

La divisibilité dans N :

Soient a et d deux entiers naturels , tels que $d \neq 0$

On dit que d divise a , s'il existe $k \in N$ *tel que* $a = kd$*. L'entier k est appelé le quotient de a par d.*

d est appelé un diviseur de a et a est dit un multiple de d.

Nombres pairs et impairs

Tout entier naturel est soit pair soit impair.

- *S'il est multiple de deux, c'est un nombre pair. Par exemple, les nombres : 4, 8, et 60, sont pairs. Le nombre zéro est pair, parce qu'il est égal à 2 multiplié par 0.*
- *Sinon, le nombre est impair. Par exemple 5, 3, et 71 sont impairs. Le nombre un est impair, c'est le plus petit entier naturel impair.*

L'ensemble des entiers naturels pairs peut être écrit comme ceci :

$$\text{Entiers naturels pairs} = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14,\dots\} = \{2n ; n \in \mathbb{N}\} = 2\mathbb{N}$$

De même, les ensembles des entiers impairs naturels ou relatifs s'écrivent

$$\text{Entiers naturels impairs} = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, \dots\} = \{2n+1 ; n \in \mathbb{N}\}$$

Propriétés :

- *pair* $\pm$ *pair = pair ;*
- *pair* $\pm$ *impair = impair ;*
- *impair* $\pm$ *impair = pair.*

- *pair* $\times$ *pair = pair ;*
- *pair* $\times$ *impair = pair ;*
- *impair* $\times$ *impair = impair.*

- *pair / impair = pair ;*
- *impair / impair = impair ;*
- *impair / pair n'est jamais un entier ;*
- *pair / pair peut être pair ou impair.*

Division euclidienne dans N

Soient a et b deux entiers naturels où b > 0.

Il existe un couple unique d'entiers naturels (q,r) tels que : $\begin{cases} a = bq + r \\ 0 \le r < b \end{cases}$ *, q est appelé le quotient , r le reste, a le dividende et b le diviseur de la division euclidienne de a par b .*

Le PGCD de deux entiers naturels

Soient a et b deux entiers naturels non nuls.

Le PGCD de a et b est le plus grand élément de l'ensemble des diviseurs communs aux deux entiers a et b . On note par PGCD(a , b) ou $a \wedge b$*.*

Exemple : *Calculer PGCD(a , b) avec a = 36 et b = 24*

$a = 2^2 \times 3^2$ *et* $b = 3 \times 2^3$

On a

$\times$	1	2	4
1	1	2	4
3	3	6	12
9	9	18	36

Alors $D_{36} = \{1,2,3,4,6,9,12,18,36\}$ *et on a*

$\times$	1	2	4	8
1	1	2	4	8
3	3	6	12	24

Alors $D_{24} = \{1,2,3,4,6,8,12,24\}$

Alors $D_{24} \cap D_{36} = \{1,2,3,4,6,12\}$ *alors* $PGCD(24,36) = 12$

Détermination du PGCD(a,b) en utilisant l'algorithme d'Euclide :

- Soit r le reste de la division euclidienne de a par b alors : $a \wedge b = b \wedge r$
- Le $PGCD(a,b)$ est le dernier reste non nul de la suite des divisions euclidiennes dans

L'algorithme d'Euclide:Recherche de PGCD(a,b).

On pose $a = bq_1 + r_1$, $0 \leq r_1 < b$ alors $a \wedge b = b \wedge r_1$ si $r_1 \neq 0$
si $r_1 = 0$ alors $a \wedge b = b$.

$b = r_1q_2 + r_2$, $0 \leq r_2 < r_1$ alors $b \wedge r_1 = r_1 \wedge r_2$ si $r_2 \neq 0$
si $r_2 = 0$ alors $b \wedge r_1 = r_1$.

$r_1 = r_2q_3 + r_3$, $0 \leq r_3 < r_2$ alors $r_1 \wedge r_2 = r_2 \wedge r_3$ si $r_3 \neq 0$
si $r_3 = 0$ alors $r_1 \wedge r_2 = r_2$.

puisque la suite des nombres entiers positifs (r_n) est strictement décroissante et minorée par 0, le nombre d'étapes est majoré par b et $a \wedge b$ est le dernier reste r_n non nul.

Exemple : Calculer $PGCD(385,140)$

a	b	r_1	r_2	r_3
385	140	105	<u>35</u>	0
quotient $\rightarrow$	2	1	3	

alors $PGCD(385,140) = 35$

Le PPCM de deux entiers naturels

Soient a et b deux entiers naturels non nuls. Le PPCM de a et b est le plus petit commun multiple de a et b .
On note par : PPCM(a , b) ou $a \vee b$.

Critères de divisibilité

Convention d'écriture

Pour ne pas confondre un nombre avec son écriture dans sa décomposition en base 10, on notera $\overline{a_n a_{n-1} .... a_1 a_0}$ le nombre pour lequel a_0 est le chiffre des unités, a_1 celui des dizaines, etc.

On a ainsi $x = \overline{a_n a_{n-1} .... a_1 a_0} = a_0.1 + a_1.10 + ... + a_n.10^n$

(Exemple : $x = 10296 = 6 + 9 \times 10 + 2 \times 10^2 + 0 \times 10^{13} + 1 \times 10^4$)

Divisibilité par 3 :
Un entier naturel est divisible par 3 si et seulement si la somme des ses chiffres est divisible par 3 .

Divisibilité par 4 ou 25
Un entier naturel est divisible par 4 (respectivement par 25) si et seulement si si le nombre formé par ses deux derniers chiffres est divisible par 4 (respectivement par 25)

Divisibilité par 5 :
Un entier naturel est divisible par 5 si et seulement si son dernier chiffre est 0 ou 5 .

Divisibilité par 8 :
Un entier naturel ≥ 100 est divisible par 8 si et seulement si nombre formé par ses trois derniers chiffres est divisible par 8.

Divisibilité par 9 :
Un entier naturel est divisible par 9 si et seulement si la somme des ses chiffres est divisible par 9 .

Divisibilité par 11 :
Un entier naturel . On désigne par S_1 la somme des ses chiffres de rang impairs(de droite à gauche) et S_2 la somme des ses chiffres de rang pairs.
Soit $d = S_1 - S_2$.
Si $d \geq 0$ alors n est divisible par 11 si et seulement si d est divisible par 11
est divisible par 11 si et seulement si la somme des ses chiffres est divisible par 9 .
Si $d < 0$ alors n est divisible par 11 si et seulement si $d + 11p$ est divisible par 11
(p le plus petit entier naturel tel que $d + 11p \geq 0$)

Entiers premiers entre eux

On dit que les deux entiers a et b sont étrangers ou premiers entre eux , si $a \wedge b = 1$

Exemple : Montrer que 144 et 385 sont premiers entre eux .

a	b	r_1	r_2	r_3	r_4	r_5	r_6
385	144	97	47	3	2	<u>1</u>	0
quotient $\rightarrow$	2	1	2	15	1	2	

alors $144 \wedge 385 = 1$

Nombres premiers :

Définitions :

•*Un entier naturel* $p \geq 2$ *est dit premier, si ses seuls diviseurs sont 1 et lui-meme.*

•*Un entier naturel, distinct de 1, non premier est appelé entier composé.*

•*Un entier naturel est un carré parfait lorsque sa racine carrée est un entier naturel.*

Théorèmes

•*Tout entier naturel n admet au moins un diviseur premier.*

•*Si n est un entier naturel distinct de 1, alors le plus petit diviseur de n distinct de 1 est premier.*

•*Un entier naturel n >1 est composé, si et seulement si, il admet un diviseur premier p tel que* $p \leq \sqrt{n}$

Comment reconnaître qu'un nombre est premier ?

Pour reconnaître si un nombre entier naturel n est premier, on effectue les divisions Euclidiennes successives par les nombres premiers inférieurs à $\sqrt{n}$ *pris dans l'ordre croissant.*

- *si l'une de ces divisions donne pour reste 0, alors ce nombre n'est pas premier ;*
- *si aucune division ne donne pour reste 0, on peut alors conclure que ce nombre est premier.*

Exemple : *217 est –il un nombre premier ?*

On a : $\sqrt{217} = 14.7309...$ *alors* $14^2 < 217 < 15^2$ *alors les nombres premiers* ≤ 14 *sont* $2,3,5,7,11,13$. *Si l'un des ces nombres divise 217 alors est un nombre composé , si non , 217 est un nombre premier.*

On a : 2, 3 , 5 ne divise pas 217 mais 7 divise 217 alors 217 est un nombre composé .

Crible d'Erathostène :

C'est un tableau permettant de déterminer les nombres premiers inférieurs à 100.

Les nombres dans les cases grisées sont des nombres premiers.

Pour remplir ce tableau, on procède par élimination:

- *On élimine le 1;*
- *On garde 2 et on élimine tous les multiples de 2;*
- *On garde 3 et on élimine tous les multiples de 3;*
- *…etc*

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Propriétés *la décomposition en facteurs premiers*

•*Il existe une infinité de nombres premiers.*

•*Tout entier naturel* $n \geq 2$, *se décompose en un produit fini de nombres premiers.*

• *Pour tout entier naturel* $n \geq 2$ *,il existe des nombres premiers distincts deux à deux* $p_1, \ldots, p_k$ *et des entiers naturels non nuls* $a_1, \ldots, a_k$ *tels que* $p_1 < p_2 < \ldots < p_k$ *et n se décompose de façon unique sous la forme*

$$n = p_1^{a_1} \times p_2^{a_2} \times \ldots \times p_k^{a_k}$$

Exemple : *n = 216 :*

$$\begin{array}{r|l} 216 & 2 \\ 108 & 2 \\ 54 & 2 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \end{array}$$

alors $216 = 2^3 \times 3^3$

Le PGCD, le PPCM et la décomposition en facteurs premiers

Le PGCD de deux nombres entiers a et b supérieurs ou égaux à 2 a pour décomposition en facteurs premiers le produit des facteurs premiers apparaissant à la fois dans la décomposition de a et de b munis du plus petit des exposants trouvés dans la décomposition de a et de b. Ainsi,

si $a = 2^3 \times 3^4 \times 5^2 \times 7$ et $b = 2^2 \times 3^5 \times 7^3 \times 11$ alors $\mathrm{pgcd}(a, b) = 2^2 \times 3^4 \times 7.$

Le PPCM de deux nombres entiers a et b supérieurs ou égaux à 2 a pour décomposition en facteurs premiers le produit des facteurs premiers apparaissant dans a ou dans b munis du plus grand des exposants trouvés dans la décomposition de a et de b. Ainsi,

si $a = 2^3 \times 3^4 \times 5^2 \times 7$ et $b = 2^2 \times 3^5 \times 7^3 \times 11$ alors $\mathrm{ppcm}(a, b) = 2^3 \times 3^5 \times 5^2 \times 7^3$